1. Bevanal 2 kiegészítő feladatsor, (logika, közepek, rendezett testek és becslések)

1. Van-e olyan A halmaz, amelyre $\mathbb{Z} \subset A$ és $\mathbb{Z} \in A$ is teljesül?

2. a) Egy futó 20 kört fut, a köröket rendre $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességgel futja. A teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   b) Egy másik futó 20 percig fut, a sebességét percenként változtatja, a k-adik percben v_k sebességgel fut ($k = 1, 2, \ldots, 20$). Az ő teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   c) Melyik futónak nagyobb az átlagsebessége?

3. Legyen H tetszőleges halmaz. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?

   a) $(\exists x)\ (x \in H)$

   b) $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$

   c) $(\forall x)\ (x \in H \Longrightarrow x \in \mathbb{Z})$

4. Mi ez a halmaz?

   a) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ x^2 \leq 5\}$

   b) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$

   c) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ y > x \Longrightarrow y^2 > 4\}$

   d) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ y < x \Longrightarrow y^2 < 4\}$

5. Igaz-e, hogy

   a) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \subset C$?

   b) $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \in C$?

   c) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?

   d) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$?

   e) $(A \in B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?

6. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i)!

   $(i)\ x \in A \vee x \in B \qquad\qquad (ii)\ x \in A \cap B$

7. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i) !

   (i) $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$

   (ii) $A \setminus D \subset B \setminus C$

8. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) azt, hogy a H halmaz pontosan 1 elemű!

9. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) a prímszámok halmazát!

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re $\sqrt[n]{3} - 1 \leq \dfrac{2}{n}$!

11. Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

    a) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 100$?

    b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > n$?

    c) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{n}{2} + 2$?

    d) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 10\sqrt[3]{n}$?

12. * Huszonöt szuperintelligens gonosz oroszlán közé egy darab oszthatatlan hús kerül. Ha valamelyik megeszi, akkor elalszik, és amíg alszik, a többiek úgy tekintenek rá, mint egy darab oszthatatlan húsra. Az oroszlánok szívesen esznek, de épp nem fenyeget, hogy éhen haljanak, ezért nem muszáj enniük. Azt természetesen semmiképpen sem szeretnék, hogy megegyék őket. A fentieket az oroszlánok is tudják. Mi fog történni?

A további feladatokban T egy tetszőleges rendezett test.

13. a) Bizonyítsuk be, hogy

$$(\forall a, b, c, d \in T)\ (a < b \wedge c < d) \Longrightarrow a + c < b + d$$

b) Mit mondhatunk összeg helyett a szorzatról?

14. Bizonyítsuk be, hogy semmilyen T rendezett testben sincsenek szomszédos elemek, azaz bármely T-beli $a < b$ párhoz létezik olyan $c \in T$, amelyre $a < c < b$ teljesül!

15. Legyen $H \subset T$. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi állítások? Van-e közülük olyan, amely biztosan igaz vagy biztosan hamis?

a) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x < y$

b) $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x < y$

c) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x \leq y$

d) $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x \leq y$

e) $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad x < y$

16. Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok teste nem rendezhető, azaz nem lehet megadni $\mathbb{C}$-n olyan rendezést, amelyre teljesül minden rendezési axióma!

17. Bizonyítsuk be, hogy minden $a \in T$-re

a) $|a| \geq 0$

b) $-|a| \leq a \leq |a|$

c) $-|a| \leq -a \leq |a|$

18. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n-re és $a_1, \ldots, a_n \in T$-re

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

19. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a, b \in T$ esetén

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b| \ !$$

20. Lehet-e egy rendezett testnek legnagyobb eleme?

21. Bizonyítsuk be, hogy bármely T rendezett testben teljesülnek az alábbiak!

a) $(\forall a \in T)\ (\exists b \in T)\ b > a \cdot a$

a') $(\forall a \in T)\ (\exists b \in T)\ b \cdot b > a$

b) $(\exists a \in T)\ (\forall b \in T)\ (b > a \Longrightarrow b > 2a)$

c) $(\forall a \in T)\ (\exists b \in T)\ (\forall c \in T)\ (c > b \Longrightarrow c \cdot c > a)$