Bevezető analízis 1. első ZH MEGOLDÁSAI

1. *Egy faluban három emberrel beszéltünk, akik a következőket mondták:*
Pista: Ebben a faluban minden galagonyabokor Laci bácsi valamelyik lányáé.
Ubul: Van a faluban olyan galagonyabokor, amelyik tövises.
Béla: Laci bácsinak nincs lánya.
a) Lehet-e, hogy mindhárman igazat mondtak?
b) Lehet-e, hogy csak Ubul hazudott?

Megoldás:

a) Azt állítjuk, hogy ez nem lehet. Tegyük föl, hogy mindhárman igazat mondtak. Ekkor Ubul állítása szerint van a faluban legalább egy galagonyabokor. Pista állítása szerint ez csak Laci bácsi valamelyik lányáé lehet, az viszont nem lehet, mert Béla állítása szerint nincs is lánya Laci bácsinak. Tehát nem lehet, hogy mindhárman igazat mondtak.

b) Ez viszont lehet: Ha faluban nincs galagonyabokor és Laci bácsinak nincs lánya, akkor Béla nyilván igazat mondott, de Pista is, mert ha nincs galagonyabokor a faluban, akkor bármi igaz a falu összes galagonyabokrára (hiszen csak úgy lehet cáfolni Pistát, ha mutatunk egy galagonyabokrot, ami nem Pista bácsi valamelyik lányáé, de galagonyabokor híján ez nem tehető meg).

2. *Oldjuk meg grafikusan vagy algebrailag a következő egyenlőtlenséget:*

$$\left|\frac{1}{x} - 2\right| \leq 3$$

Megoldás:

Algebrailag fogjuk megoldani. Először is megállapítjuk, hogy $x \neq 0$.

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 3, ha a szám legalább -3 és legfeljebb 3. Tehát a megadott egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy mindkét alábbi egyenlőtlenség teljesül:

$$-3 \leq \frac{1}{x} - 2 \leq 3,$$

mindkét oldalhoz 2-t adva ekvivalens egyenlőtlenségeket kapunk:

$$-1 \leq \frac{1}{x} \leq 5.$$

Most meg szeretnénk szorozni az egyenlőtlenségeket x-szel, de x lehet pozitív és negatív is és az utóbbi esetben megfordulnak az egyenlőtlenségek az átszorzásnál, ezért külön nézzük a két esetet.

1. eset: Ha $x > 0$, akkor átszorzás után $-x \leq 1 \leq 5x$ adódik. Mivel az $x > 0$ eseten belül vagyunk, így az $-x \leq 1$ feltétel automatikusan teljesül, tehát ezen eseten belül elég az $1 \leq 5x$ egyenlőtlenséget megoldani, ami pedig pontosan akkor igaz, ha $x \geq \frac{1}{5}$. Az összes ilyen x számra teljesül $x > 0$, tehát azt kaptuk, hogy az $x > 0$ eseten belül az $x \geq \frac{1}{5}$ számok jók.

2. eset: Ha $x < 0$, akkor átszorzás után $-x \geq 1 \geq 5x$ adódik. Mivel az $x < 0$ eseten belül vagyunk, így most a $1 \geq 5x$ egyenlőtlenség teljesül automatikusan, vagyis ekkor a $-x \geq 1$ egyenlőtlenséget kell megoldani, ami pontosan akkor teljesül, ha $x \leq -1$. Az összes ilyen

x negatív, tehát azt kaptuk hogy a negatív számokon belül az $x \leq -1$ számok teljesítik a $-1 \leq \frac{1}{x}$ egyenlőtlenséget.

A két esetet egyesítve tehát azt kaptuk, hogy a megadott egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $x \geq \frac{1}{5}$ VAGY $x \leq -1$.

3. *Periódusa-e az* $\{x\} + \{x/2\}$ *függvénynek az*
a) $1/2$ *b)* *2 ?*

Megoldás:

Legyen $f(x) = \{x\}+\{x/2\}$. Mivel a megadott f függvény mindenütt értelmezve van, ezért a periodikusság definíciója alapján azt kell eldönteni az a) feladatnál, hogy igaz-e minden valós x-re, hogy $f(x + 1/2) = f(x)$, a b) feladatnál pedig azt, hogy igaz-e minden valós x-re, hogy $f(x + 2) = f(x)$

a) Nem. A fentiek szerint ehhez elég egy olyan x-et mutatni, amelyre $f(x + 1/2) \neq f(x)$, ilyet viszont könnyű mutatni, pl. ilyen az $x = 0$, hiszen $f(0+1/2) = f(1/2) = \{1/2\}+\{1/4\} = 1/2 + 1/4 = 3/4$, míg $f(0) = \{0\} + \{0/2\} = 0$.

b) Azt állítjuk, hogy ez igaz, vagyis minden valós x-re teljesül, hogy $f(x + 2) = f(x)$. Tanultuk, hogy az $\{x\}$ függvény 1 szerint periodikus. Ezt használva kétszer azt kapjuk, hogy minden x-re

$$\{x + 2\} = \{x + 1\} = \{x\},$$

egyszer alkalmazva pedig azt kapjuk, hogy minden x-re

$$\{(x/2) + 1\} = \{x/2\}.$$

Tehát

$$f(x + 2) = \{x + 2\} + \{(x + 2)/2\} = \{x + 2\} + \{(x/2) + 1\} = \{x\} + \{x/2\} = f(x)$$

valóban teljesül minden x-re.

4. *Van-e minimuma, illetve van-e maximuma az*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ha\ x \neq 0 \\ 2 & ha\ x = 0. \end{cases}$$

függvénynek a teljes számegyenesen?

Megoldás:

Azt fogjuk belátni, hogy sem maximuma, sem minimuma nincs.

Kezdjük a maximummal. Tegyük fel, hogy x_1-ben maximuma van, vagyis tetszőleges valós x-re $f(x) \leq f(x_1)$. Megmutatjuk, hogy ez nem lehet, vagyis tetszőleges x_1-hez mutatunk olyan x-t, amelyre ez nem teljesül, vagyis amelyre $f(x) > f(x_1)$.

Ha $x_1 > 0$, akkor $x = x_1+1$ jó, hiszen ekkor $f(x) = (x_1+1)^2 = x_1^2+2x_1+1 > x_1^2 = f(x_1)$.
Ha $x_1 < 0$, akkor $x = x_1-1$ jó, hiszen ekkor $f(x) = (x_1-1)^2 = x_1^2-2x_1+1 > x_1^2 = f(x_1)$.
Ha $x_1 = 0$, akkor pl. $x = 5$ jó, hiszen ekkor $f(x) = f(5) = 25 > 2 = f(0) = f(x_1)$.
Mivel minden esetet elintéztük, ezzel beláttuk, hogy f-nek nem lehet maximuma.
(Ha valaki nem akar külön esetekkel bajlódni, akkor pl. az $x = |x_1| + 2$ minden x_1-re jó.)

Nézzük a minimumot! Most az kell belátni, hogy semmilyen x_1 szám nem lehet minimum, azaz bármely x_1 valós számhoz van olyan x, amelyre $f(x) < f(x_1)$.

Ha $x_1 \neq 0$, akkor jó az $x = x_1/2$, hiszen ekkor $f(x) = (x_1/2)^2 = x_1^2/4 < x_1^2 = f(x_1)$. (A középső egyenlőtlenségnél azt használtuk, hogy $x_1 \neq 0$ miatt x_1^2 szigorúan pozitív, így 1-nél nagyobb számmal osztva csökken.)

Ha $x_1 = 0$, akkor pl. $x = 1$ jó, hiszen ekkor $f(x) = 1^2 = 1 < 2 = f(0) = f(x_1)$.

Tehát minden esetet elintéztünk, és azt kaptuk, hogy f-nek mimumuma sem lehet.

5. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy mindenütt értelmezett függvény. Melyik állításból következik a másik?*
P : *Az f függvény grafikonjának nincs olyan pontja, amelyre középpontosan szimmetrikus.*
Q : *Az f függvény nem páratlan.*

Megoldás: Azt állítjuk, hogy P-ből következik Q, de Q-ból nem következik P.

$P \Rightarrow Q$: Azt kell belátnunk, hogy ha P igaz, akkor Q is. Tehát tegyük fel, hogy P igaz és lássuk be, hogy Q igaz, vagyis nem lehet Q hamis. Q pontosan akkor hamis, ha az f függvény páratlan, vagyis azt kell belátnunk, hogy f nem lehet páratlan. Ez viszont világos, mert ha f páratlan volna, akkor középpontosan szimmetrikus lenne az origóra és az origó pontja lenne a grafikonjának, vagyis lenne olyan pontja a grafikonnak, amelyre középpontosan szimmetrikus, tehát P nem lenne igaz, pedig feltettük, hogy P igaz.

$Q \not\Rightarrow P$: Ehhez elég mutatnunk egy függvényt, amelyre Q teljesül, de P nem. Tehát olyan nem páratlan függvény kell, amely grafikonjának van olyan pontja, amelyre középpontosan szimmetrikus. Azt állítjuk, hogy ilyen függvény például a konstans $f(x) = 42$ függvény. Ez nem páratlan, hiszen $f(-x) = -f(x)$ semmilyen x-re sem teljesül, de a grafikonja (ami az $y = 42$ vízszintes egyenes) középpontosan szimmetrikus a $(0, 42)$ pontra.

(Valójában ellenpéldát kaphatunk tetszőleges páratlan függvényből, ha úgy toljuk el a grafikonját, hogy az ne menjen keresztül az origón.)

6. *Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amely nem monoton az egész számegyenesen, de nincs sem minimuma, sem maximuma?*

Megoldás:
Igen, rengeteg ilyen függvény van, mutatunk két ilyet is, természetesen elég egyet mutatni.
1. példa: Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ahhoz, hogy belássuk, hogy nem monoton az egész számegyenesen, azt kell belátni, hogy nem lehet sem monoton növő, sem monoton csökkenő. Az előbbihez kell mutatni $x_1 < x_2$-t, amelyre $f(x_1) \leq f(x_2)$ nem teljesül, vagyis $f(x_1) > f(x_2)$, az utóbbihoz olyan $x_3 < x_4$-t, amelyre $f(x_3) \geq f(x_4)$ nem teljesül, vagyis $f(x_3) < f(x_4)$. Az előbbire jó az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, hiszen $f(1) = 1/1 > 1/2 = f(2)$, az utóbbira jó az $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, hiszen $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy nincs maximuma, tetszőleges x_1-hez kell olyan x-t találnunk, amelyre $f(x) > f(x_1)$. Ha $x_1 \leq 0$, akkor mondjuk $x = 1$ jó, hiszen ekkor $f(x) = f(1) = 1 > 0 \geq f(x_1)$. Ha $x_1 > 0$, akkor $x = x_1/2$ jó, hiszen ekkor $f(x) = f(x_1/2) = 2/x_1 > 1/x_1 = f(x_1)$.

Hasonlóan látható be, hogy nincs minimuma. Most tetszőleges x_1-hez olyan x-t kell mutatnunk, amelyre $f(x) < f(x_1)$. Most $x_1 \geq 0$ esetén mondjuk $x = -1$ jó, hiszen ekkor $f(x) = f(-1) = -1 < 0 \leq f(x_1)$, $x_1 < 0$ esetén pedig $x_1/2$ jó, hiszen ekkor $f(x) = f(x_1/2) = 2/x_1 < 1/x_1 = f(x_1)$.

2. példa: Legyen f a 4. feladatban megadott függvény.

Arról a 4. feladatban már beláttuk, hogy nincs se maximuma se minimuma, tehát már csak azt kell belátni, hogy nem monoton a teljes számegyenesen. Monoton növő azért nem lehet, mert pl. $-2 < -1$, de $f(-2) = 4 > 1 = f(-1)$, monoton csökkenő pedig azért nem lehet, mert pl. $1 < 2$, de $f(1) = 1 < 4 = f(2)$.

7. *a) Tudjuk, hogy f szigorúan monoton nő az $[1,2)$ és $[2,3)$ intervallumokon. Következik-e ebből, hogy szigorúan monoton nő az $[1,3)$ intervallumon?*

b) Tudjuk, hogy f szigorúan monoton nő az $(1,2]$ és $[2,3)$ intervallumokon. Következik-e ebből, hogy szigorúan monoton nő az $(1,3)$ intervallumon?

Megoldás: a) Nem következik. Azt állítjuk, hogy ellenpélda az $f(x) = \{x\}$ függvény. Meg kell mutatnunk, hogy ez a függvény szigorúan monoton nő az $[1,2)$ és $[2,3)$ intervallumokon, de nem szigorúan monoton növő az $[1,3)$ intervallumon.

Az $[1,2)$-n $f(x) = \{x\} = x - [x] = x - 1$, ami szigorúan monoton növő (hiszen $x_1 < x_2$ esetén $x_1 - 1 < x_2 - 1$).

A $[2,3)$-n $f(x) = \{x\} = x - [x] = x - 2$, ami szigorúan monoton növő (hiszen $x_1 < x_2$ esetén $x_1 - 2 < x_2 - 2$).

Az $[1,3)$ intervallumon viszont nem szigorúan monoton növő, mert például $3/2 < 2$, de $f(3/2) = 1/2 \not< 0 = f(2)$.

b) Következik.

Definíció szerint azt kell ellenőrizni, hogy bármilyen $(1,3)$-beli $x_1 < x_2$ számpárra $f(x_1) < f(x_2)$. Megnézzük az összes esetet aszerint, hogy az $x_1 \leq 2$ és $x_2 \leq 2$ közül melyik teljesül, melyik nem.

1. eset: $x_1 \leq 2$ és $x_2 \leq 2$. Ekkor az $(1,2]$-beli szig. mon. növekedés miatt $f(x_1) < f(x_2)$.

2. eset: $x_1 > 2$ és $x_2 > 2$. Ekkor az $[2,3)$-beli szig. mon. növekedés miatt $f(x_1) < f(x_2)$.

3. eset: $x_1 \leq 2$ és $x_2 > 2$. Ekkor az $(1,2]$-beli szig. mon. növekedés miatt $f(x_1) \leq f(2)$ (mert $f(x_1) < f(2)$, ha $x_1 < 2$ és $f(x_1) = f(2)$ ha $x_1 = 2$), a $[2,3)$-beli szig. mon. növekedés miatt viszont $f(2) < f(x_2)$. Tehát $f(x_1) \leq f(2) < f(x_2)$, amiből következik, hogy $f(x_1) < f(x_2)$.

4. eset: $x_1 > 2$ és $x_2 \leq 2$. Ez az eset nem állhat elő, mert ebből az következne, hogy $x_2 < x_1$, pedig feltettük, hogy $x_1 < x_2$.

Mivel minden esetet elintéztünk, ezzel beláttuk az állításunk.