1. Folytonosság

1. (A) Igaz-e, hogy ha $D(f) = \mathbb{R}$, f folytonos és periodikus, akkor f korlátos és van maximuma és minimuma?

2. (A) Tudunk példát adni olyan függvényekre, melyek megegyeznek inverzükkel? Ha igen, adjunk minél többet!

3. Lássuk be, hogy
$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

4. Mutassuk meg, hogy bár
$$f(x) = (1+x^2)\operatorname{sgn} x$$
nem folytonos, inverze mégis az!

Ábrázoljuk a következő ponthalmazokat a síkon!

5. (A)
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \cos t,\ y = \sin t\,,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

6. (A)
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t\,,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

7. (A)
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \operatorname{arc\,tg} t,\ y = \operatorname{arc\,ctg} t\,,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

8.

A következő feladatokban adjunk iterációt az egyenletek megoldására és becsüljük a konvergencia sebességét! Igazoljuk, hogy jogosan jártunk el! Hány lépést kell megtenni, hogy 3 tizedesjegy pontossággal kapjuk meg az eredményt?

9. (A)
$$x = \frac{x+2}{x+1}, \quad x \in [1,2]$$

10. (A)
$$x = \sqrt{x+2}, \quad x \in [0,2]$$

11.
$$x^2 = 2, \qquad x \in [1,2] \quad \left(x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)$$

12. (A)
$$x = 0,9\cos x, \quad x \in [0,1]$$

13. Igazoljuk, hogy található olyan $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, melyre $x \sin x = \frac{\pi}{4}$.

14.

Vizsgáljuk meg a következő függvényeket, hogy egyenletesen folytonosak-e!

15. (A)
$$D(f) = (0,1), \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

16. (A)
$$D(f) = (0,1), \qquad f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

17.

$$D(f) = \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x^2$$

18. (A)

$$D(f) = \mathbb{R}, \qquad f(x) = x + \sin x$$

19. (A)

$$D(f) = (-10000000, 10000000), \qquad f(x) = x^2$$

20.

$$D(f) = \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

21. (A)

$$D(f) = (0, \pi), \qquad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

22. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Igazoljuk, hogy ha ezen kívül

    (a) f folytonos, vagy

    (b) f monoton,

    akkor található $a \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = ax$!

23. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(f) = \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f(x + y) = f(x)f(y)$. Igazoljuk, hogy ha ezen kívül

    (a) f folytonos, vagy

    (b) f monoton,

    akkor található $a \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = a^x$!

2. Differenciálás

24. Lássuk be az alábbiakat!

1. $(c)' = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$;
2. $(\mathrm{id}^n)' = n \cdot \mathrm{id}^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$;
3. $(\exp_c)' = \ln c \cdot \exp_c \quad (c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
4. $(\log_c)' = \frac{1}{\mathrm{id} \cdot \ln c} \quad (c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$;
5. $(\sin)' = \cos$;
6. $(\cos)' = -\sin$;
7. $(\mathrm{tg})' = \frac{1}{\cos^2}$;
8. $(\mathrm{ctg})' = -\frac{1}{\sin^2}$;
9. $(\mathrm{sh}\,)' = \mathrm{ch}$;
10. $(\mathrm{ch}\,)' = \mathrm{sh}$;
11. $(\mathrm{th})' = \frac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}}$;
12. $(\mathrm{cth})' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^{\,2}}$;
13. $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$;
14. $(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$;
15. $(\mathrm{arc\,tg}\,)'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$;
16. $(\mathrm{arc\,ctg}\,)'(x) = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$;
17. $(\mathrm{arsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \mathbb{R}$;
18. $(\mathrm{arch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x \in (1,+\infty)$;
19. $(\mathrm{arth})'(x) = \frac{1}{1-x^2},\ x \in (-1,1)$;
20. $(\mathrm{arcth})'(x) = \frac{1}{1-x^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

25. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait!

1. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3$;
2. $f(x) = \frac{x^2-x}{4}$;
3. $f(x) = \frac{x-3}{x-5}$;
4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
5. $f(x) = \frac{2x+1}{x^{10}}$;
6. $f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^2+1}$;
7. $f(x) = \sqrt{x}$;
8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;
9. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$;
10. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x}}$;
11. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{x}}}$;
12. $f(x) = \sqrt{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^3}}}$;
13. $f(x) = \left(x^2+1\right)e^x$;
14. $f(x) = x\sin x$;
15. $f(x) = e^x \sin x$;
16. $f(x) = \ln x \cos x$;
17. $f(x) = x(\ln x - 1)$;
18. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$;
19. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;
20. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$;
21. $f(x) = \sin^5 x$;
22. $f(x) = \sin 5x$;
23. $f(x) = \sin x^5$;
24. $f(x) = \sin^5 5x^5$;
25. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
26. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
27. $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$;
28. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
29. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2}$;
30. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
31. $f(x) = \ln\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}$;
32. $f(x) = e^{10}\sin 5x$;
33. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;
34. $f(x) = \ln\sin x$;
35. $f(x) = \ln\ln x$;
36. $f(x) = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;
37. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$;
38. $f(x) = \arcsin 2x$;
39. $f(x) = \arccos\frac{1}{x}$;
40. $f(x) = \ln\lg x$;
41. $f(x) = \ln 10^x$;
42. $f(x) = \lg e^x$;
43. $f(x) = x^{2x}$;
44. $f(x) = x^{\sin x}$;
45. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$;
46. $f(x) = \frac{1}{\lg 2^x}$;
47. $f(x) = -xe^{-x}e^{-e^{-x}}$;
48. $f(x) = \frac{\sin x}{x}\mathrm{arc\,tg}\,x$;
49. $f(x) = \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3 x + \frac{3}{5}\mathrm{tg}^5 x$;
50. $f(x) = \frac{1}{2}\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$;
51. $f(x) = \frac{1}{2a}\left(\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a+x} - \frac{a}{a+x}\right)$;
52. $f(x) = \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x^2+1}$;
53. $f(x) = |x|$;
54. $f(x) = ||x-2|-2|+1$.

26. Számítsuk az $f'(1), f'(2), f'(3)$ értékeket, ha $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$!

27. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos a 0-ban, de ott nem differenciálható!

28. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény a 0-ban differenciálható!

29. Mutassuk meg, hogy a

$$D(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvénynek
(a) egyetlen pontban sincs határértéke;
(b) $x \cdot D(x)$ a 0-ban folytonos, de nem differenciálható;
(c) $x^2 \cdot D(x)$ a 0-ban differenciálható!

30. A Legendre-polinom definíciója:

$$P_m(x) := \frac{1}{2^m \cdot m!} \left[\left(x^2 - 1\right)^m \right]^{(m)}.$$

Mutassuk meg az alábbi összefüggést!

$$\left(1 - x^2\right) P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

Segítség: Lássuk be az $u(x) = \left(x^2 - 1\right)^m$ függvényről, hogy $\left(x^2 - 1\right) u'(x) = 2mxu(x)$, majd deriváljuk ezen egyenlet mindkét oldalát $m+1$-szer!

31. Hol differenciálhatók az alábbi függvények? Számítsuk ki a deriváltjukat!

(a) $f(x) = [x] \sin^2(\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \log_x 2$, $x > 0$, $x \neq 1$;

(c)
$$f(x) = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

32. Határozzuk meg a következő összeget!

$$\sum_{k=0}^{n} k e^{kx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

33. Tegyük fel, hogy f differenciálható a-ban. Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x \to a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x - a}.$$

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény tulajdonságainak vizsgálata:

(a) Értelmezési tartomány és torlódási pontjainak meghatározása.

(b) A függvény zérushelyei és tengelymetszetei.

(c) Folytonosság (féloldali is), szakadási helyek.

(d) Határérték az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban ($\pm\infty$-ben is).

(e) Szélsőérték-vizsgálat (lokális és abszolút):

   i. szükséges: $f'(x_0) = 0$,

   ii. elégséges: f' az x_0-ban előjelet vált vagy $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$szigorú lokális minimum, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$szigorú lokális maximum.

(f) Monotonitási viszonyok

   i. $f' \geq 0 \Leftrightarrow$monoton nő, $f' \leq 0 \Leftrightarrow$monoton fogy,

   ii. $f' > 0 \Rightarrow$ szigorúan monoton nő, $f' < 0 \Rightarrow$ szigorúan monoton fogy.

(g) Inflexiós pontok:

   i. szükséges: $f''(x_0) = 0$,

   ii. elégséges: f'' az x_0-ban előjelet vált vagy $f'''(x_0) \neq 0$.

(h) Konvexitás-konkávitás:

   i. konvex$\Leftrightarrow$ f' monoton nő vagy $f'' \geq 0$,

   ii. konkáv$\Leftrightarrow$ f' monoton fogy vagy $f'' \leq 0$.

(i) A függvény grafikus ábrázolása.

(j) Értékkészlet meghatározása.

34. (A) Végezzük el az alábbi függvények teljes körű vizsgálatát!

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3$;	(i) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
(b) $f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}$;	(j) $f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$;
(c) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;	(k) $f(x) = 2x - \mathrm{tg}x$;
(d) $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$;	(l) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;
(e) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$;	(m) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
(f) $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$;	(n) $f(x) = x^x$;
(g) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$;	(o) $f(x) = e^{-x^2}$;
(h) $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$;	(p) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

35. (A) Számítsuk ki a következő határértékeket!

(a)
$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4};$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x};$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right);$$

(e)
$$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}};$$

(f)
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right);$$

(g)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - (x-1)};$$

(h)
$$\lim_{x\to 0} \left(x^{x^x} - 1\right).$$

36. Legyen $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$, $f^{(n-1)} : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ folytonos, és létezik az $f^{(n)} : (x_0, x_n) \to \mathbb{R}$ n-edik deriváltfüggvény. Tudjuk továbbá, hogy léteznek $x_0 < x_1 < ... < x_n$, $f(x_i) = 0, i = 0, ..., n$ pontok. Mutassuk meg, hogy létezik $\xi \in (x_0, x_n)$, $f^{(n)}(\xi) = 0$!

37. Legyen f differenciálható, φ monoton növő és differenciálható I-n, $|f'(x)| < \varphi'(x)$ $\forall x \in I$. Lássuk be, hogy ekkor $|f(x) - f(y)| < \varphi(x) - \varphi(y)$, ha $x > y$!

Ennek segítségével mutassuk meg, hogy

(a) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x), \quad x > 0$

(b) $x - \frac{x^3}{3} < \tan x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

38. Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek a Lagrange-középértéktétel feltételei $[a, b]$-n. Ki lehet-e választani az (a, b) intervallum bármely ξ pontjához olyan $x_1, x_2 \in [a, b]$ pontokat, melyekre

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)?$$

39. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket!

(a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$;

(b) $|\arctan(a) - \arctan(b)| \le |a - b|$;

(c) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x, \quad x > 0$;

(d) $\frac{a-b}{a} \le \ln\frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}, \quad 0 < b < a$.

40. Írjuk fel az

$$f(x) = (x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$$

függvény $x_1 = -1$ valamint $x_2 = 2$ pontokhoz tartozó érintőinek egyenletét!

41. Mely pontokban lesz az $f(x) = 2 + x - x^2$ függvény érintője párhuzamos

(a) az x-tengellyel;

(b) az első síknegyed szögfelezőjével?

42. Adott területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

43. Melyik a legnagyobb területű azon derékszögű háromszögek közül, melyeknél az átfogó és az egyik befogó összege állandó?

44. Egy a oldalú négyzet alakú fémlemezből (felül nyitott) dobozt hajtogatunk. Mekkora az elérhető maximális térfogat?

45. Egy félgömb köré kúpot akarunk tenni a lehető legkisebb térfogattal úgy, hogy az alapjuk ugyanazon a síkon legyen. Milyenek legyenek a kúp méretei?

46. Határozzuk meg a 0 körüli n-edik Taylor-polinomokat és Lagrange-féle maradéktagokat az alábbi függvények esetén!

    (a) $f(x) = e^x$;

    (b) $f(x) = \sin x$;

    (c) $f(x) = \cos x$;

    (d) $f(x) = \ln(x+1)$.

47. Írjuk fel a következő függvények a körüli n-edik Taylor-polinomjait!

    (a) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$, $a = 0$, $n = 2$;

    (b) $f(x) = \sin(\sin x)$, $a = 0$, $n = 3$;

    (c) $f(x) = x^x - 1$, $a = 1$, $n = 3$;

    (d) $f(x) = c \cdot \mathrm{ch}\frac{x}{c}$ $(c \neq 0)$, $a = 0$, $n = 2$.

48. Számoljuk ki

    (a) e értékét 10^{-9} pontossággal;

    (b) $\sin 1$ értékét 10^{-8} pontossággal;

    (c) az $f(x) = e^x$ függvényt a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon $0,001$ pontossággal;

    (d) az $f(x) = \ln(x+1)$ függvényt a $[0,1]$ intervallumon $0,2$ pontossággal!

3. Integrálszámítás

49. Alapintegrálokra visszavezethető feladatok

(a) $\int \frac{\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}$

(b) $\int (5\cdot 2^x + 4\cdot\sin x - 3\cos x)$

(c) $\int \tan^2 x$

(d) $\int \frac{\cos^2 x - 5}{1+\cos(2x)}$

(e) $\int \coth^2 x$

(f) $\int \frac{1}{\cosh x + \sinh x}$

(g) $\int \frac{1}{4\sqrt{5-5x^2}}$

(h) $\int \frac{x^2}{x^2+1}$

50. Integrálás helyettesítéssel

(a) $f(ax+b)$ alakú integrandus:
$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(ax+b) = \frac{1}{a}\cdot(F(ax+b)) + c$

i. $\int \sqrt[4]{7x-16}$

ii. $\int \mathrm{e}^{5x+4}$

iii. $\int \left(5 - \tanh^2(1-x)\right)$

iv. $\int \frac{7}{4x^2-4x+2}$

v. $\int \frac{1}{1-x}$

vi. $\int \frac{1}{(1-x)^2}$

vii. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x}}$

(b) $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$

i. $\int x^2\cdot(2x^3+4)^{99}$

ii. $\int \sin^4 x \sin(2x)$

iii. $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}$

iv. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

v. $\int (x^2+1)\cdot\sqrt[3]{x^3+3x+1}$

vi. $\int 2^{x+1}\cdot\sqrt{2^x-1}$

vii. $\int \frac{1}{(1+x^2)\cdot\sqrt{\arctan x}}$

viii. $\int \frac{\sin x\cdot\sqrt[3]{\tan^2 x - 1}}{\cos^3 x}$

ix. $\int \frac{\sin 2x}{(5-\sin^2 x)^7}$

x. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}$

xi. $\int 2\cdot \mathrm{e}^{2\cdot\sin x}\cdot\cos x$

(c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(|f(x)|) + c$

i. $\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+1}$

ii. $\int \frac{\sin(2x)}{5+\cos^2 x}$

iii. $\int \frac{1}{\cosh^2 x\cdot\tanh x}$

iv. $\int \tan x$

v. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}$

vi. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$

vii. $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}$

(d) További feladatok helyettesítéssel

i. $\int \frac{1}{36+16x^2}$

ii. $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2-16}}$

iii. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ $(t := e^x)$

iv. $\int \sqrt{1-x^2}$ $(x := \sin t)$, $\int \cos^2 t = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)$

v. $\int \sqrt{x^2-1}$ $(x := \cosh t)$, $\int \sinh^2 t = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \mathrm{arcosh} x\right)$

51. Parciális integrálás

(a) Polinomfüggvénnyel szorzott exp, trigon. és hiperbolikus függvények

i. $\int(2x+3)\cdot\sin(6x)$

ii. $\int x\cdot \mathrm{e}^{\pi x}$

iii. $\int(1+2x^2)\cdot\coth 3x$

(b) Logaritmus, arcus és area függvények integrálása

i. $\int \ln x$

ii. $\int \arcsin x$

iii. $\int \arctan x$

iv. $\int \mathrm{arsinh}x$

v. $\int \mathrm{arcosh}x$

vi. $\int \mathrm{arcoth}x$

(c) Exp függvénnyel szorzott trigonometrikus és hiperbolikus függvények

i. $\int \mathrm{e}^{3x}\cdot\sin(2x)$

ii. $\int 2^x\cdot\cos(3x-1)$

iii. $\int 3^{2x+1}\cdot\sinh(4x-1)$

(d) További feladatok (parciális integrálás)

i. $\int \ln^3 x$

ii. $\int \arcsin^2 x$

iii. $\int \mathrm{e}^{\arcsin x}$

iv. $\int \arctan\sqrt{x}$

v. $\int \sin\sqrt{x}$

vi. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$

52. Racionális törtfüggvények integrálása

(a) Nevező $(ax+b)^n$, számláló elsőfokú vagy konstans

i. $\int \frac{14}{(6-4x)^7}$

ii. $\int \frac{5}{(2x+3)^4}$

iii. $\int \frac{4x-3}{(3x-5)^3}$

iv. $\int \frac{3x+1}{(1-2x)^{101}}$

(b) Nevező másodfokú, számláló konstans

i. $\int \frac{2}{3x^2+6x+15}$

ii. $\int \frac{1}{2x^2-3x+20}$

iii. $\int \frac{1}{x^2+6x+9}$

iv. $\int \frac{1}{x^2+8x+12}$

(c) Nevező másodfokú, számláló elsőfokú

i. $\int \frac{2x-3}{x^2+4x-5}$ ii. $\int \frac{5x-6}{x^2-2x+10}$ iii. $\int \frac{x+2}{x^2-x+2}$

(d) Parciális törtekre bontás

i. $\int \frac{14}{(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-4)}$

ii. $\int \frac{x^3-4}{5x^3-x}$

iii. $\int \frac{x^4}{(x-1)(x+2)}$

iv. $\int \frac{5}{x(x^2+4)}$

v. $\int \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2}$

vi. $\int \frac{2x^2}{x^4-1}$

53. Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása

(a) $\int \sin^7 x$

(b) $\int \cos^4 x$

(c) $\int \sin^3 x\cdot\cos^4 x$

(d) $\int \sin^4 x\cdot\cos^6 x$

(e) $\int \sin^2 2x\cdot\cos^3 x$

(f) $\int \cos^2 2x\cdot\cos 3x$

54. $t:=\tan\frac{x}{2}$ helyettesítés: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(a) $\int \frac{1}{\sin x}$

(b) $\int \frac{1}{\cos x}$

(c) $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$

(d) $\int \frac{1}{1+\cos x}$

Gyakorló feladatok

55. $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$

56. $\int \frac{5 \cdot \cos 2x}{\sin x + \cos x}$

57. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{7}{5 \cdot \sin^2 x}\right)$

58. $\int \left(x^{-2} + x^{-1} - 2 \cdot 3^{x-1}\right)$

59. $\int \frac{1}{\sqrt{6 + 6x^2}}$

60. $\int \frac{5}{4 - 4x^2}$

61. $\int \sin(4x + 5)$

62. $\int \sinh(2 - 7x)$

63. $\int \frac{5}{\cos^2(-6x + 4)}$

64. $\int \tan^2(2 - 3x)$

65. $\int \frac{1}{\sinh^2(1 - x)}$

66. $\int (3x^2 - \sin x)(x^3 + \cos x)$

67. $\int \frac{\ln x}{x}$

68. $\int \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{(\mathrm{e}^x + 2005)^{27}}$

69. $\int \frac{x}{1 + x^2}$

70. $\int \frac{100}{(x + 1) \cdot \ln(x + 1)}$

71. $\int \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \arctan x}$

72. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3}$

73. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$

74. $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x}$

75. $\int \frac{1}{\cos^4 x}$

76. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1 - 3x}} dx;$

77. $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 + x}$

78. $\int \frac{x}{4 + x^4}$

79. $\int \frac{x^3}{x^8 + 3}$

80. $\int x \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$

81. $\int (\arcsin x)^2$

82. $\int (\sin x) \ln (\tan x)$

83. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

84. $\int \frac{x}{\cos^2 x}$

85. $\int \frac{x^3}{(x - 1)^{100}}$

86. $\int \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

87. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

88. * $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x + 1)^2}$

89. * $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1}$

90. Számoljuk ki a Newton-Leibniz-tétel alkalmazása nélkül!

(a) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$;

(b) $\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx$.

91. Határozzuk meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}} \qquad (p>0)$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

92. Számítsuk ki!

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_2^8 \frac{5}{x}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\tan x\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_{0.1}^{0.5}\frac{1}{1-x^2}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_2^7\frac{1}{1-x^2}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^x\,dx$;

(h) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx$;

(i) $\displaystyle\int_{0.2}^{0.6}\arcsin x\,dx$;

(j) $\displaystyle\int_2^3\frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,dx$;

(k) $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\,dx$;

(l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,dx$;

(m) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,dx, \alpha=-\frac{1}{2},-1,-2.$

93. Mutassuk meg, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, $[c,d]\subset[a,b]$, akkor

$$\lim_{h\to 0}\int_c^d |f(x+h)-f(x)| = 0.$$

94. Bizonyítsuk be, hogy ha f konvex, akkor

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\int_a^b f\le(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

95. * Jelölje $B_{m,n} := \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}$. Mutassuk meg, hogy

$$B_{m+1,n}=\frac{m}{m+n}B_{m,n}$$

és ennek alapján

$$B_{m,n}=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

96. * Lássuk be teljes indukcióval, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2(n-k)-1} + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

97. Mutassuk meg, hogy ha f folytonos, akkor

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x).$$

98. (A) Ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

   (a) $D(F) := [-2, 2]$, $F(x) := \int_{-2}^{x} t^2 dt$.
   (b) $D(F) := [-2, 2]$, $F(x) := \int_{0}^{x} t^2 dt$.
   (c) $D(F) := [-2, 2]$, $F(x) := \int_{-2}^{x} \operatorname{sgn} t \, dt$.
   (d) $D(F) := [-2, 2]$, $F(x) := \int_{-2}^{x} e^t dt$.

99. Számoljuk ki

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} \, dt$$

értékét!

100. Számoljuk ki az alábbi improprius integrálokat!

   (a) (A)
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$$

   (b) (A)
$$\int_1^{+\infty} e^{-3x} dx$$

   (c) (A)
$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

   (d) (A)
$$\int_2^{+\infty} \frac{2dx}{1+x^2}$$

   (e)
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   (f) (A)
$$\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

   (g)
$$\int_0^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

   (h)
$$\int_0^{5} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

101. Igaz-e, hogy f improprius értelemben integrálható, ha

(a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$;

(b) $D(f) = (0, 1)$, $f(x) = \ln x$;

(c) $D(f) = [\frac{\pi}{2}, +\infty)$, $f(x) = \frac{\cos x}{x}$;

(d) $D(f) = [1, +\infty)$, $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$;

(e) $D(f) = [1, +\infty)$, $f(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$?

102. (A) A következő függvényeknél határozzuk meg a függvény grafikonja és az x tengely közötti területet!

(a) $D(f) = [0, 6]$, $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $D(f) = [1, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $D(f) = [0, \pi]$, $f(x) = \sin x$

(d) $D(f) = [0, 6]$, $f(x) = x^2$

103. (A) A következő függvényeknél határozzuk meg a függvény grafikonjának ívhosszát!

(a) $D(f) = [0, 3]$, $f(x) = \cosh x$

(b) $D(f) = [0, 5]$, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

(c) $D(f) = [0, 1]$, $f(x) = x^2$

104. (A) A következő függvények grafikonját megforgatva az x tengely körül, mekkora térfogatú forgástestet kapunk?

(a) $D(f) = [0, \pi]$, $f(x) = \sin x$

(b) $D(f) = [-1, 1]$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $D(f) = [0, 1]$, $f(x) = x^2$

(d) $D(f) = [1, 4]$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$