2. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

34. FELADAT MEGOLDÁSOK

Végezzük el az alábbi $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvények teljes vizsgálatát, majd készítsük el vázlatos grafikonját!

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3$

$D(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$4x^3 - 6x^2$
$f''(x) =$	$12x^2 - 12x$
határértékek:	$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$
monoton nő:	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
monoton fogy:	$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$
szélsőérték:	$x = \frac{3}{2}$ abszolút minimum
konvex:	$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
konkáv:	$(0, 1)$
inflexiós pontok:	$x = 0$, $x = 1$

(b) $f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}$

$D(f) =$	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$f'(x) =$	$\frac{-5x+10}{(x+2)^3}$
$f''(x) =$	$\frac{10x-40}{(x+2)^4}$
határértékek:	$\lim_{-2} f = -\infty, \lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$
monoton nő:	$(-2, 2)$
monoton fogy:	$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
szélsőérték:	$x = 2$ abszolút maximum
konvex:	$(4, +\infty)$
konkáv:	$(-\infty, -2) \cup (-2, 4)$
inflexiós pont:	$x = 4$

(c) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

$D(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$, $x \neq \pm 1$
$f''(x) =$	$\frac{-4x\operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x \neq \pm 1$
határértékek:	$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$
monoton nő:	$(-1, 1)$
monoton fogy:	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
szélsőértékek:	$x = -1$ abszolút minimum,
	$x = 1$ abszolút maximum
konvex:	$(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
konkáv:	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
inflexiós pont:	$x = 0$

(d) $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

$D(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$2x - 2x^3$
$f''(x) =$	$2 - 6x^2$
határértékek:	$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = -\infty$
monoton nő:	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
monoton fogy:	$(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
szélsőértékek:	$x = -1$, $x = 1$ abszolút maximumok,
	$x = 0$ lokális minimum
konvex:	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
konkáv:	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$
inflexiós pontok:	$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(e) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

$D(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$\frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
$f''(x) =$	$\frac{-4x^2-3x+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$
határértékek:	$\lim_{-\infty} f = -1$, $\lim_{+\infty} f = 1$
monoton nő:	$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
monoton fogy:	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$
szélsőérték:	$x = -\frac{1}{2}$ abszolút minimum
konvex:	$\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right)$
konkáv:	$\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty\right)$
inflexiós pontok:	$x = \frac{-3-\sqrt{41}}{8}$, $x = \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

(f) $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$

$D(f) =$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f'(x) =$	$\frac{x^4+4x^3}{(x+1)^4}$
$f''(x) =$	$\frac{12x^2}{(x+1)^5}$
határértékek:	$\lim_{-1-} f = -\infty$, $\lim_{-1+} f = +\infty$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$
monoton nő:	$(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$
monoton fogy:	$(-4, -1) \cup (-1, 0)$
szélsőértékek:	$x = -4$ lokális maximum, $x = 0$ lokális minimum
konvex:	$(-1, +\infty)$
konkáv:	$(-\infty, -1)$
inflexiós pont:	–

(g) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$

$D(f) =$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$
$f'(x) =$	$\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}$
$f''(x) =$	$\frac{16(1+x)^2(4+x)}{(1-x)^6}$
határértékek:	$\lim_{1} f = +\infty$, $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = 1$
monoton nő:	$(-1, 1)$
monoton fogy:	$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
szélsőérték:	$x = -1$ abszolút minimum
konvex:	$(-4, 1) \cup (1, +\infty)$
konkáv:	$(-\infty, -4)$
inflexiós pont:	$x = -4$

(h) $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$D(f) =$	$(0, +\infty)$
$f'(x) =$	$\frac{\sqrt{1+x}(2x-1)}{2x\sqrt{x}}$
$f''(x) =$	$\frac{6\sqrt{x}}{8x^3\sqrt{1+x}}$
határértékek:	$\lim_{0+} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$
monoton nő:	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
monoton fogy:	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
szélsőérték:	$x = \frac{1}{2}$ abszolút minimum
konvex:	$(0, +\infty)$
konkáv:	–
inflexiós pont:	–

(i) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$D(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f''(x) =$	$\frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
határértékek:	$\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$
monoton nő:	$(-\infty, +\infty)$
monoton fogy:	–
szélsőérték:	–
konvex:	$(-\infty, 0)$
konkáv:	$(0, +\infty)$
inflexiós pont:	$x = 0$

(j) $f(x) = (x+2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

$D(f) =$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f'(x) =$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
$f''(x) =$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right)$
határértékek:	$\lim_{-\infty} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$
	$\lim_{0-} f = 0$, $\lim_{0+} f = +\infty$
monoton nő:	$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
monoton fogy:	$(-1, 0) \cup (0, 2)$
szélsőértékek:	$x = -1$ lokális maximum,
	$x = 2$ lokális minumum
konvex:	$\left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty)$
konkáv:	$\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)$
inflexiós pont:	$x = -\frac{2}{5}$

(k) $f(x) = 2x - \tan x$

$D(f) =$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f'(x) =$	$2 - \frac{1}{\cos^2 x}$
$f''(x) =$	$-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$
határértékek:	$\lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi-} f = -\infty$, $\lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi+} f = +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$
monoton nő:	$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
monoton fogy:	$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
szélsőértékek:	$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ lokális minimum,
	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ lokális maximum
konvex:	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
konkáv:	$(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
inflexiós pont:	$k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(l) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;

$D(f) =$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f'(x) =$	$\frac{\mathrm{e}^x x}{(1+x)^2}$
$f''(x) =$	$\frac{\mathrm{e}^x\left(1+x^2\right)}{(1+x)^3}$
határértékek:	$\lim_{-\infty} f = 0$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$,
	$\lim_{-1-} f = -\infty$, $\lim_{-1+} f = +\infty$
monoton nő:	$(0, +\infty)$
monoton fogy:	$(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
szélsőérték:	$x = 0$ lokális minimum
konvex:	$(-1, +\infty)$
konkáv:	$(-\infty, -1)$
inflexiós pont:	–

(m) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

$D(f) =$	$(0, +\infty)$
$f'(x) =$	$\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}x}$
$f''(x) =$	$\frac{-8+3\ln x}{4\sqrt{x}x^2}$
határértékek:	$\lim_{0+} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = 0$
monoton nő:	$\left(0, \mathrm{e}^2\right)$
monoton fogy:	$\left(\mathrm{e}^2, +\infty\right)$
szélsőérték:	$x = \mathrm{e}^2$ abszolút maximum
konvex:	$\left(\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}, +\infty\right)$
konkáv:	$\left(0, \mathrm{e}^{\frac{8}{3}}\right)$
inflexiós pont:	$x = \mathrm{e}^{\frac{8}{3}}$

(n) $f(x) = x^x$;

$D(f) =$	$(0, +\infty)$
$f'(x) =$	$x^x(\ln x + 1)$
$f''(x) =$	$x^x(\ln x + 1)^2 + x^x\frac{1}{x}$
határértékek:	$\lim_{0+} f = 1$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$
monoton nő:	$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right)$
monoton fogy:	$\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$
szélsőérték:	$x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ abszolút minimum
konvex:	$(0, +\infty)$
konkáv:	–
inflexiós pont:	–

(o) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$;

$D(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$-2x\mathrm{e}^{-x^2}$
$f''(x) =$	$\mathrm{e}^{-x^2}\left(4x^2 - 2\right)$
határértékek:	$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = 0$
monoton nő:	$(-\infty, 0)$
monoton fogy:	$(0, +\infty)$
szélsőérték:	$x = 0$ abszolút maximum
konvex:	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
konkáv:	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
inflexiós pontok:	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(p) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

$D(f) =$	$\mathbb{R}$
$f'(x) =$	$\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
$f''(x) =$	$\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
határértékek:	$\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = 1$
monoton nő:	$(0, +\infty)$
monoton fogy:	$(-\infty, 0)$
szélsőérték:	$x = 0$ abszolút minimum
konvex:	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
konkáv:	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$
inflexiós pontok:	$x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$