HATVÁNYSOROK

BÁTKAI ANDRÁS

További ajánlott irodalom a vizsgára készüléshez:

- Urbán János: Határértékszámítás , Bolyai sorozat, Műszaki Kiadó *(Taylor sorok és hatványsorok, feladatgyűjtemény, de elmélet is kidolgozott feladatok formájában.)*
- Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei I., Typotex *(Hatványsorok, Taylor sorok, Riemann integrál. Klasszikus könyv sok példával.)*

A továbbiakban az úgynevett hatványsorok, azaz a $\sum(a_n x^n)$ alakú végtelen sorok tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Ehhez azonban szükségünk van a sorok szorzására, amivel ki kell egészítenünk az első félévben végtelen sorokról tanultakat.

0.1. Definíció. Legyenek $\sum(a_n)$ és $\sum(b_n)$ végtelen sorok. E két sor *Cauchy-szorzat*án azt a $\sum(c_n)$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Formálisan a Cauchy szorzatot úgy képzelhetjük el, mintha a végtelen sorok végtelen összegek lennének, és szorzásukkor minden tagot minden taggal megszorzunk.

0.2. Tétel. *Legyenek $\sum(a_n)$ konvergens és $\sum(b_n)$ abszolút konvergens végtelen sorok. Ekkor a Cauchy szorzatuk konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Bizonyítás. Ld. előadás. □

0.3. *Megjegyzés.* A bizonyításból könnyen látható, hogy ha a fentiekben azt tesszük fel, hogy mindkét sor abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens lesz. Sőt, bármilyen „permutáció szerint" előállított szorzatuk abszolút konvergens, és a szorzat összege megegyezik az összegek szorzatával.

1. Hatványsorok tulajdonságai

A továbbiakban az úgynevett hatványsorok, azaz a $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ alakú végtelen sorok tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Végtelen (numerikus) sorokhoz hasonlóan nem a hatványsor, hanem annak az összege az érdekes, így most nem is definiáljuk a hatványsort. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ függvény vizsgálatánál két fontos kérdést vizsgálunk.

- $D(f) =?$, azaz mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ konvergens?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az f függvény?

Az első kérdésre viszonylag gyorsan egy majdnem teljes választ tudunk adni.

1.1. Tétel (Cauchy-Hadamard)**.** *Legyen*

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$

$$\begin{array}{lll} \textit{Ha } |x-x_0| < r, & \textit{akkor } \sum(a_n(x-x_0)^n) & \textit{konvergens,} \\ \textit{ha } |x-x_0| > r, & \textit{akkor } \sum(a_n(x-x_0)^n) & \textit{divergens.} \end{array}$$

Az első esetben a konvergencia abszolút.

Date: 2008. május 7..

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és alkalmazzuk a $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ sorra a gyökkritériumot. Ezek szerint a sor abszolút konvergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Átrendezéssel kapjuk az első állítást.
Hasonlóan, a gyökkritérum divergenciafeltételét alkalmazva kapjuk, hogy a sor divergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

□

Az előző tételben szereplő r számot a hatványsor *konvergenciasugar*ának nevezzük.

1.2. *Megjegyzés.* Jaques Hadamard [1865–1963] francia matematikus. A komplex függvénytan, a differenciálegyenletek és a funkcionálanalízis területén alkotott jelentőset hosszú élete során.

Az első félévben tanultak alapján rögtön megfogalmazhatjuk a következő állítást a konvergenciasugárra.

1.3. Következmény. *Amennyiben létezik*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

akkor

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Összefoglalva az előző állítást, egy hatványsor mindig egy szimmetrikus, x_0 középpontú intervallumon konvergens. Az intervallum belső pontjaiban abszolút konvergens, a végpontokbeli konvergenciát pedig külön meg kell vizsgálni. Ezek alapján szokás azt mondani, hogy $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ egy x_0 középpontú hatványsor. Mivel az intervallum végpontjaiban gondjaink lehetnek, a tárgyalás leegyszerűsítése végett a következőkben sokáig csak az intervallum belsejére korlátozzuk vizsgálódásainkat.

1.4. Definíció. A $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ hatványsor *konvergenciahalmaz*a a

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \sum(a_n(x-x_0)^n) \text{ konvergens} \right\}$$

intervallum, *összegfüggvény*e az

$$D(f) := \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r) \qquad (r \neq 0)$$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

függvény.

A továbbiakban a hatványsor összegfüggvényének tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Ehhez alapvető lesz a következő, úgynevezett transzformációs tétel.

1.5. Tétel. *Legyen $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ egy pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor, azaz $r > 0$, és legyen $x_1 \in \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r)$ tetszőleges. Ekkor minden $x \in \operatorname{int} K$ pontra, melyre $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$, teljesül, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-x_1)^i,$$

ahol

$$b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n (x_1 - x_0)^{n-i}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás kiindulási pontja az a mély állítás, hogy

$$x - x_0 = (x - x_1) + (x_1 - x_0),$$

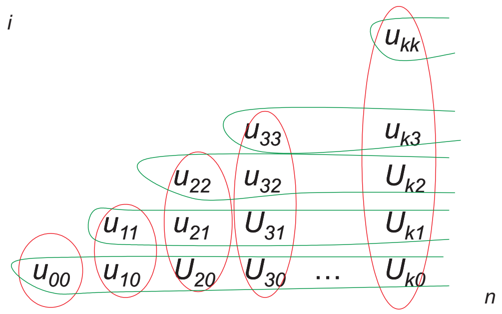
amiből a binomiális tétel szerint

$$(x - x_0)^n = [(x - x_1) + (x_1 - x_0)]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}.$$

Ezt beírva a hatványsorba, mely a feltétel szerint konvergens, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni}.$$

Ez egy abszolút konvergens sor, melyben, az alábbi ábra jelöléseit használva, az elemeket függőleges (piros) oszloponként adjuk össze. Mivel abszolút konvergens sor átrendezhető, ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a sort vízszintes (zöld) soronként összegezzük.



Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_1)^i.$$

□

A végtelen sorokkal végezhető műveletek alapján azonnal adódik a következő állítás.

1.6. Állítás. *Legyen $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ és $\sum(b_n(x - x_0)^n)$ két, $r_1 > 0$ és $r_2 > 0$ konvergenciasugárral rendelkező hatványsor. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n,$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n)(x - x_0)^n$$

minden olyan x számra, melyre $|x - x_0| < \min\{r_1, r_2\}$.

Tehát az adott intervallumon hatványsorként felírható függvények gyűrűt alkotnak. A továbbiakban vizsgáljuk a hatványsor összegfüggvényének legfontosabb analitikus tulajdonságait.

1.7. Tétel. *Hatványsor összegfüggvénye folytonos.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy a $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ hatványsor összegfüggvényét az $(x_0 - r, x_0 + r)$ nyílt intervallumon definiáltuk ha $r > 0$. Az állítást is csak ebben az esetben kell bizonyítani, hiszen az egy pontban értelmezett függvény mindig folytonos.

Legyen $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$ tetszőleges. Belátjuk, hogy f folytonos az x_1 pontban. Az előző transzformációs tétel szerint f függvény az x_1 pontnak elegendően kis δ sugarú környezetében felírható x_1 középpontú hatványsorként mint

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_1)^i.$$

Tehát annyit kell belátnunk, hogy

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = b_0 (= f(x_1)).$$

Ehhez legyen $0 < \rho < \delta$, akkor a feltételek szerint $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \rho^i$ konvergens. Jelölje

$$\sigma := \sum_{i=1}^{\infty} b_i \rho^{i-1}.$$

Ekkor ha $|x - x_1| < \rho$, akkor

$$|f(x) - b_0| = \left| (x - x_1) \sum_{i=1}^{\infty} b_i (x - x_1)^{i-1} \right| \leq |x - x_1| \sigma,$$

amiből az x_1 pontbeli folytonosság már azonnal következik.[1]

□

1.8. Tétel. *A pozitív konvergenciasugarú $\sum(a_n (x - x_0)^n)$ hatványsor összegfüggvénye tetszőlegesen sokszor differenciálható és*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2},$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}.$$

Bizonyítás. Legyen $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Az előző bizonyítás gondolatmenetét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)^2 + \ldots \to b_1, \qquad \text{ha } x \to x_1,$$

hiszen az előző tétel szerint minden hatványsor összegfüggvénye folytonos. A transzformációs tétel szerint

$$f'(x_1) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} a_n (x_1 - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Mivel f deriváltfüggvénye szintén hatványsor, ezért f' is deriválható. A k-adik deriváltra vonatkozó állítás teljes indukcióval látható be. □

1.9. Következmény. *Minden hatványsor az összegfüggvényének Taylor-sora.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\ldots 1 a_k,$$

azaz

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

valamint $f(x_0) = a_0$. □

Ezek az állítások lehetőséget adnak arra, hogy megfordítsuk a differenciálás műveletét.

1.10. Definíció. Legyen f valós-valós függvény, $D(f) = I$ intervallum. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény a f függvény *primitív függvénye*, ha F differenciálható és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

[1] Sőt, az $(x_1 - \rho, x_1 + \rho)$ intervallumon a Lipschitz folytonosság is.

1.11. Tétel. *Legyen $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ pozitív konvergenciasugarú hatványsor. Ekkor a hatványsor összegfüggvényének van primitív függvénye, pl.*

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az állítás a hatványsorok összegfüggvényének differenciálására vonatkozó tételből azonnal következik. □

Fontos, hogy hatványsor összegfüggvényét az együtthatók egyértelműen meghatározzák.

1.12. Tétel. *Legyenek*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

olyan hatványsorok, melyeknek közös (x_0-r,x_0+r) konvergenciaintervalluma van. Legyen továbbá $(x_n)\subset(x_0-r,x_0+r)$ olyan sorozat, melyhez található $y\in(x_0-r,x_0+r)$, hogy $x_n\neq y$, $x_n\to y$ és melyre $f(x_n)=g(x_n)$.
Ekkor $a_n=b_n$ minden $n\in\mathbb{N}$ indexre.

Bizonyítás. A transzformációs tétel szerint elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $y=x_0$. Teljes indukcióval végezzük a bizonyítást. Mivel a hatványsor összegfüggvénye folytonos, ezért

$$a_0=f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x_0)=b_0.$$

Tegyük fel, hogy egy $n\in\mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, …, $a_n=b_n$. Ekkor a

$$f_1(x):=a_{n+1}+a_{n+2}(x-x_0)+a_{n+3}(x-x_0)^2+\dots$$
$$g_1(x):=b_{n+1}+b_{n+2}(x-x_0)+b_{n+3}(x-x_0)^2+\dots$$

hatványsorok konvergenciahalmaza ugyanaz a K intervallum, és minden $x\neq x_0$ esetén

$$f_1(x)=\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} \text{ és } g_1(x)=\frac{g(x)-\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

A feltételek szerint $f_1(x_i)=g_1(x_i)$ minden $i\in\mathbb{N}$ esetén. Mivel f_1 és g_1 is hatványsor összegfüggvénye, ezért folytonosak. Ebből viszont, az $n=0$ esetre vonatkozó gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$a_{n+1}=f_1(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_1(x_n)=\lim_{n\to\infty}g_1(x_n)=g_1(x_0)=b_{n+1}.$$

□

1.13. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $D(f)=I$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az f függvény *analitikus*, ha található $x_0\in I$, $(a_n)\subset\mathbb{R}$, hogy $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ minden $x\in I$ esetén. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan analitikus*, ha minden $x\in I$ ponthoz található olyan környezete, melyre megszorítva f analitikus.

Megjegyezzük, hogy a könyvek nem egységesek a szóhasználat tekintetében, van, ahol azt is analitikusnak hívják amit mi lokálisan analitikusnak. Tehát az exponenciális- a szinusz- és a logaritmusfüggvény példa lehet analitikus függvényre, a logaritmusfüggvény lokálisan analitikus de nem analitikus függvényre és az $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0)=0$ végtelen sokszor differenciálható de a 0 pontban nem (lokálisan) analitikus függvényre (ld. gyakorlat vagy Urbán: Határértékszámítás).
Tehát az új szóhasználattal az előző tétel azt mondja ki, hogy két különböző, ugyanazon az intervallumon értelmezett lokálisan analitikus függvény legfeljebb megszámlálhatóan sok helyen veheti fel ugyanazt a függvényértéket, és ezek a pontok nem torlódhatnak az intervallum belsejében.
Példa lehet analitikus függvényekre, melyek végtelen sokszor veszik fel ugyanazt a függvényértéket a szinusz- és a koszinuszfüggvény.[2]
A hatványsor összegfüggvényének a tulajdonságait a hatványsorok oszthatóságának kérdésével zárjuk. Mivel szorozni már tudunk, csak a reciprok kérdésével kell foglalkoznunk.

[2]Fontos, hogy itt viszont tényleg nem torlódnak a közös függvényértékhelyek csak a végtelenekben.

1.14. Tétel. *Legyen* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $r > 0$, $a_0 \neq 0$. *Ekkor található olyan* $\delta > 0$ *és* $(c_n) \subset \mathbb{R}$, *hogy*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *esetén.*

Bizonyítás. Feltehető az egyszerűség kedvéért, hogy $x_0 = 0$ és $a_0 = 1$. A $\sum(|a_n| \cdot |x|^n)$ sor összegfüggvényének 0 helyen vett folytonossága miatt található $\delta > 0$, hogy

$$1 + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x^2| + \ldots < 2,$$

vagyis

$$|a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x^2| + \ldots < 1,$$

minden $|x| < \delta$ esetén.
Ekkor

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1 - (-a_1x - a_2x^2 - \ldots)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)^n.$$

A Cauchy szorzatra vonatkozó tétel szerint (n-szeri alkalmazással) találhatók olyan a_{nk} együtthatók, hogy

$$(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k.$$

Ezeket az együtthatókat akár ki is számolhatnánk, de fölösleges, hiszen a bizonyítás további menetéhez elegendő a létezésükről tudnunk. Tehát

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k\right)$$

ha $|x| < \delta$. Ismét használva az abszolút konvergens sorok átrendezhetőségére vonatkozó tételt, amit már a transzformációs tételnél is használtunk, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$

ha $|x| < \delta$. □

Tehát, az eddigieket összefoglalva, az x_0 középpontú pozitív konvergenciasugarú hatványsorok egy *kommutatív gyűrűt* alkotnak, melyben az invertálható elemek azok a hatványsorok, melyek első együtthatójára $a_0 \neq 0$. Megjegyzendő, hogy ezek a hatványsorok egy *kommutatív algebrát* is alkotnak.

1.15. *Megjegyzés.* Mutatunk egy eljárást arra, hogyan lehet két hatványsor hányadosának együtthatóit kiszámolni. Az eljárás lényegében a polinomok osztásánál tanultakkal azonos.
Legyen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \quad r > 0,\ g(0) = b_0 \neq 0.$$

Mivel elegendően kicsi x esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n,$$

ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_0c_n + b_1c_{n-1} + \ldots + b_nc_0)x^n.$$

Tehát

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0 \\ a_1 &= b_0c_1 + b_1c_0 \\ a_2 &= b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ebből a végtelen sok egyenletből igény és időnk szerint tetszőlegesen sok c_k együtthatót meghatározhatunk, pl.

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0} \\ c_1 &= \frac{a_0 - \frac{a_0b_1}{b_0}}{b_0} \\ &\dots \end{aligned}$$

Ezt az eljárást kicsit hosszabban folytatva kaphatjuk például, hogy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots} = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \dots,$$

ahol is

$$c_1 = 1, \qquad c_3 = \frac{1}{3}, \qquad c_5 = \frac{2}{15}.$$

Végül fejezzük be vizsgálódásainkat annak a kérdésnek a (részleges) tisztázásával, hogy amennyiben a konvergenciaintervallum valamely végpontjában is konvergens egy hatványsor, az itt kapott sorösszegnek mi köze van a hatványsor összegfüggvényéhez, mely az intervallum belsejében volt definiálva. A következő tétel mutatja, hogy ilyenkor az összegfügvény folytonosan kiterjeszthető a végpontra.
Egyszerűség kedvéért a tételt 0 középpontú hatványsor konvergenciaintervallumának jobb végpontjára fogalmazzuk meg, de ennek nincs jelentősége a bizonyítás szempontjából, a bal végpont vagy a nem zérus középpont esete hasonlóan tárgyalható.

1.16. Tétel (Abel)**.** *Legyen $\sum(a_nx^n)$ egy pozitív konvergenciasugarú hatványsor, $0 < r < \infty$, valamint legyen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nr^n < \infty,$$

azaz konvergens. Ekkor az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

összegfüggvény folytonosan kiterjed az $x = r$ pontra, azaz

$$\lim_{x\to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nr^n.$$

Bizonyítás. További egyszerűsítések kedvéért feltesszük, hogy $r = 1$. Ez a bizonyítás menetén nem változtat, csak jelöléseinket egyszerűsíti és teszi áttekinthetővé.
Legyen

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Ekkor a Cauchy szorzatnál felírtak szerint, ha $|x| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_nx^n,$$

így

$$s - f(x) = s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left((1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)x^n.$$

Így

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |s-s_n|\cdot|x|^n.$$

Mivel az $s_n \to s$, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz található $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \ge N$ természetes számra $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így $x \in (0,1)$ esetén

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s-s_n|\cdot x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \le (1-x)\sum_{n=0}^{N}|s-s_n| + \frac{\varepsilon}{2},$$

hiszen $|x| < 1$.
Mivel N-et lerögzítettük, ezért $\varepsilon > 0$ számhoz található $\delta > 0$, hogy ha $x \in (1-\delta, 1)$, akkor

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N}|s-s_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

azaz ha $x \in (1-\delta,1)$, akkor

$$|s - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami viszont pont a bizonyítandó állítás. □

1.17. *Megjegyzés.* Niels Henrik Abel [1802-1829] norvég matematikus. A XIX század egyik legjelentősebb hatású elméje. Az algebra megalapozásában és a komplex függvénytanban alkotott jelentőset.

1.18. *Példa.* Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

hatványsort. Láttuk, hogy ez a $(-1,1)$ nyílt intervallumon az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényt állítja elő. Ez a függvény értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, amint azt korábban már láttuk. A fenti hatványsor az $x = 1$ helyen konvergens, hiszen Leibniz típusú. Abel tétel szerint tehát a hatványsor összegfüggvénye folytonosan kiterjed az $x = 1$ pontra és ott a függvényérték a megfelelő sorösszeg, azaz

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Ezt egyébként a Lagrange-féle maradéktag segítségével a félév első felében már beláttuk.

1.19. *Példa.* Az előző gondolatmenethez hasonlóan kapjuk az

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

előállításból, hogy

$$\operatorname{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1},$$

azaz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

További példák találhatók a honlapon Haványsorok – példák címszó alatt.

2. Trigonometrikus függvények

Korábbi tanulmányaink során hosszabban tárgyaltuk a trigonometrikus függvények alaptulajdonságait, melyeket a következőkben foglalhatunk össze.
Geometriai megfogalmazás alapján, intuitív módon definiáltuk a szinusz- és a koszinuszfüggvényt és lényegében a következő tulajdonságokban állapodtunk meg.

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Megemlítünk a múlt félévben és az ebben a félévben tanult legfontosabb következményekből néhányat.

- sin és cos tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények,
- legfeljebb egy ilyen tulajdonságú függvénypár létezhet,
- $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Evvel a tárgyalásmóddal van egy nagy probléma. Bár a trigonometrikus függvények intuitív geometriai bevezetése rendkívül szemléletes, így valahányszor ezekről a függvényekről beszélünk, a geometriai jelentéssel képzeljük őket magunk elé, ez a felépítés hagy logikai kívánnivalót maga után. Gondoljunk csak arra, hogy a definícióhoz szükségünk van olyan fogalmakra, mint az ívhossz vagy a szög nagysága. Tehát a trigonometrikus függvények tulajdonságaival nincs igazán probléma, a gond a definíciójuk, a létezés.
Most szeretnénk bemutatni egy lehetőséget arra, hogyan lehet azt a logikai csorbát kiköszörülni és a bonyolult geometriai fogalmakat kiküszöbölni. A cél nem az, hogy egy újfajta bevezetési lehetőséget mutassunk a trigonometrikus függvényekre, hanem hogy jól ismert fogalmakat az analízis logikai épületében a helyére tegyünk. A gondolatmenet igen jellemző a mai matematika egészére.
Megismertük intuitív módon a trigonometrikus függvényeket, azok alaptulajdonságait és az alaptulajdonságok fontosabb következményeit, igy a hatványsor-előállításukat. Ezeket a hatványsorokat viszont bonyolult geometriai fogalmak bevezetése nélkül is fel lehet írni, tulajdonságaikat lehet vizsgálni. Ez adhatja az ötletet arra, hogy megfordítsuk a gondolatmenetet és a hatványsor alakot használjuk a trigonometrikus függvények definíciójára. Tehát **legyen**

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

és legyen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A hatványsorokról tanultak alapján azonnal következnek a következő tulajdonságok:

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- sin és cos tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = 1$,
- $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Az addíciós képletek beláthatók például a Cauchy szorzat segítségével (ld. honlap: Sorok Cauchy-szorzata), vagy a differenciálási szabályok alkalmazásával a következő módon.
Legyen rögzített de tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ mellett

$$f(x) = [\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + [\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2 .$$

Kiszámolható, hogy $f(0) = 0$ és $f'(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így $f \equiv 0$.
Ezzel beláttuk, hogy a hatványsorral definiált sin és cos függvények teljesítenek minden fontos alaptulajdonságot, amit a trigonometrikus függvényektől elvártunk. Mivel már beláttuk, hogy legfeljebb egy ilyen függvénypár létezhet, ezért ők azok.
Természetesen mivel nem használtunk logikailag bonyolult, de szemléletes geometriai fogalmakat, így a definiált függvények sem túl szemléletesek.

2.1. *Példa.* További fontos példa hatványsorra az ún. *binomiális sor.* Erről ld. a honlapon a Binomiális sor címszót.

3. Komplex hatványsorok

Ez a pont tűnik a legmegfelelőbbnek arra, hogy rávilágítsunk arra, hogy nagyon sok minden abból, amit eddig analízisből tanultunk, átvihető a komplex számok körébe. Ehhez tisztáznunk kell sok mindent az alapfogalmakkal kapcsolatban.
Algebra előadáson a komplex számokról minden lényeges szerepelt, így egy komplex szám abszolútértéke is. Ez lehetővé eszi, hogy egy számsorozat konvergenciáját a valóshoz analóg módon definiáljuk.

3.1. Definíció. Legyen $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$ komplex számokból álló sorozat és $z = a + bi \in \mathbb{C}$ komplex szám. Azt mondjuk, hogy a (z_n) sorozat tart a z számhoz, vagy a (z_n) sorozat határértéke a z szám, ha minden $\varepsilon > 0$ pozitív számhoz található $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ természetes szám esetén $|z_n - z| < \varepsilon$.

3.2. Állítás. *Pontosan akkor teljesül, hogy $z_n \to z$, ha*

- *a $(|z_n - z|)$ valós számsorozatra $|z_n - z| \to 0$ teljesül.*
- *az (a_n) és (b_n) valós számsorozatokra $a_n \to a$, $b_n \to b$.*

Bizonyítás. Az első átfogalmazás triviális, a második pedig abból következik, hogy

$$|z_n - z|^2 = |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2.$$

□

Ezeknek az átfogalmazásoknak nagy jelentősége, hogy komplex sorozatok konvergenciáját valós sorozatok konvergenciájával fogalmazza meg, így visszavezethetők erre az állítások. A sorozatok konvergenciájával kapcsolatban majdnem minden tétel újrafogalmazható és szó szerint ugyanúgy bizonyítható, mint a valós esetben. Lássunk néhány példát.

3.3. Állítás. *Legyen $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$, $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $w_n = c_n + d_n i \in \mathbb{C}$, $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ha $z_n \to z$ és $w_n \to w$, akkor*

- $$(z_n \pm w_n) \to z \pm w,$$
- $$(z_n \cdot w_n) \to zw,$$
- *Ha $w_n \neq 0$, $w \neq 0$, akkor*
$$\left(\frac{z_n}{w_n}\right) \to \frac{z}{w},$$
- $$(|z_n|) \to |z|.$$

Bizonyítás. Csak a szorzásra vonatkozó állítást bizonyítjuk, hogy lássuk a gondolatmenetet. Azt viszont kétféleképpen.
A valós esetet imitálva írhatjuk, hogy

$$|z_n w_n - zw| = |z_n(w_n - w) + (z_n - z)w| \le |z_n| \cdot |w_n - w| + |z_n - z| \cdot |w| \to 0$$

a feltételek szerint.
A másik gondolatmenetet alkalmazva kapjuk, hogy

$$z_n w_n = (a_n c_n - b_n d_n) + i(a_n d_n + b_n c_n) \to (ac - bd) + i(ad + bc) = zw,$$

hiszen valós számsorozatokra már tudjuk a műveleti azonosságokat. □

Fontos kiemelni, hogy az egyetlen probléma a rendezésnél és az evvel kapcsolatos tételeknél jelentkezik. A komplex számok testét ugyanis nem tudjuk „értelmesen", azaz a műveleti azonosságok megtartásával rendezni. Így nincs értelme szuprémumról vagy infimumról sem beszélni. Ennek ellenére a Bolzano-Weierstraß tétel, amit annak idején rendezési fogalmak segítségével bizonyítottunk, érvényben marad.

3.4. Tétel (Bolzano-Weierstraß)**.** *Legyen $(z_n) \subset \mathbb{C}$ egy korlátos sorozat. Ekkor található olyan n_k indexsorozat, hogy z_{n_k} konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $z_n = a_n + ib_n$. Az (a_n) valós sorozat korlátos, így a Bolzano-Weierstraß tétel tanult változata szerint található olyan $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ indexsorozat, hogy (a_{n_l}) konvergens.
A (b_{n_l}) valós számsorozat is korlátos, így a Bolzano-Weierstraß tétel ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy található olyan $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ indexsorozat, hogy $(b_{n_{l_k}})$ sorozat konvergens. Mivel részsorozat részsorozata is részsorozat és konvergens sorozat részsorozata is konvergens, kapjuk, hogy

$$z_{n_{l_k}} = a_{n_{l_k}} + ib_{n_{l_k}}$$

konvergens részsorozat. □

Megjegyezzük, hogy végtelen sorokkal kapcsolatban minden, amit tanultunk, érvényben marad. Az abszolút konvergencia segítségével itt is sok konvergenciatételt pozitív tagú sorokra lehet visszavezetni.
A folytatásban megfogalmazzuk a legfontosabb ponthalmazelméleti alapfogalmakat. Az egyetlen különbség a valós esethez képest, hogy az ε sugarú szimetrikus intervallum szerepét az ε sugarú nyílt körlap veszi át.

3.5. Definíció. Jelölje

$$B(w, r) := \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - w| < r\}$$

a $w \in \mathbb{C}$ pont $r > 0$ sugarú környezetét. Ez egy w középpontú, r sugarú nyílt körlap a komplex számsíkon. Legyen $D \subset \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$. Azt mondjuk, hogy a w pont a D halmaznak

- belső pontja, ha található olyan $r > 0$, hogy $B(w, r) \subset D$,
- külső pontja, ha található olyan $r > 0$, hogy $B(w, r) \subset \mathbb{C} \setminus D$,
- határpontja, ha minden $r > 0$ esetén $B(w, r) \cap D \neq \emptyset$, $B(w, r) \cap (\mathbb{C} \setminus D) \neq \emptyset$.

Azt mondjuk, hogy D nyílt, ha minden pontja belső pont, és D zárt, ha a komplementuma nyílt. A $D \subset \mathbb{C}$ halmaz kompakt, ha minden $z_n \in D$ sorozathoz található n_k indexsorozat és $z \in D$, hogy $z_{n_k} \to z$.

Rögtön látszik a definícióból, hogy zárt halmaz az, amely tartalmazza összes határpontját. A múlt félévben bizonyítottakhoz teljesen azonos módon látható, hogy egy D halmaz pontosan akkor zárt, ha nem lehet belőle kikonvergálni, azaz ha $z_n \in D$, $z_n \to z$, akkor $z \in D$. Bolzano-Weiarstraß tételből egyenesen következik, hogy a komplex számsíkon is pontosan a korlátos és zárt halmazok a kompakt halmazok. Az eddigiekhez hasonlóan $\operatorname{int} D$ jelöli a D halmaz belső pontjaink halmazát, D' a D halmaz torlódási pontjait.
Az állítások megfogalmazása érdekében bevezetünk egy új jelölést. Mint láttuk eddig, és későbbi tanulmányaink során is látni fogjuk, nagyon sok tételnél lényegtelen a tétel kimondása és bizonyítása szempontjából, hogy a valós vagy a komplex számok testében dolgozunk. Ilyenkor az egységes jelölésmód kedvéért használni fogjuk a $\mathbb{K}$ szimbólumot, ami azt jelenti, hogy tetszés szerint $\mathbb{R}$ is és $\mathbb{C}$ is írható helyette.

3.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$, azaz $D(f) \subset \mathbb{C}$, $R(f) \subset \mathbb{R}$ vagy $R(f) \subset \mathbb{C}$.

- Azt mondjuk, hogy f folytonos a $z_0 \in D(f)$ pontban, ha bármely $(z_n) \subset D(f)$ sorozatra, melyre $z_n \to z_0$, teljesül, hogy $f(z_n) \to f(z_0)$.
- Azt mondjuk, hogy f határértéke a $z_0 \in D(f)'$ pontban a w szám, ha bármely $(z_n) \subset D(f)$ sorozatra, melyre $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$ teljesül, hogy $f(z_n) \to w$.
- Azt mondjuk, hogy f differenciálható a $z_0 \in \operatorname{int} D$ pontban, ha létezik
$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Természetesen a folytonosság és a határérték ekvivalens módon átfogalmazható ε-δ nyelven is. A folytonosság, határérték és differenciálhányados megszokott műveleti azonosságai érvényben maradnak a sorozathatárértékekre vonatkozó tulajdonságok miatt.
Ez az a pont, ahol meg kell említenünk, hogy a hatványsorokkal kapcsolatban minden tétel, amit tanultunk, érvényben marad. Legyen $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ és
$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

- Legyen
$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$
Ha $|z - z_0| < r$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ abszolút konvergens, ha $|z - z_0| > r$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ divergens.
- Ha $D(f) = B(z_0, r)$, akkor f folytonos és tetszőlegesen sokszor differenciálható, deriváltjai a tanult módon számíthatók ki.
- Érvényes az Abel tétel is, azaz ha $|z_1 - z_0| = r$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergens, akkor f folytonosan terjed ki a z_1 pontra és $f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$.

Az egyetlen technikai nehézség, hogy a z_0 pont r sugarú környezetének határa már nem csak két pontból áll. Itt kell megemlíteni, hogy a hatványsorok lehetőséget adnak arra, hogy néhány jól ismert függvény definícióját kiterjesszük a komplex számok körében.
A legegyszerűbb példával kezdjük. Világos, hogy ha $|z| < 1$, akkor
$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$
Ennek analógiájára mondhatjuk, hogy **legyen**
$$\exp z = \mathrm{e}^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$
$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$
Ez természetesen különösebb szemléletes tartalom nélkül annak a filozófiának a továbbgörgetése, hogy a trigonometrikus (és az exponenciális) függvényt definiálhatjuk hatványsorával.
Lássuk néhány következményét annak, ha bevezetjük ezeket a definíciókat.

- sin, cos és exp mindenhol definiált, tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények, melyekre $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
- Az addíciós azonosságok érvényben maradnak (lásd Cauchy szorzatos bizonyítások, Károlyi Katalin anyaga), azaz
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z+w} &= \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

- $$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad\qquad z \in \mathbb{C},$$
  és speciálisan $e^{i\pi} = -1$.
- exp periodikus függvény lesz $2\pi i$ (komplex!) periódussal, hiszen
  $$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, akkor a múlt félévben tanult fogalmak és tételek közül csak igen keveset hasznosíthatunk, hiszen nincs rendezés, így se monotonitásról, se szélsőértékről, se középértéktételekről nem beszélhetünk. Ha viszont $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, akkor, bár monotonitásról szintén nem lehet szó, de legalább szélsőértékekről beszélhetünk.

3.7. Tétel (Weierstraß)**.** *Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ és legyen $D(f)$ kompakt. Ekkor f felveszi minimumát és maximumát.*

A bizonyítás szóról szóra megegyezik a múlt félévben szereplővel. Komplex változójú függvényekkel kapcsolatos fejtegetéseinket egy kiruccanással zárjuk az algebra területére.

3.8. Tétel (Az algebra alaptétele)**.** *Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van zérushelye.*

Bizonyítás. Legyen
$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad a_k \in \mathbb{C},\, a_n \neq 0.$$
Mivel $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény, vizsgáljuk helyette a $|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvényt, aminek lehet a szélsőértékeiről beszélni.
Jelölje
$$\mu := \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)| \geq 0.$$
Mivel
$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n \right| = \infty,$$
(végtelenhez tartó szorozva egy korlátossal), ezért található $r > 0$, hogy $|p(z)| > \mu$ ha $|z| > r$. Tehát
$$\mu = \inf_{|z|\leq r} |p(z)| \geq 0.$$
Mivel
$$K := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r\}$$
kompakt halmaz, hiszen korlátos és zárt, található olyan $z_0 \in K$, hogy $\mu = |p(z_0)|$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mu = 0$.
Indirekt, tegyük fel, hogy $\mu > 0$ és legyen
$$q(z) := \frac{p(z + z_0)}{p(z_0)}.$$
A feltételek szerint $q(0) = 1$, q egy n-ed fokú polinom és $|q(z)| \geq 1$. Tehát a q polinom bevezetésével a $\mu > 0$ számot 1-re változtattuk. Ezek alapján írhatjuk, hogy a q polinom
$$q(z) = 1 + b_m z^m + \ldots b_n z^n$$
alakú, ahol $b_m \neq 0$ az első ilyen tulajdonságú együttható. Ilyen van, hiszen $b_n \neq 0$, tehát $1 \leq m \leq n$.
Megmutatjuk, hogy található olyan z szám, melyre $|q(z)| < 1$, ami ellentmondás. Ezt a z számot trigonometrikus alakjában keressük, azaz $z = \rho e^{i\psi}$ alakban.
Mivel $\left|\frac{-|b_m|}{b_m}\right| = 1$, ezért található olyan $\varphi \in \mathbb{R}$, hogy
$$\frac{-|b_m|}{b_m} = \cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}.$$
Jelölje továbbá
$$\psi := \frac{\varphi}{m},$$
ekkor
$$b_m e^{im\psi} = -|b_m|.$$

Legyen

$$z := \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad (\rho > 0).$$

Célunk most a ρ szám ügyes megválasztása, hogy ellentmondásra jussunk.
Ekkor

$$b_m z^m = \rho^m b_m e^{im\psi} = -\rho^m |b_m|.$$

Ezért

$$|q(z)| = \left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| \leq |1 - |b_m|\rho^m| + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \ldots + |b_n|\rho^n,$$

ahol az első két tag kívételével a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmaztuk. Ha $0 < \rho^m < \frac{1}{|b_m|}$, akkor $1 - |b_m|\rho^m > 0$, így az első abszolútértékjel elhagyható. Tehát ilyenkor

$$\left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| \leq 1 - |b_m|\rho^m + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \ldots + |b_n|\rho^n = 1 - \rho^m\left(|b_m| - |b_{m+1}|\rho - \ldots - |b_n|\rho^{n-m}\right).$$

Mivel $|b_m| > 0$ és polinomfüggvények folytonosak, ezért ha ρ „elég kicsi”, a zárójelben pozitív szám áll. Egy ilyen ρ számra tehát

$$\left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| < 1,$$

ami ellentmondás. □

Tárgymutató