INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

SIKOLYA ESZTER

1. Primitív függvény

Legyen I tetszőleges intervallum (korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt stb.). Jelölje $C(I)$ az I intervallumon értelmezett folytonos függvények halmazát és $D(I)$ az I intervallumon differenciálható függvények halmazát. Ezek $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. Jelölje $D'(I)$ az $D(I)$-beli függvények deriváltjainak halmazát:

$$D'(I) := \{F' : F \in D(I)\}.$$

1.1. Állítás. *$D'(I)$ is vektortér.*

Bizonyítás. Házi feladat. □

1.2. *Megjegyzés.* $C(I)$ és $D(I)$ nem csak vektortér, hanem gyűrű, sőt algebra is (a szokásos műveletekkel). $D'(I)$ nem alkot sem gyűrűt sem algebrát.

1.3. Definíció. Legyen $f \in D'(I)$ adott függvény, azaz létezik olyan $F \in D(I)$, hogy $F' = f$. Ekkor minden ilyen $F \in D(I)$ függvényt az f függvény *primitív* (elsődleges vagy eredeti) *függvényé*nek vagy *határozatlan integrálljá*nak nevezünk.

1.4. Állítás. *Ha $f \in D'(I)$ és $F \in D(I)$ egy primitív függvénye, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén $(F+c)' = f$, így f-nek végtelen sok primitív függvénye van.*

Bizonyítás. Triviális. □

1.5. Állítás. *Ha F az f egy primitív függvénye, akkor f-nek minden más G primitív függvénye előáll $G = F + c$ alakban valamely $c \in \mathbb{R}$-re.*

Bizonyítás. Az állítás feltételeiből következik, hogy

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0,$$

vagyis $(F-G)' = 0$ az egész I intervallumon. Legyenek $x_1, x_2 \in [a, b]$ tetszőleges pontok. A Lagrange-középértéktétel feltételei nyilván teljesülnek az $[x_1, x_2]$ intervallumon $F-G$-re, tehát létezik olyan $c \in (x_1, x_2)$, melyre

$$(F-G)'(c) = 0 = \frac{(F-G)(x_2) - (F-G)(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ebből $(F-G)(x_1) = (F-G)(x_2)$. Mivel x_1 és x_2 tetszőleges volt, az állítást beláttuk. □

1.6. Definíció. Adott f függvény esetén jelölje

$$\int f$$

Date: 2009. február 27..

(„integrál" f) az f függvény primitív függvényeinek halmazát I-n. Ha $f \notin D'(I)$, akkor $\int f = \emptyset$. Ha $f \in D'(I)$, akkor láttuk, hogy $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$. Ha nem okoz félreértést, akkor $\int f$ minden elemét is az egyszerűség kedvéért $\int f$-fel jelöljük, tehát

$$\left(\int f\right)' = f.$$

Szokásosak még az $\int f(x)$ és $\int f(x)\,dx$ jelölések is a primitív függvény x pontbeli helyettesítési értékére.

1.7. Példa. Legyen $I = \mathbb{R}$. Ekkor $\int \cos x\,dx = \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Alapintegrálok: ld. gyakorlatokon.

Probléma. Hogyan lehet felismerni egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényről, hogy van-e primitív függvénye I-ben, vagyis $f \in D'(I)$?

Válasz. Sehogy! De adható szükséges és adható elégséges feltétel.

1.8. Tétel (Szükséges feltétel primitív függvény létezésére)**.** *Ha $f \in D'(I)$, akkor f Darboux-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Ld. differenciálszámítás: egy függvény deriváltfüggvénye Darboux-tulajdonságú. □

1.9. Tétel (Elegendő feltétel primitív függvény létezésére)**.** *$C(I) \subset D'(I)$, azaz ha f folytonos I-n, akkor f-nek létezik I-ben primitív függvénye.*

1.10. *Megjegyzés.* Attól, hogy van, nem biztos, hogy számolással megadható...

Bizonyítás. Később. □

1.11. Példa. $\frac{1}{\ln x}$ az $I = (1, +\infty)$-en, e^{-x^2} az $I = \mathbb{R}$-en. Belátható, hogy nincs elemi primitív függvényük.

Primitív függvény-keresés vagy határozatlan integrálás: számolási technika (kalkulus), lényegében a differenciálás műveletének megfordítása.

1.12. Állítás (Az integrálás formális szabályai)**.**

I. Ha $f, g \in D'(I)$, akkor $f + g \in D'(I)$ (vektortér-tulajdonság), emellett

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

II. Ha $f \in D'(I)$, $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandó, akkor $c \cdot f \in D'(I)$ (vektortér-tulajdonság), emellett

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f.$$

1.13. Tétel (Parciális integrálás elve)**.** *Legyenek f és g differenciálhatók az I intervallumban, azaz $f, g \in D(I)$, és tegyük fel, hogy $f \cdot g' \in D'(I)$. Ekkor $f' \cdot g \in D'(I)$, és ez utóbbi (egy) primitív függvénye:*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás. Kell: $(f\cdot g-\int f\cdot g')\in D(I)$ – ez triv, és $(f\cdot g-\int f\cdot g')'=f'\cdot g$.

$$\left(f\cdot g-\int f\cdot g'\right)'=f'\cdot g+f\cdot g'-f\cdot g'=f'\cdot g.$$

□

1.14. Példa.

$$\int \ln x\,dx=\int \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\ln x}_{g(x)}\,dx=\underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\ln x}_{g(x)}-\int\underbrace{x}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\,dx=x\cdot\ln x-\int 1\,dx=x\cdot\ln x-x.$$

1.15. Tétel (Helyettesítéses integrálás elve)**.** *Legyenek I és I^* tetszőleges intervallumok, $f\in D'(I)$, $g\in D(I^*)$ adott függvények, úgy, hogy $R(g)\subset I$. Ekkor $(f\circ g)\cdot g'\in D'(I^*)$, és*

$$\int (f\circ g)\cdot g'=\left(\int f\right)\circ g.$$

Bizonyítás. Legyen $F:=\int f$, tehát $F\in D(I)$ és $F'=f$. Ismeretes, hogy ekkor $F\circ g$ is differenciálható I^*-ban, és

$$(F\circ g)'=(F'\circ g)\cdot g'=(f\circ g)\cdot g'.$$

Így $F\circ g=\left(\int f\right)\circ g=\int (f\circ g)\cdot g'$. □

1.16. *Megjegyzés.* A gyakorlatban $g:I^*\to I$ bijektív függvényt érdemes választani, mert ekkor

$$\int f=\left(\int (f\circ g)\cdot g'\right)\circ g^{-1},$$

vagyis az eredeti primitív függvény meghatározható.

Klasszikus formalizmus.

$$\int f(x)\,dx\mid_{x=g(t)}=\int f\left(g(t)\right)\cdot g'(t)\,dt,\qquad \frac{dx}{dt}=g'(t)$$

1.17. Példa. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ kiszámítása az $I=[-1{,}1]$ intervallumon. Helyettesítsünk $x:=$ $=\sin t$-t, $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]=:I^*$. Ekkor $\frac{dx}{dt}=\sin' t=\cos t$. Így

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,dx\mid_{x=\sin t}&=\int\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{f(g(t))=\sqrt{\cos^2 t}}\cdot\underbrace{\cos t}_{g'(t)}\,dt=\int|\cos t|\cdot\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt\\&=\int\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)\,dt=\frac{1}{2}\int 1\,dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt\\&=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\left(t+\sin t\cdot\cos t\right).\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,dx&=\frac{1}{2}\left(t+\sin t\cdot\cos t\right)\mid_{t=\arcsin x}=\frac{1}{2}\left(t+\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\right)\mid_{t=\arcsin x}\\&=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\cdot\sqrt{1-x^2}\right).\end{aligned}$$

2. Riemann-integrál

2.1. A Riemann-integrál definíciója.

A Riemann-integrál lényege: „a függvény görbéje és a vízszintes tengely által határolt síkidom területe".

A terület matematikai fogalma: olyan $T : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ függvény, ahol $\mathcal{M}$ a sík mérhető részhalmazait jelöli, és a következő axiómák teljesülnek:

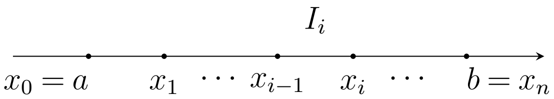
Terület-axiómák.

I. Ha H téglalap, oldalhosszai a és b, akkor $H \in \mathcal{M}$ és $T(H) = a \cdot b$;
II. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$ és $H_1 \subseteq H_2$, akkor $T(H_1) \leq T(H_2)$ (monotonitás);
III. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$, és van olyan e egyenes, hogy az e által határolt félsíkok egyike tartalmazza H_1-et, másika H_2-t, akkor $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{M}$ és $T(H_1 \cup H_2) = T(H_1) + T(H_2)$;
IV. Ha a sík egy B részhalmaza teljesíti a következő feltételt: minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $A, C \in \mathcal{M}$ halmazok, hogy $A \subseteq B \subseteq C$ és $T(C) - T(A) < \varepsilon$, akkor $B \in \mathcal{M}$.

2.1. Definíció. Az $[a, b]$ intervallum egy *felosztása* egy olyan $\{I_i = [x_{i-1}, x_i] : i = 1, \ldots, n\}$ véges intervallumrendszer, melyre

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$$

valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}[a, b]$.



1. ábra. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztása

2.2. Definíció. Legyen a $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$ és $\Psi \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztások *egyesítése* (vagy *közös finomítása*) az a $\Phi \vee \Psi$-vel jelölt felosztás, melyet úgy kapunk, hogy Φ osztópontjaihoz hozzávesszük a Ψ osztópontjait (vagy fordítva), és az így kapott új osztóponthalmazhoz tartozó intervallumrendszert tekintjük.

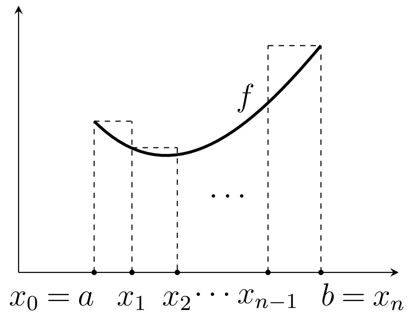
2.3. Definíció. Adott $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztás esetén definiálja a Φ felosztáshoz tartozó *alsó közelítőösszeget*

$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

felső közelítőösszeget

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

ahol $|I_i| := x_i - x_{i-1}$ az I_i intervallum hossza.



2. ábra. Egy felső közelítőösszeg

2.4. Állítás. *Tetszőleges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi\in\mathcal{F}[a,b]$ esetén*

$$S_f(\Phi) = -s_{-f}(\Phi).$$

Bizonyítás. $\sup_{I_i} f = -\inf_{I_i}(-f)$. □

2.5. *Megjegyzés.* Világos, hogy tetszőleges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi\in\mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Phi).$$

Bizonyítás. Minden $i\in\mathbb{N}$ esetén $\inf_{I_i} f \le \sup_{I_i} f$. □

2.6. Tétel. *Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor bármely $\Phi,\Psi\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztások esetén*

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Psi). \tag{2.1}$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bármely $\Phi,\Psi\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztások esetén

$$s_f(\Phi) \le s_f(\Phi\vee\Psi) \le S_f(\Phi\vee\Psi) \le S_f(\Psi), \tag{2.2}$$

amiből (2.1) nyilván következik. A 2. egyenlőtlenség a 2.5. Megjegyzés alapján nyilvánvaló. A következőkben azt bizonyítjuk, hogy ha $\Theta\in\mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy EGY új osztópontot hozzáveszünk, akkor

$$s_f(\Phi) \le s_f(\Theta). \tag{2.3}$$

Ebből az osztópontok számára vonatkozó teljes indukcióval következik az első egyenlőtlenség (2.2)-ben. A 3. egyenlőtlenség pedig ennek és a 2.4. Állításnak a folyománya.
Legyen tehát $\Theta\in\mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy annak x_i és x_{i+1} osztópontjai közé felveszünk még egy u osztópontot, vagyis Θ osztópontjai

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < u < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

A (2.3) egyenlőtlenség két oldaláról az azonos tagokat elhagyva be kell látnunk, hogy

$$\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-x_i) \le \left(\inf_{[x_i,u]} f\right)\cdot(u-x_i) + \left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-u).$$

Mivel $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \le \inf_{[x_i,u]} f$ és $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \le \inf_{[u,x_{i+1}]} f$ (kisebb halmazon vett infimum nagyobb vagy egyenlő, mint a nagyobb halmazon vett), ezért

$$\left(\inf_{[x_i,u]} f\right)\cdot(u-x_i)+\left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-u)\geq\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot((u-x_i)+(x_{i+1}-u))$$
$$=\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-x_i),$$

így az állítást beláttuk. □

2.7. Következmény. *A*

$$\{s_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\}\ \text{ és }\ \{S_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\}$$

halmazok közül a bal oldali halmaz minden eleme *kisebb vagy egyenlő a jobb oldali halmaz* minden eleménél. *Ebből az is következik, hogy az első halmaz felülről, a második alulról korlátos.*

2.8. Definíció. Definiálja az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény *Darboux-féle alsó integrálját*

$$\int_{*a}^{b} f:=\sup\left\{s_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\right\}, \tag{2.4}$$

és *Darboux-féle felső integrálját*

$$\int_{a}^{*b} f:=\inf\left\{S_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\right\}. \tag{2.5}$$

A 2.7. Következmény alapján

$$\int_{*a}^{b} f\leq\int_{a}^{*b} f. \tag{2.6}$$

2.9. Definíció. Egy korlátos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvényt *Riemann-integrálható*nak mondunk, ha

$$\int_{*a}^{b} f=\int_{a}^{*b} f.$$

Ha f Riemann-integrálható, akkor az alsó és felső Darboux-integrálok közös értékét f *Riemann-integráljának* nevezzük, és az alábbi módon jelöljük:

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x)\,dx.$$

2.10. Példa. A Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható [0,1]-en.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy bármely $\Phi\in\mathcal{F}[0,1]$ esetén

$$s_D(\Phi)=0 \text{ és } S_d(\Phi)=1,$$

tehát

$$\int_{*0}^{1} D=0<\int_{0}^{*1} D=1.$$

□

2.11. Példa. $\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Bizonyítás. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen a Φ_n felosztás az az intervallumrendszer, amit a

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

osztópontok határoznak meg. Ekkor

$$s_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3},$$
$$S_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3},$$

tehát $s_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$ és $S_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$, ha $n \to \infty$. Ebből könnyen látható, hogy $f(x) = x^2$ Riemann-integrálható [0,1]-en, és Riemann-integrálja $\frac{1}{3}$. $\square$

A továbbiakban jelölje

$$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}$$

2.12. Definíció. Ha $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, akkor az

$$\begin{aligned}\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\right) \cdot |I_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I_i\}) \cdot |I_i| = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|\end{aligned}$$

számot az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összegé*nek nevezzük. Az

$$\omega_f(I_i) = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I_i\}$$

az f függvény *oszcillációja* az I_i intervallumon.

2.13. Állítás. *Ha $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges felosztások, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\Omega_f(\Phi \vee \Psi) \le \Omega_f(\Phi).$$

Bizonyítás. A (2.2) egyelőtlenségből következik. $\square$

2.14. Tétel (Leghasznosabb kritérium Riemann-integrálhatóságra)**.** *Egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, vagyis $f \in R[a,b]$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\Phi = \Phi(\varepsilon) \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. 1. irány: Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható, és legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 2.9. Definíció szerint tudjuk, hogy

$$\int_{*a}^{b} f = \int_a^{*b} f = \int_a^b f.$$

A 2.8. Definíció alapján létezik olyan $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$s_f(\Phi_1) > \int_{*a}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2},$$

és létezik $\Phi_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$S_f(\Phi_2) < \int_a^{*b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezekből, a (2.2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_{*a}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2} < s_f(\Phi_1) \leq s_f(\Phi_1 \vee \Phi_2) \leq S_f(\Phi_1 \vee \Phi_2)$$

$$\leq S_f(\Phi_2) < \int_a^{*b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből $\Phi := \Phi_1 \vee \Phi_2$ választással

$$\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

2. irány: Tegyük fel indirekt, hogy a tétel állításában szereplő feltétel teljesül minden pozitív ε-ra, de

$$\int_{*a}^{b} f < \int_a^{*b} f.$$

Legyen

$$0 < \varepsilon < \int_a^{*b} f - \int_{*a}^{b} f$$

tetszőleges, és válasszunk ε-hoz $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást úgy, hogy $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Ekkor

$$s_f(\Phi) \leq \int_{*a}^{b} f < \int_a^{*b} f \leq S_f(\Phi) = s_f(\Phi) + \Omega_f(\Phi) < s_f(\Phi) + \varepsilon.$$

Ebből viszont

$$\varepsilon = s_f(\Phi) + \varepsilon - s_f(\Phi) > \int_a^{*b} f - \int_{*a}^{b} f,$$

ami ellentmondás. $\square$

A Heine-tétel felhasználásával látható be, hogy minden folytonos függvény Riemann-integrálható.

2.15. Tétel. *$C[a,b] \subset R[a,b]$, vagyis minden, az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C[a,b]$. A 2.14. Tétel integrálhatósági feltételét fogjuk használni, tehát legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és keresünk hozzá olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. A Heine-tétel alapján f egyenletesen is folytonos $[a,b]$-n, tehát az $\varepsilon/(b-a)$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $t,s \in [a,b]$, $|t-s| \le \delta$, akkor $|f(t)-f(s)| < \varepsilon/(b-a)$. Válasszuk meg $n \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy $\frac{b-a}{n} < \delta$ legyen. Legyenek a Φ felosztás osztópontjai

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n},\ i = 1, \dots, n,$$

vagyis az $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ intervallumban bármely két szám különbsége legfeljebb $1/n$, így itt a függvény oszcillációja legfeljebb $\varepsilon/(b-a)$. Erre a felosztásra tehát

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

2.16. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in R[a,b]$ és $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 2.14. Tétel alapján ε-hoz létezik olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\Omega_{|f|}(\Phi) \le \Omega_f(\Phi) < \varepsilon$ is teljesül. Mivel adott Φ felosztás esetén

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|,$$

ezért elég belátni, hogy minden i-re

$$\omega_{|f|}(I_i) \le \omega_f(I_i).$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $x, y \in I_i$ esetén

$$|f(x)| - |f(y)| \le |f(x) - f(y)| \le \omega_f(I_i),$$

amiből

$$\omega_{|f|}(I_i) = \sup\{|f(x)| - |f(y)| : x, y \in I_i\} \le \omega_f(I_i).$$

□

2.17. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f \cdot g \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve, és a 2.14. Tétel alapján keresünk hozzá $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást. Definiáljuk

$$K := \max\{\sup_{[a,b]} |f|, \sup_{[a,b]} |g|\},$$

és válasszunk $\frac{\varepsilon}{2K}$-hoz $\Phi_f, \Phi_g \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokat, melyekre

$$\Omega_f(\Phi_f) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi_g) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

(Ha $K = 0$, az érdektelen eset.) Tekintsük ezen felosztások egyesítését:

$$\Phi := \Phi_f \vee \Phi_g.$$

Ekkor a 2.13. Állítás alapján

$$\Omega_f(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K}$$

is teljesül. Legyen $I_i \in \Phi$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $x, y \in I_i$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\le |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \\ &\le K \cdot \omega_g(I_i) + \omega_f(I_i) \cdot K = K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) \,. \end{aligned}$$

Ebből

$$\omega_{f\cdot g}(I_i) = \sup \{|f(x)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in I_i\} \le K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) \,.$$

Öszzegezve $i = 1, \ldots, n$-re kapjuk

$$\begin{aligned} \Omega_{f\cdot g}(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_{f\cdot g}(I_i) \cdot |I_i| \le \sum_{i=1}^{n} K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) \cdot |I_i| \\ &= K \cdot \Omega_g(\Phi) + K \cdot \Omega_f(\Phi) < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Mese: Az integrálhatóság Riemann-féle eredeti definíciója

2.18. Definíció. Ha $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$ egy felosztás, akkor definiálja Φ *finomságá*t

$$|\Phi| := \max \{|I_i| : i = 1, \ldots, n\} \,.$$

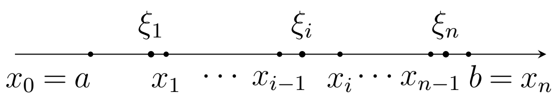
2.19. Definíció. Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ felosztás, és $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, a Φ *felosztásra illeszkedő vektor*, vagyis

$$\xi_i \in I_i, \; i = 1, \ldots, n,$$

jelölésben: $\xi \propto \Phi$. Ekkor a

$$\sigma_f(\Phi, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

számot az f függvény (Φ, ξ) párhoz tartozó *Riemann-összegé*nek nevezzük.



3. ábra. Felosztásra illeszkedő vektor

2.20. *Megjegyzés.* Tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ és $\xi \propto \Phi$ vektor esetén

$$s_f(\Phi) \le \sigma_f(\Phi, \xi) \le S_f(\Phi).$$

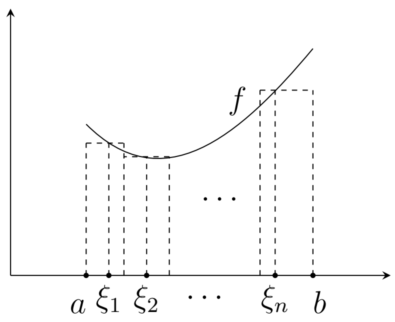
2.21. Tétel (Az integrálhatóság Riemann-féle kritériuma)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos. Ekkor az alábbi két állítás egymással egyenértékű:*

(i) $f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = A$;

(ii) Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$ felosztás, és minden $\xi \propto \Phi$ esetén

$$|\sigma_f(\Phi, \xi) - A| < \varepsilon.$$

2.22. *Megjegyzés.* A tétel az f korlátosságának feltétele nélkül is igaz, vagyis bármelyik állításból következik az is, hogy f korlátos $[a,b]$-n.



4. ábra. Egy Riemann-összeg

2.2. A Riemann-integrál formális tulajdonságai.

2.23. Állítás. *$R[a,b]$ vektortér $\mathbb{R}$ felett a szokásos függvényműveletekre nézve.*

Bizonyítás. Legyen $f, g \in R[a,b]$. Megmutatjuk, hogy ekkor $f+g \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{2.7}$$

A bizonyításhoz a 2.14. Tételben szereplő integrálhatósági kritériumot használjuk. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, rögzített. Ekkor $\varepsilon/2$-höz találhatók olyan $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztások, melyekre

$$\Omega_f(\Phi_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } \Omega_g(\Phi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Véve a $\Phi := \Phi_1 \vee \Phi_2$ felosztást, a 2.13. Állítás miatt

$$\Omega_f(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } \Omega_g(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Könnyen láthatók az alábbi egyenlőtlenségek:

$$s_f(\Phi) + s_g(\Phi) \le s_{f+g}(\Phi) \le S_{f+g}(\Phi) \le S_f(\Phi) + S_g(\Phi).$$

Ebből

$$\Omega_{f+g}(\Phi) = S_{f+g}(\Phi) - s_{f+g}(\Phi) \le S_f(\Phi) - s_f(\Phi) + S_g(\Phi) - s_g(\Phi) = \Omega_f(\Phi) + \Omega_g(\Phi) < \varepsilon.$$

A fenti egyenlőtlenségből az is következik, hogy bármely $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$\begin{aligned} s_f(\Phi) + s_g(\Psi) &\le s_f(\Phi \vee \Psi) + s_g(\Phi \vee \Psi) \le s_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \le \\ &\le S_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \le S_f(\Phi \vee \Psi) + S_g(\Phi \vee \Psi) \le S_f(\Phi) + S_g(\Psi). \end{aligned}$$

Véve először Φ-ben, vagy Ψ-ben supremumot ill. infimumot, kapjuk, hogy

$$\int_{*a}^{b} f + \int_{*a}^{b} g \le \int_{*a}^{b} (f+g) \le \int_a^{*b} (f+g) \le \int_a^{*b} f + \int_a^{*b} g,$$

amiből (2.7) adódik.

Legyen most $f \in R[a,b]$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy ekkor $c \cdot f \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b c \cdot f = c \int_a^b f. \tag{2.8}$$

Ha $c = 0$, akkor $c \cdot f \equiv 0 \in R[a,b]$. Ha $c \neq 0$, akkor válasszunk $\frac{\varepsilon}{|c|}$-hoz $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$-t, melyre

$$\Omega_f(\Phi) < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Ekkor

$$\Omega_{c \cdot f} = |c| \cdot \Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

A (2.8) egyenlőség a fentihez hasonlóan adódik. □

2.24. Állítás. *Legyen $f \in R[a,b]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Ekkor $f|_{[\alpha,\beta]} \in R[\alpha,\beta]$.*

Bizonyítás. A 2.14. Tétel szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, melyre $\Omega_f(\Phi) < < \varepsilon$. Véve ezen felosztás $[\alpha,\beta]$ intervallumba eső osztópontjait és az így kapott $\Psi \in \mathcal{F}[\alpha,\beta]$ felosztást kapjuk, hogy

$$\Omega_{f|_{[\alpha,\beta]}}(\Psi) \leq \Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

□

2.25. Állítás (Intervallum szerinti additivitás)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény, $a < c < b$. Tegyük fel, hogy $f|_{[a,c]} \in R[a,c]$ és $f|_{[c,b]} \in R[c,b]$. Ekkor $f \in R[a,b]$ és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bizonyítás. Mivel f korlátos $[a,c]$-n és $[c,b]$-n, ezért korlátos $[a,b]$-n is. Véve tetszőleges $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ és $\Phi_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ felosztásokat, az ezekhez tartozó részintervallumok rendszereinek egyesítéséből kapunk egy $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást. Könnyen látható, hogy

$$s_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + s_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2) = s_f(\Phi) \text{ és } S_f(\Phi) = S_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + S_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2).$$

Az összes $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ ill. $\Phi_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ felosztásra vett supremumra ill. infimumra kapjuk, hogy

$$\int_{*a}^{c} f + \int_{*c}^{b} f \leq \int_{*a}^{b} f \leq \int_{a}^{*b} f \leq \int_{a}^{*c} f + \int_{c}^{*b} f.$$

A feltétel szerint az egyenlőtlenségsorozat két vége megyegyezik, amiből

$$\int_{*a}^{b} f = \int_{a}^{*b} f = \int_{*a}^{c} f + \int_{*c}^{b} f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

így a 2.9. Definíció alapján az állítást beláttuk. □

2.26. Állítás (Integrandus szerinti monotonitás)**.** *Legyenek $f, g \in R[a,b]$ függvények, és tegyük fel, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$. Ekkor*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \leq s_g(\Phi),$$

amiből

$$\int_a^b f = \int_{*a}^b f \leq \int_{*a}^b g = \int_a^b g.$$

□

2.27. Következmény. *Bármely $f \in R[a,b]$ függvényre fennáll:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Minden $x \in [a,b]$ esetén

$$(-|f|)(x) = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = |f|(x),$$

amiből az állítás a 2.26. Állítás alapján következik. □

2.28. Állítás (Integrál triviális becslése)**.** *Legyen $f \in R[a,b]$. Ekkor*

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás azonnal adódik a 2.26. Állításnak az $\inf f$ konstans függvény és f ill. f és a $\sup f$ konstans függvényre való alkalmazásából. □

2.29. Következmény. *Legyen $f \in R[a,b]$. Ekkor*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f| \right) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható a 2.27. Következmény és a 2.28. Állítás alapján. □

Ezen becslések segítségével (folytonos függvényekre) bizonyítható a differenciálszámításban megismert középértéktétel analógja Riemann-integrálra.

2.30. Tétel (Integrálszámítás középértéktétele)**.** *Legyen $f \in C[a,b]$. Ekkor létezik olyan $c \in [a,b]$, melyre*

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A 2.28. Állítás alapján és a Weierstrass-tételből kapjuk

$$\min_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f.$$

A Bolzano-tétel miatt van olyan $c \in [a,b]$, melyre

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a},$$

amivel az állítást beláttuk. $\square$

2.3. A Newton-Leibniz tétel.

Az legutóbb bizonyított integrálási kritérium segítségével be tudjuk látni a Riemann-integrálra vonatkozó egyik legfontosabb tételt.

2.31. Tétel (Newton-Leibniz tétel)**.** *Ha $f \in R[a,b]$ és $f \in D'[a,b]$, vagyis f-nek létezik primitív függvénye, akkor f minden F primitív függvényére*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b = F|_a^b.$$

Bizonyítás. Mivel f két primitív függvénye csak konstansban térhet el, a jobb oldal független F választásától. Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. Ha Φ osztópontjainak halmaza $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, akkor $F|_{[x_{i-1},x_i]}$-re alkalmazva a Lagrange-középértéktételt létezik olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, melyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Nyilvánvalóan

$$s_f(\Phi) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) \leq S_f(\Phi).$$

Mivel $f \in R[a,b]$, ezért a fentiekből kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = \int_{*a}^b f \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^{b*} f = \int_a^b f,$$

amiből

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

és ezt akartuk belátni. $\square$

A Newton-Leibniz tétel feltételeit teljesítő függvényekre bizonyíthatók a primitív függvényeknél megismert parciális és helyetettesítéses integrálás szabályai.

2.32. Tétel (Parciális integrálás Riemann-integrálra)**.** *Legyen $f, g \in R[a,b]$ és $f, g \in D'[a,b]$, (egy) primitív függvényük legyen F ill. G. Ekkor*

$$\int_a^b f \cdot G = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b F \cdot g.$$

Bizonyítás. Mivel F és G differenciálhatók, így folytonosak, tehát Riemann-integrálhatók is $[a,b]$-n, ld. 2.15. Tétel. A 2.17. Tétel alapján pedig a szorzatok integráljai is léteznek. Mivel

$$(F\cdot G)' = f\cdot G + F\cdot g,$$

ezért a 2.31. Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_a^b (f\cdot G + F\cdot g) = [F\cdot G]_a^b.$$

Nemsokára látni fogjuk a 2.23. Állításban, hogy

$$\int_a^b (f\cdot G + F\cdot g) = \int_a^b f\cdot G + \int_a^b F\cdot g,$$

amivel a bizonyítás teljes. □

Jelölés. $f\in R[a,b]$ esetén jelölje

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

2.33. Tétel (Helyettesítéses integrálás Riemann-integrálra)**.** *Legyen $I=[a,b]$ intervallum, $f\in R[a,b]$ és $f\in D'[a,b]$. Legyen továbbá $I^*=[\alpha,\beta]$ intervallum, $g: I^*\to I$ differenciálható bijekció, melyre $(f\circ g)\cdot g'\in R[\alpha,\beta]$. Ekkor*

$$\int_a^b f = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f\circ g)\cdot g'.$$

Bizonyítás. A feltételekből azonnal következik, hogy g vagy szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton fogyó, tehát $g^{-1}(a)=\alpha$, $g^{-1}(b)=\beta$, vagy fordítva. Mivel

$$(F\circ g)' = (f\circ g)\cdot g',$$

ezért a 2.31. Newton-Leibniz tétel szerint

$$\int_\alpha^\beta (f\circ g)\cdot g' = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \begin{cases} F(b)-F(a), & \text{ha } g \text{ monoton novő;} \\ F(a)-F(b), & \text{ha } g \text{ monoton fogyó.}\end{cases} \tag{2.9}$$

Másrészt, szintén a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Ha g monoton növő, a tétel azonnal következik; ha monoton fogyó, a (2.9) egyenlőség mindkét oldalának ellentettjét véve kész a bizonyítás. □

2.4. Integrálfüggvények.

2.34. Definíció. Az $f \in R[a,b]$ függvény *integrálfüggvényei* az $[a,b]$ intervallumon értelmezett

$$[a,b] \ni x \mapsto c + \int_a^x f$$

függvények, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. (A 2.24. Állítás alapján $f|_{[a,x]} \in R[a,x]$).

2.35. Tétel. *Bármely $f \in R[a,b]$ bármely integrálfüggvénye Lipschitz-tulajdonságú, így folytonos (sőt, egyenletesen folytonos) $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $F(x) := c + \int_a^x f$ és $x, y \in [a,b]$. Ekkor a 2.25. Állítás alapján

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right|.$$

Felhasználva a 2.29. Következményben szereplő becslést kapjuk, hogy

$$|F(x) - F(y)| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f| \right) \cdot |x - y|,$$

amiből $L := \sup_{[a,b]} |f|$ választással a tétel következik. □

2.36. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és $f \in D'[a,b]$, vagyis f kielégíti a Newton-Leibniz-tétel feltételeit, akkor f primitív függvényeinek $\int f$ halmaza megegyezik f integrálfüggvényeinek halmazával. Ez azt is jelenti, hogy ekkor f integrálfüggvényei differenciálhatók, és deriváltjuk éppen f.*

Bizonyítás. Legyen F a f egy primitív függvénye, vagyis $F' = f$. Ekkor a 2.31. Newton-Leibniz tétel szerint bármely $x \in [a,b]$ esetén

$$\int_a^x f = F(x) - F(a),$$

tehát F egy integrálfüggvény $c := F(a)$ választással.
Fordítva, legyen

$$F(x) := c + \int_a^x f.$$

Rögzítsük f egy F_0 primitív függvényét – ez a feltétel alapján létezik. A 2.31. Newton-Leibniz tétel alapján

$$F(x) - c = \int_a^x f = F_0(x) - F_0(a),$$

amiből $F(x) = F_0(x) + d$, $d = c - F_0(a)$, tehát F is primitív függvénye f-nek. □

Annak idején az 1.9. Tételt, vagyis hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, bizonyítás nélkül mondtuk ki. Most elérkeztünk oda, hogy ezt a tételt igazoljuk. Mivel egy folytonos függvény Riemann-integrálható is, a most belátott tétel alapján primitív függvénye csak integrálfüggvénye lehet, és innen a bizonyítás könnyen adódik.

2.37. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és f folytonos az $u \in [a,b]$ helyen, akkor f bármely F integrálfüggvénye differenciálható u-ban, és deriváltja $F'(u) = f(u)$.*

Bizonyítás. Legyen

$$F(x) = c + \int_a^x f,\ x \in [a,b].$$

Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in [a,b]$, $|x-u| < \delta$, $x \neq u$, akkor

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x-u} - f(u) \right| < \varepsilon.$$

Ebből már következik, hogy

$$\lim_{x \to u} \frac{F(x) - F(u)}{x-u} = F'(u) = f(u).$$

Mivel f folytonos u-ban, ezért ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in [a,b]$, $|x-u| < \delta$, akkor $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ez a δ jó lesz. Legyen $x \in [a,b]$, $|x-u| < \delta$ rögzítve, és tegyük fel, hogy $x \geq u$. A F függvény definíciója és a 2.25. Állítás szerint

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x-u} - f(u) \right| = \left| \frac{1}{x-u} \int_u^x f(t)\, dt - \frac{1}{x-u} \int_u^x f(u)\, dt \right| = \left| \frac{1}{x-u} \int_u^x (f(t) - f(u))\ dt \right|$$

A 2.29. Következményből kapjuk, hogy

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x-u} - f(u) \right| \leq \sup \{ |f(t) - f(u)| : t \in [u,x] \} \leq \varepsilon.$$

Az $x \leq u$ eset hasonlóan bizonyítható. □

2.38. Következmény. *Ha $f \in C[a,b]$, akkor f-nek van primitív függvénye $[a,b]$-n (éspedig bármely integrálfüggvénye az).*

2.39. Alkalmazás. Riemann-integrálás alkalmazásával igazolható az ún. *Wallis-formula*:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Bizonyítás. Laczkovich-T. Sós: Analízis II. 13.11. és 13.12. Tételek. □

A követkző tételek pontos bizonyítása megtalálható a Laczkovich-T. Sós: Analízis II. 14. fejezetében, de vizsgára csak kimondani kell tudni őket, a bizonyítást nem kérem.

2.40. Tétel. *Ha $f \geq 0$ és $f \in R[a,b]$, akkor az*

$$A_f := \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq x \leq f(x)\}$$

síkidom területe $T(A_f) = \int_a^b f$.

2.41. Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazt *normáltartomány*nak nevezzük, ha

$$A = \{(x,y) : x \in [a,b], f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

ahol $f, g \in R[a,b]$ és $f \leq g$ az $[a,b]$-n.

2.42. Tétel. *Az előbbiekben definiált normáltartomány területe*

$$T(A) = \int_a^b (g - f).$$

2.43. Tétel. *Ha* $f \geq 0$ *és* $f \in R[a,b]$*, akkor az* f

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$$

grafikonjának az x *tengely körüli megforgatásával kapott* A *forgástest térfogata*

$$V(A) = \pi \int_a^b f^2.$$

2.44. Tétel. *Ha* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható, akkor az* f *grafikonjának ívhossza*

$$|\Gamma(f)| = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

3. Improprius integrál

Ki szeretnénk terjeszteni a Riemann-integrál fogalmát nyílt, félig nyílt és nem korlátos intervallumokra.

3.1. Definíció. Legyen I nemelfajuló intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan integrálható* I*-n*, ha

$$f|_{[a,b]} \in R[a,b]$$

minden $[a,b] \subset I$ esetén. Jelölés: $R^{loc}(I)$.

3.2. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy ha $I = [a,b]$, akkor $R^{loc}[a,b] = R[a,b]$.

3.3. Definíció. Ha $f \in R^{loc}(I)$,akkor f *integrálfüggvényei* az I-n értelmezett

$$I \ni x \mapsto c + \int_u^x f$$

alakú függvények, ahol $c \in \mathbb{R}$, $u \in I$.

3.4. Definíció. Legyen I nemelfajuló intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *impropriusan integrálható* I*-n*, ha $f \in R^{loc}(I)$ és f-nek létezik olyan F integrálfüggvénye I-n, melyre

$$\exists \lim_{\inf I + 0} F \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \lim_{\sup I - 0} F \in \mathbb{R}.$$

Ekkor f *improprius integrálja* I-n:

$$\int_I f := \int_{\inf I}^{\sup I} f = \lim_{\sup I - 0} F - \lim_{\inf I + 0} F.$$

3.5. *Megjegyzés.* Ha a fenti feltételek mellett a $\lim_{\inf I+0} F$ és $\lim_{\sup I-0} F$ határértékek léteznek, de egyikük végtelen, a másik véges; vagy ellenkező előjelű végtelenek, akkor szokás azt mondani, hogy f improprius integrálja ($+$ vagy $-$) végtelen.

3.6. Példa.

I. $I := [0, +\infty),\ f : I \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

II. $I := [1, +\infty),\ f : I \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

III. $I := (0,1],\ f : I \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

3.7. *Megjegyzés.* Ha $f \in R[a,b]$, akkor a 2.35. Tétel szerint F integrálfüggvénye folytonos az a és b végpontokban, ezért határértékei is léteznek, és megegyeznek a helyettesítési értékkel.

3.8. Lemma (Függvény határértékére vonatkozó Cauchy-kritérium)**.** *Legyen F értelmezve az $I \setminus \{x_0\}$ halmazon, ahol I intervallum, $x_0 \in I$ (vagy $x_0 = +\infty$ vagy $x_0 = -\infty$). Ekkor F-nek pontosan akkor van véges határértéke az x_0 helyen, ha a következő feltétel teljesül: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $|y - x_0| < \delta$, $x, y \neq x_0$ (ill. $x, y > \delta$, $x_0 = +\infty$ esetén; $x, y < -\delta$, $x_0 = -\infty$ esetén), akkor*

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Következik a függvény-határértékre vonatkozó átviteli elvből. □

3.9. Tétel (Cauchy-féle szükséges és elégséges feltétel improprius integrálhatóságra)**.** *Legyen I nemelfajuló intervallum, $f \in R^{loc}(I)$. Ekkor f pontosan akkor impropriusan integrálható I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $a, b \in I$, $\inf I < a \leq b < \sup I$ számok, hogy*

$$\textit{ha } \inf I < u < v < a, \ \textit{akkor} \left| \int_u^v f \right| < \varepsilon,$$

és

$$\textit{ha } b < u < v < \sup I, \ \textit{akkor} \left| \int_u^v f \right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Következik abból, hogy ha F integrálfüggvénye f-nek I-n, akkor

$$\int_u^v f = F(v) - F(u).$$

Alkalmazzuk az előbbi tételt F-re. □

3.10. Példa.

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Parciális integrálással kapjuk:

$$\int_u^v \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_u^v - \int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$$

Ebből

$$\left|\int_u^v \frac{\sin t}{t}\,dt\right| = \left|\frac{-\cos v}{v} + \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right|$$
$$\leq \left|\frac{-\cos v}{v}\right| + \left|\frac{\cos u}{u}\right| + \int_u^v \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt \leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{t^2}\,dt$$
$$\leq \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \left[-\frac{1}{t}\right]_u^v = \frac{2}{u} < \varepsilon,$$

ha $\frac{2}{\varepsilon} < u < v$.

3.11. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyen $f \in R^{loc}(I)$. Tegyük fel, hogy léteznek $\alpha, \beta \in \in I$, $\inf I < \alpha \leq \beta < \sup I$ számok és*

$$g_1 : I \cap (-\infty, \alpha] \to [0, +\infty),\ g_2 : I \cap [\beta, +\infty] \to [0, +\infty)$$

függvények, melyek improprius integrálhatók, és majorálják f-et, vagyis

$$\forall x \in D(g_1) : |f(x)| \leq g_1(x) \text{ és } \forall x \in D(g_2) : |f(x)| \leq g_2(x).$$

Ekkor f improprius értelemben integrálható I-n.

Bizonyítás. A fenti 3.9. Tétel szerint léteznek $a, b \in \mathbb{R}$, $\inf I < a < \alpha$ és $\beta < b < \sup I$ számok, hogy

$$\text{ha } \inf I < u < v < a, \text{ akkor } \left|\int_u^v g_1\right| = \int_u^v g_1 < \varepsilon,$$

és

$$\text{ha } b < u < v < \sup I, \text{ akkor } \left|\int_u^v g_2\right| = \int_u^v g_2 < \varepsilon.$$

Ebből a 2.26. Állítás és a 2.27. Következmény alapján $\inf I < u < v < a$ esetén

$$\left|\int_u^v f\right| \leq \int_u^v |f| \leq \int_u^v g_1 < \varepsilon,$$

és $b < u < v < \sup I$ esetén

$$\left|\int_u^v f\right| \leq \int_u^v |f| \leq \int_u^v g_2 < \varepsilon.$$

Így az állítás a 3.9. Tételből következik f-re. □

3.12. Példa.

$$f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$$
$$\forall x \in (-\infty, -1] : \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{x},\ \forall x \in [1, +\infty) : \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$$

3.13. Következmény. *Ha $f \in R^{loc}(I)$ és $|f|$ improprius értelemben integrálható I-n, akkor f is improprius értelemben integrálható I-n.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti 3.11. Tételt tetszőleges $\alpha, \beta \in I$, $\inf I < \alpha \leq \beta < \sup I$ számokra és

$$g_1 := |f|\,|_{I\cap(-\infty,\alpha]} \text{ és } g_2 := |f|\,|_{I\cap[\beta,+\infty]}$$

függvényekre. □

3.14. Alkalmazás. Impropius integrál alkalmazásával igazolható az ún. *Stirling-formula*:

$$n! \sim n^n \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Bizonyítás. Laczkovich-T. Sós: Analízis II. 16.20 és 16.23. tételek. □