ANALÍZIS II. KÖZÉPSZINT TÉTELSOR

BSC 2007/08. 2. FÉLÉV

A vizsgán mindenki két tételt kap, melyekből kb. 30-60 perc alatt lehet felkészülni. A vizsgán az anyag megértéséről, az összefüggésekről és a levezetésekről kell számot adni. Tudni kell még: ahol előadáson szerepelt, példákat; a bizonyításokból annyit, amennyi előadáson szerepelt. Mindkét tételről elégséges szinten kell beszámolni. A vizsgán ezt a tájékoztatót lehet használni, valamint üres papírt, tollat, ételt, italt lehet behozni. Kényelmes ruhában legyenek, nem kell kiöltözni!

Minden alkalommal 8 órára jöjjön három, utána félóránként egy-egy ember.

Mivel a félév folyamán folyamatosan használtunk múlt félévbeli ismereteket, az alábbiakat (levezetés nélkül) tudni kell vizsgán is:

sorozathatárérték, azonosságok, topológiai alapfogalmak, Bolzano-Weierstrass tétel, monoton korlátos sorozat konvergenciája, az e szám, exponenciális függvény definíciója, végtelen sor, annak konvergenciája és abszolút konvergenciája, hányados-, gyök- és Leibniz-kritérium, folytonososság és függvényhatárérték definíciója és legfontosabb tulajdonságai, kompozíciófüggvény határértéke, inverzfüggvény folytonossága, Bolzano-tétel, Weierstrass-tétel, egyenletes folytonosság és Heine-tétel, nevezetes sorozat- és függvényhatárértékek: főként $(1+1/n)^n$, $\sqrt[n]{n}$, $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n!}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{e^x-1}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, trigonometrikus és hiperbolás függvények és inverzeik.

1. Függvény differenciálhatósága. Ekvivalens definíciók. Deriváltfüggvény. Inverzfüggvény deriváltja.
2. Differenciálási szabályok (összeg, szorzat, hányados). Kompozíciófüggvény deriválási szabálya.
3. Elemi függvények deriváltja (hatványfüggvények, exponenciális, logaritmus-, trigonometrikus, hiperbolás függvények, inverz trigonometrikus és hiperbolás függvények – részben gyakorlatról).
4. Lokális növekedés és fogyás tétele. Lokális szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele. Rolle-tétel.
5. Lagrange- és Cauchy-féle középértéktétel. Lagrange-egyenlőtlenség.
6. Monoton növés és fogyás tétele. Darboux-tétel a deriváltfüggvényről.
7. Többszörös differenciálhatóság. Lokális szélsőérték elsőrendű és másodrendű elégséges feltétele.
8. Cauchy-féle középértéktétel. L'Hospital-szabály.
9. Konvex és konkáv függvények. Konvex függvények jellemzése: különbségihányados-függvény, folytonosság.
10. Konvex függvény differenciálhatósága. Bal és jobb oldali deriváltfüggvény.
11. Differenciálható konvex függvények jellemzése.
12. Inflexiós pont. Egy szükséges és egy elégséges feltétel inflexiós pont létezésére.

13. Taylor-polinom. Tétel a Taylor-polinom jellemzéséről („jól” közelíti a függvényt).
14. Taylor-polinom, Lagrange-féle maradéktag. Konvergens Taylor-sor.
15. Primitív függvény. $D'(I)$ alapvető tulajdonságai. Formális szabályok. Parciális és helyettesítéses integrálás.
16. Intervallum felosztása. Felosztások közös finomítása. Alsó és felső közelítő összeg, ezek összehasonlítása. Darboux-féle alsó és felső integrál. Riemann-integrálhatóság.
17. Oszcillációs összeg. „Leghasznosabb” kritérium Riemann-integrálhatóságra. A Riemann-integrálhatóság Riemann-féle kritériuma (bizonyítás nélkül).
18. Terület fogalma. Oszcillációs összeg. Minden folytonos függvény Riemann-integrálható.
19. A Riemann-integrál tulajdonságai: $|f|$, $f \cdot g$, függvény megszorítása Riemann-integrálható.
20. A Riemann-integrál tulajdonságai: vektortér-tulajdonság, integrandus szerinti monotonitás, triviális becslés.
21. A Riemann-integrál tulajdonságai: intervallum szerinti additivitás, középértéktétel.
22. Newton-Leibniz tétel. Parciális és helyettesítéses integrál Riemann-integrálra.
23. Integrálfüggvény, folytonossága. Integrálfüggvény és primitív függvény kapcsolata.
24. Integrálfüggvény. Folytonos függvény integrálfüggvénye.
25. Az integrálszámítás alkalmazásai: normáltartomány, ívhossz, térfogat (bizonyítás nélkül), Wallis-formula.
26. Lokálisan integrálható függvény integrálfüggvénye. Improprius integrál. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$.
27. Cauchy- és összehasonlító kritérium improprius integrálra.
28. Az improprius integrál alkalmazása: Stirling-formula.
29. Numerikus sorok Cauchy-szorzata. Tétel abszolút konvergens sorok átrendezéséről.
30. Hatványsorok, konvergenciasugár. Cauchy-Hadamard-tétel. Transzformációs tétel.
31. Hatványsor összegfüggvényének tulajdonságai (folytonosság, differenciálhatóság, primitív függvény). Taylor-sor és hatványsor összegfüggvényének kapcsolata.
32. Hatványsorok közötti műveletek. Hatványsorok együtthatóinak egyértelműsége. $f' = a \cdot f$ differenciálegyenlet megoldása.
33. Analitikus függvény. Hatványsor reciproka. Két hatványsor hányadosa.
34. Abel-tétel. Példák az alkalmazásra: $\pi, \ln 2$.
35. Trigonometrikus függvények hatványsorai. Binomiális sor, arcsin hatványsora.
36. Komplex hatványsorok. Az algebra alaptétele.