Binomiális tétel, binomiális sorok

$\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\forall x \in I$, $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n}$, ahol I a jobb oldali, u.n. **binomiális sor** konvergenciaintervalluma,

melyre $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}_0$ esetén $(-1, 1) \subset I \subset [-1, 1]$ (tehát a binomiális sor konvergenciasugara 1),
ha pedig $\alpha \in \mathbf{N}_0$, akkor $I = \mathbf{R}$, (ez utóbbi esetben a binomiális sor véges összeg, az egyenlőség minden valós x-re teljesül),

és $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$ $n \in \mathbf{N}$, $\binom{\alpha}{0} := 1$ az u.n. **binomiális együtthatók.**

Bizonyítás : Ha $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}_0$ és $x \neq 0$ (a 0 eset nyilvánvaló), akkor a hányadoskritérium szerint $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \cdot |x| \to |x|$ miatt a sor konvergenciasugara 1 ($|x| < 1$ esetén a sor konvergens, $|x| > 1$-re pedig divergens). Elegendő azt bizonyítani, hogy $\forall x \in (-1, 1)$ igaz az állítás, azaz $\forall x \in (-1, 1)$ $g(x) := \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n}{(1+x)^\alpha} = 1$, hiszen ha a sor az 1 ill. -1 helyeken is konvergens, akkor Abel tétele (a hatv.sor összegfüggvénye folytonos fv.) miatt ezeken a helyeken az összegfüggvény helyettesítési értékei az $x \mapsto (1+x)^\alpha$ függvény (1 ill. -1 helyen vett) véges határértékeivel (tehát a fv. által felvett értékekkel) egyeznek. (Így, ha $\alpha < 0$, akkor $-1 \notin I$.)

Megmutatjuk, hogy $\forall x \in (-1, 1)$ $g'(x) = 0$, (**ebből már** $g(0) = 1$ **miatt következik, hogy** $\forall x \in (-1, 1)$ $g(x) = 1$) **:**

$g'(x) = 0$ pontosan akkor, ha a deriváláskor kapott számláló zérus, ezt fogjuk bizonyítani $\forall x \in (-1, 1)$ esetére:

$$\boxed{(1+x)^\alpha \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^{n-1} - \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n} =$$

$$= (1+x)^{\alpha-1} \cdot \left((1+x) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^{n-1} - \alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \right) = (1+x)^{\alpha-1} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} \cdot x^n - \alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \right) = *$$

$$\left(n \cdot \binom{\alpha}{n} = \alpha \cdot \binom{\alpha-1}{n-1} \quad \text{miatt} \right) \qquad * = (1+x)^{\alpha-1} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot \binom{\alpha-1}{n-1} \cdot x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \cdot \binom{\alpha-1}{n-1} \cdot x^n - \alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \right) =$$

$$= (1+x)^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} \cdot x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} \cdot x^n - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \right) =$$

$$= (1+x)^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right) \cdot x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \right) =$$ (a binomiális együtthatók összegére vonatkozó azonosság !!!)

$$= (1+x)^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot \left(\alpha \cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n)}{n!} + \frac{(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right) \cdot x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \right) =$$

$$= (1+x)^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1) \cdot ((\alpha-n) + n)}{n!} \right) \cdot x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \right) = 0 \; . \; ☻$$

Példa : $\forall x \in (-1, 1)$ $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^n$ (def.: $(-1)!! := 1$),

$\Rightarrow$ $\forall x \in (-1, 1)$, s így $-x^2 \in (-1, 1)$ miatt $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n}$, melyből

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arcsin(0) = 0$ miatt $\forall x \in (-1, 1)$ $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1) \cdot (2n)!!} \cdot x^{2n+1}$ (hatv.sor, összegfv. diff.hatósága).

Bizonyítható, hogy a sor $x = \pm 1$-re is konvergens, így az Abel-tétel miatt : $\forall x \in [-1, 1]$ $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1) \cdot (2n)!!} \cdot x^{2n+1}$.