Példák függvények hatványsorba fejtésével kapcsolatban

1. Határozzuk meg az $(1-\mathrm{id})^{-2}$ függvény 0 középpontú Taylor-sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

I. A **binomiális tétel** szerint, ha $|x|<1$, akkor $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{-2}{n}\cdot(-x)^n = 1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-2-(n-1))}{n\,!}\cdot x^n =$

$= 1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot\dfrac{(n+1)\,!}{n\,!}\cdot x^n = 1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n$ ($|x|\ge 1$ esetén a sor divergens !) .

II. Az $(1-\mathrm{id})^{-2}$ függvény sorfejtését a hatványsorok **összegfüggvényének differenciálhatósága** alapján is megkaphatjuk **:**

$|x|<1$ esetén $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n$ ($|x|\ge 1$ -re a sor divergens !).

III. Felhasználva, hogy $|x|<1$ esetén $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$, a **Cauchy-szorzat** alkalmazásával is meghatározhatjuk az $\dfrac{1}{(1-\mathrm{id})^2}$ függvény 0 hely körüli hatványsorba fejtését (minden hatványsor abszolút konvergens a konv. Intervallum belsejében !) **:**

$$\forall x\in(-1,1)\qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k\cdot x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^n\cdot\sum_{k=0}^{n}1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n .$$

2. Határozzuk meg a $\sum(n\cdot\mathrm{id}^n)$ hatványsor összegfüggvényét !

a.) A hatv.sor **konvergenciasugara**, $R=\dfrac{1}{\limsup\sqrt[n]{|n|}}=1$, s mivel a sor a ±1 helyeken divergens, a **konv. intervallum** $(-1,1)$.

b.) Ha $x\in(-1,1)$, akkor $f(x):=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot x^n = x\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot x^{n-1} = x\cdot\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n\right)' = x\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = x\cdot\dfrac{(1-x)-(-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

A $\sum(n\cdot\mathrm{id}^n)$ hatványsor **összegfüggvénye** tehát **:** az $\dfrac{\mathrm{id}}{(1-\mathrm{id})^2}$ függvénynek a $(-1,1)$ intervallumra való leszűkítése .

Megj.: Az **összegfüggvényt** az 1. feladatban tárgyalt $(1-\mathrm{id})^{-2}$ fgv. sorfejtése alapján azonnal is megkaphattuk volna,

felhasználva, hogy $\forall x\in(-1,1)$ $\dfrac{x}{(1-x)^2} = x\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot x^n$.

3. Határozzuk meg a $\sum(n^2\cdot\mathrm{id}^n)$ hatványsor összegfüggvényét !

a.) A hatványsor **konvergenciasugara**, $R=\dfrac{1}{\limsup\sqrt[n]{|n^2|}}=1$, a sor a ±1 helyeken divergens, így a **konv. intervallum** $(-1,1)$.

b.) Legyen $x\in(-1,1)$, $f(x):=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\cdot x^n$, $g(x):=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot(n\cdot x^{n-1})$, $h(x):=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot x^n$. Ekkor

$h(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$ és $g(x)=h'(x)$ miatt az **összegfüggvényre :** $f(x)=x\cdot g(x)=x\cdot\dfrac{(1-x)^2+2x\cdot(1-x)}{(1-x)^4}=\dfrac{x\cdot(1+x)}{(1-x)^3}$.

4. Határozzuk meg a $\sum(\frac{1}{n}\cdot\mathrm{id}^n)$ hatványsor összegfüggvényét !

A hatványsor **konvergenciasugara**, $R=\dfrac{1}{\limsup\sqrt[n]{|1/n|}}=1$, a sor a -1 helyen konvergens, az 1 helyen divergens, így

a **konvergenciaintervallum** $[-1,1)$, melynek belső pontjaiban az f összegfüggvény deriváltja : $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$.

Ebből, a 0 helyen vett 0 sorösszeg és a -1 -beli folytonosság alapján, a hatványsor **összegfüggvényére :** $f(x)=-\ln(1-x)$.

5. Határozzuk meg az $x \mapsto \ln(1+x)$ függvény 0 középpontú Taylor-sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

$\forall x \in (-1,1)$ $\quad \ln'(1+x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n$. A jobboldali hatványsor a $\sum (-1)^n \cdot \dfrac{\mathrm{id}^{n+1}}{n+1}$ hatványsor derivált sora

(konvergenciasugaruk 1), így $\forall x \in (-1,1)$ a $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \ln'(1+x)$ egyenlőséget kapjuk (összegfüggvény deriváltja).

Ebből : $\forall x \in (-1,1)$ $\ln(1+x) = c + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, s mivel $\ln(1+0)=0$, $c=0$. Figyelembevéve, hogy a sor $x=1$ esetén is

konvergens, s hogy itt Abel tétele szerint a sorösszeg $\ln 2$, kapjuk : $\quad \forall x \in (-1,1\,]$ $\quad \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$.

A Taylor-sor tehát a $(-1,1\,]$ intervallumon előállítja a függvényt. (A Taylor-sor **összegfüggvénye :** a függvény leszűkítése $(-1,1\,]$-re.)

Megj.: Ha tehát $-1 < x-1 \le 1$, azaz $x \in (\,0,2\,]$, akkor $\ln(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n$, az ln fgv. 1 körüli sorbafejtése.

Ebből pedig, ha $R \in \mathbf{R}^+$ és $\dfrac{x}{R} \in (\,0,2\,]$, azaz $x \in (\,0, 2R\,]$, akkor $\ln\left(\dfrac{x}{R}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(\dfrac{x}{R} - 1\right)^n$, melyből kapjuk :

$\forall x \in (\,0, 2R\,]$ $\ln(x) = \ln(R) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \cdot R^n} \cdot (x-R)^n$, az ln függvény R körüli sorbafejtése. **(R kp.ú Taylor-sorba fejtés.)**

6. Határozzuk meg az arc tg függvény 0 középpontú Taylor-sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

$\mathrm{arc\,tg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, melyre ha $|x| < 1$, akkor $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$. A jobb oldali hatványsor a $\sum (-1)^n \cdot \dfrac{\mathrm{id}^{2n+1}}{2n+1}$ hatv.sor

derivált sora (konvergenciasugaruk 1), így $\forall x \in (-1,1)$ $\mathrm{arc\,tg}(x) = c + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, s mivel $\mathrm{arc\,tg}(0) = 0$, $c = 0$.

A sor $x = \pm 1$ esetén is konvergens (Leibniz kritérium), s Abel tétele miatt itt a sorösszegek: $\mathrm{arc\,tg}(1) = \pi/4$, $\mathrm{arc\,tg}(-1) = -\pi/4$.

$\Rightarrow$ $\quad \forall x \in [-1,1\,]$ $\mathrm{arc\,tg}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. A **Taylor-sor összegfüggvénye** tehát az $\mathrm{arc\,tg}\big|_{[-1,1]}$ függvény.

7. Határozzuk meg az area th függvény 0 középpontú Taylor-sorát és vizsgáljuk meg ennek konvergenciáját !

$\forall x \in (-1,1)$ $\quad \mathrm{area\,th}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$. A jobb oldali hatványsor a $\sum \dfrac{\mathrm{id}^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsor derivált sora (konv.sugaruk 1),

így $\forall x \in (-1,1)$ $\mathrm{area\,th}(x) = c + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, s mivel $\mathrm{area\,th}(0) = 0$, $c = 0$. $\quad \Rightarrow \quad \forall x \in (-1,1)$ $\mathrm{area\,th}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

A Taylor-sor tehát a teljes értelmezési tartományon előállítja a függvényt. **(A Taylor-sor összegfüggvénye maga a függvény.)**

8. Határozzuk meg az alábbi $\sum c_n \cdot (\,\mathrm{id} - u\,)^n$ hatványsorok I konvergenciaintervallumait !

a.) $\sum(\,n^p \cdot \mathrm{id}^n\,)$, $p \in \mathbf{R}^+$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim(\,\sqrt[n]{n}\,)^p = 1$, így a konv.sugár 1 . A ± 1 helyen divergens a sor $\Rightarrow$ $I = (-1,1)$.

b.) $\sum(\,(1+\frac{1}{n})^{-n^2} \cdot \mathrm{id}^n\,)$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim(1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$, így a konv.sugár e . A $\pm$e helyen divergens a sor $\Rightarrow$ $I = (-\mathrm{e}, \mathrm{e})$.

c.) $\sum(\,\frac{1}{2^n} \cdot (\mathrm{id}-2)^{n^2}\,)$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n^2]{2^{-n}} = 1$, így a konv.sugár 1 . Az 1 és 3 helyen konvergens a sor $\Rightarrow$ $I = [1,3]$.

d.) $\sum(\,\frac{3^n+(-2)^n}{n^2} \cdot (\mathrm{id}+1)^n\,)$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \dfrac{3 \cdot \sqrt[n]{1+(-2/3)^n}}{\sqrt[n]{n^2}} = 3$, így a k.s. $\frac{1}{3}$. A $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}$ helyen konv.sor $\Rightarrow$ $I = [-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.

e.) $\sum(\,n! \cdot (\mathrm{id}-7)^n\,)$: $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$, így a konv.sugár 0 . $\Rightarrow$ $I = [7,7]$ elfajuló intervallum ($= \{\,7\,\}$) .