Sorok Cauchy - szorzata

Ha a $\sum(a_n)$ sor **abszolút konvergens**, a $\sum(b_n)$ sor **konvergens**, akkor a két sor u.n. **Cauchy - szorzata**, azaz a

$\sum\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)$ sor is **konvergens**, és összege : $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Tehát két konvergens sor Cauchy – szorzatának konvergenciájához **elegendő feltétel** az egyik sor abszolút konvergenciája.

Példák :

1. $\forall x, y \in \mathbf{R}$ $\quad e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot x^k\cdot y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot(x+y)^n = e^{x+y}$.

Megj.: A fenti egyenlőségek változatlanul érvényesek komplex sorfejtések esetén is ! $\left(e^z := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)$

2. $\forall x, y \in \mathbf{C}$ $\quad \sin x\cdot\cos y = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{y^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+(n-k)}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{y^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2k+1)!\cdot((2n+1)-(2k+1))!}\cdot x^{2k+1}\cdot y^{(2n+1)-(2k+1)},$$

$\sin y\cdot\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2k+1)!\cdot((2n+1)-(2k+1))!}\cdot y^{2k+1}\cdot x^{(2n+1)-(2k+1)}$, majd ezeket összeadva (és átindexelve):

$$\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot x^{2k+1}\cdot y^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2n-2k}\cdot x^{2n-2k}\cdot y^{2k+1}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\cdot x^{2k+1}\cdot y^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\cdot x^{2k}\cdot y^{2n+1-2k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\cdot x^k\cdot y^{2n+1-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot(x+y)^{2n+1} = \sin(x+y) \ .$$

Megj.: A trig. addíciós azonosságokat a valós esetre egyszerűbben megkaphatjuk, ha az u.n. Euler-formulát alkalmazzuk : $\forall z \in \mathbf{C}$

$e^{\mathbf{i}\cdot z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot(\mathbf{i}\cdot z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + \mathbf{i}\cdot\sin z$, s így $\forall x, y \in \mathbf{R}$ $\quad \cos(x+y) + \mathbf{i}\cdot\sin(x+y) =$

$$= e^{\mathbf{i}\cdot(x+y)} = e^{\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot y} = (\cos x + \mathbf{i}\cdot\sin x)\cdot(\cos y + \mathbf{i}\cdot\sin y) = (\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y) + \mathbf{i}\cdot(\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y) .$$

A komplex esetre is egyszerűbb a bizonyítás, ha figyelembevesszük: $\cos z = \frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot z} + e^{-\mathbf{i}\cdot z})$ és $\sin z = \frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot z} - e^{-\mathbf{i}\cdot z})$, így pl.:

$\forall x, y \in \mathbf{C}$ $\quad \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot x} - e^{-\mathbf{i}\cdot x})\cdot\frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot y} + e^{-\mathbf{i}\cdot y}) + \frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot x} + e^{-\mathbf{i}\cdot x})\cdot\frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot y} - e^{-\mathbf{i}\cdot y}) =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot y} - e^{-\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot y} + e^{\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot y} - e^{-\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot y}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot y} - e^{-\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot y} - e^{\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot y} + e^{-\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot y}) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{\mathbf{i}\cdot y} - e^{-\mathbf{i}\cdot x}\cdot e^{-\mathbf{i}\cdot y}) = \frac{1}{2}\cdot(e^{\mathbf{i}\cdot(x+y)} - e^{-\mathbf{i}\cdot(x+y)}) = \sin(x+y) \ .$$

3. $\forall x \in \mathbf{C}$ $\quad \sin^2 x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+(n-k)}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\frac{x^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+2)!}{(2k+1)!\cdot(2n+2-(2k+1))!} = *$ (felhasználva, hogy $0 = (1-1)^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{2k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+2}{2k+1}$ és

$2^{2n+2} = (1+1)^{2n+2} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{2k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+2}{2k+1}$) $\quad * = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot 2^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\cdot x^{2n}$.

Megj.: A $\sin^2$ függvény hatványsorba fejtését a Cauchy-szorzat alkalmazása nélkül is meghatározhatjuk :

$$\forall x \in \mathbf{C} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\cdot x^{2n} \ .$$