

BSc Analízis I. előadásjegyzet
2009/2010. őszi félév

Sikolya Eszter
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Tartalomjegyzék

Előszó	v
1. Bevezetés	1
1.1. Logikai állítások, műveletek, tagadás	1
1.2. Bizonyítási módszerek	2
1.3. Fontos egyenlőségek, egyenlőtlenségek	3
1.4. Halmazok	7
1.5. Függvények	9
1.6. Valós számok	11
1.6.1. Műveletek és rendezés	11
1.6.2. Intervallumok és környezetek	12
1.6.3. Természetes, egész és racionális számok	13
1.6.4. Felső és alsó határ	14
1.6.5. Valós számok hatványai	16
2. Elemi függvények	17
2.1. Valós függvények alaptulajdonságai	17
2.2. Az elemi függvények	18
2.2.1. Hatványfüggvények	18
2.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények	21
2.2.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik	23
2.2.4. Hiperbolikus függvények és inverzeik	26
2.2.5. Néhány különleges függvény	31
3. Sorozatok	33
3.1. A sorozat fogalma és tulajdonságai	33
3.2. Sorozat véges határértéke	34
3.3. Műveletek konvergens sorozatokkal	37
3.4. Részsorozatok	39
3.5. Sorozat $\lim \sup$ -ja és $\lim \inf$ -je	40
3.6. Cauchy-féle konvergencia-kritérium	41
3.7. Divergens sorozatok, sorozatok végtelen határértéke	42
3.8. Sorozatok közép-sorozatai	45
3.9. Nevezetes sorozathatárértékek	47
3.10. Valós számok valós kitevőjű hatványai	50
4. Függvények határértéke és folytonossága	53
4.1. Torlódási pontok	53
4.2. Függvény határértéke	54
4.3. Függvény folytonossága	58
4.4. Határérték, folytonosság – és kompozíció	61
4.5. Jobb és bal oldali határértékek	62

4.6. Elemi függvények folytonossága és határértéke	65
4.7. Nevezetes függvényhatárértékek	68
4.8. Folytonos függvények tulajdonságai	72
5. Sorok	77
5.1. Végtelen sorok	77
5.2. Konvergenciakritériumok	80
5.3. Végtelen sorok átrendezései, Cauchy-szorzata	84
5.4. A sorok néhány alkalmazásáról	87
5.4.1. Végtelen tizedestörtek	87
5.4.2. Az e szám irracionális	88

Előszó

Ez a jegyzet a 2009/2010-es tanév őszi félévében tartott Analízis I. kurzus anyagához készült. A jegyzet a félév során folyamatosan bővül, az utolsó változtatás dátuma a címlapon látható. A jegyzetben bizonyára előfordulhatnak hibák – ezek jelzését örömmel veszem a `seszter@cs.elte.hu` e-mail-címen!

A jegyzet során az alábbi jelöléseket használom:

\mathbb{N} természetes számok, a 0-t is beleértve;

\mathbb{Z} egész számok;

\mathbb{Q} racionális számok;

\mathbb{R} valós számok;

\mathbb{R}^+ pozitív valós számok;

\mathbb{R}^- negatív valós számok (és hasonlóan: \mathbb{Z}^+ , \mathbb{N}^+ , stb.)

Első fejezet

Bevezetés

1.1. Logikai állítások, műveletek, tagadás

A következőkben néhány alapvető logikai fogalmat tárgyalunk.

1.1. Definíció. *Állításnak* nevezünk egy olyan kijelentést, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Pl.: Ez az alma piros. A tábla zöld.

1.2. Definíció. *Logikai műveletek:* Állításokból gyártanak új állításokat. Legyen A és B egy-egy állítás.

(a) *és*, jele: \wedge

$A \wedge B$ pontosan akkor igaz, ha A és B is igaz.

(b) *vagy*, jele: \vee (fontos! megengedő vagy)

$A \vee B$ pontosan akkor hamis, ha A és B is hamis.

(c) *nem*, jele: \neg

$\neg A$ pontosan akkor igaz, ha A hamis (és fordítva).

(d) *következtetés (implikáció)*, jele: \Rightarrow

$A \Rightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $\neg A$ vagy B igaz.

(e) *ekvivalencia*, jele: \Leftrightarrow

$A \Leftrightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ is igaz.

1.3. Definíció. *Nyitott mondat:* olyan állítás, mely változót tartalmaz. Igazságértéke a változó értékétől függ.

Pl.: Az n szám négyzetszám. $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ha $A(x)$ nyitott mondat (x a változó), akkor ebből új állításokat nyerhetünk a \exists (létezik) és \forall (minden) ún. *kvantorok* segítségével:

$$(\forall x)A(x),$$

$$(\exists x)A(x).$$

Például: $(\forall x) x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

A fenti állítások *tagadása*:

$$\neg((\forall x)A(x)) = (\exists x)\neg A(x),$$

$$\neg((\exists x)A(x)) = (\forall x)\neg A(x).$$

A példában szereplő állítás tagadása: $(\exists x) x^2 - 3x + 2 < 0$.

1.2. Bizonyítási módszerek

Indirekt bizonyítás

Ennek a bizonyítási módszernek a menete, hogy feltesszük a bizonyítandó állítás ellenkezőjét, és ebből ellentmondásra jutunk.

Példa:

1.4. Állítás. $\sqrt{2}$ irracionális.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan p, q pozitív egész számok, $q \neq 0$, továbbá p és q legnagyobb közös osztója 1, melyekre

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ amiből } 2q^2 = p^2.$$

Ebből látszik, hogy p^2 , így p is páros szám kell legyen, vagyis $p = 2r$, ahol r egész. Így

$$2q^2 = 4r^2, \text{ vagyis } q^2 = 2r^2,$$

tehát q is páros. Ez ellentmond annak, hogy p és q legnagyobb közös osztója 1, tehát a kiinduló feltevés hamis, így $\sqrt{2}$ irracionális. \square

Teljes indukció

Teljes indukcióval olyan állításokat bizonyítunk, melyek *minden* n (vagy *minden elég nagy* n) természetes számra vonatkoznak. A teljes indukció menete a következő.

1. Belátjuk az állítást $n = 0$ -ra (vagy arra a legkisebb n -re, amiről az állítás szól).
2. Belátjuk a következőt: *ha* az állítás *valamelyik* n természetes számra igaz, *akkor* igaz $n+1$ -re is.

A természetes számok tulajdonságaiból következik, hogy a fenti két lépés bizonyításával az állítást *minden* természetes számra beláttuk. Ugyanis, az 1. lépés alapján az állítás igaz $n = 0$ -ra. A 2. lépésből tudjuk, hogy *ekkor* az állítás igaz $n = 0 + 1 = 1$ -re is. Ismét alkalmazva a 2. lépést, tudjuk, hogy az állítás igaz $n = 1 + 1 = 2$ -re. És így tovább – „végtelen sok lépés után” kapjuk, hogy az állítás *minden* n természetes számra teljesül.

A 2. lépésben szereplő feltevést szokás *indukciós feltételnek* is nevezni.

Példa:

1.5. Állítás. Minden $n \geq 1$ természetes számra

$$2^n > n.$$

Bizonyítás. Végrehajtjuk a teljes indukció lépéseit.

1. $n = 1$ esetén az egyenlőtlenség $2^1 > 1$ alakú, és mivel $2^1 = 2$, ezért $2 > 1$ teljesül.

2. Most tegyük fel, hogy az állítás *valamelyik* n természetes számra igaz, vagyis *erre* az n -re $2^n > n$. Lássuk be, hogy ekkor $n + 1$ -re is igaz! A belátandó állítás tehát:

$$2^{n+1} > n + 1.$$

Mivel $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, és a feltevés szerint $2^n > n$, ezért

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n.$$

Másrészt bármilyen $n \geq 1$ egészre $2 \cdot n \geq n + 1$, tehát

$$2^{n+1} > n + 1,$$

és ezt kellett belátnunk.

□

1.6. *Megjegyzés.* A fenti állítás $n = 0$ -ra is teljesül (hiszen $2^0 = 1 > 0$), de az indukciós lépés csak $n \geq 1$ esetén működik.

Fontos látnunk, hogy az indukció 2. lépésében *nem* azt tesszük fel, hogy az állítás *bármely* n -re igaz – hiszen akkor magának az állításnak az igaz-voltát tételeznénk fel, amit pedig bizonyítani akarunk. *Csak* annyit teszünk fel, hogy az állítás *egy (valamelyik)* n természetes számra igaz. Ilyen n létezik, hiszen az 1. lépésben éppen ezt láttuk be.

1.3. Fontos egyenlőségek, egyenlőtlenségek

1.7. **Tétel** (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Minden* $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \geq -1$, $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 1$ vagy $a = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 1$ esetén a belátandó állítás

$$1 + a \geq 1 + a,$$

ami tetszőleges a -ra igaz.

2. Tegyük fel most, hogy az állítás *valamelyik* $n \in \mathbb{Z}^+$ -ra igaz! Lássuk be, hogy ekkor az egyenlőtlenség $n + 1$ -re is teljesül, vagyis

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a.$$

Az indukciós feltevés szerint

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

Ebből, kihasználva, hogy $1 + a \geq 0$ (mivel $a \geq -1$) kapjuk, hogy

$$(1 + a) \cdot (1 + a)^n \geq (1 + a) \cdot (1 + n \cdot a) = 1 + (n + 1) \cdot a + n \cdot a^2. \quad (1.1)$$

Tudjuk, hogy

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a) \cdot (1 + a)^n, \quad (1.2)$$

Összevetve (1.1)-et és (1.2)-t kapjuk, hogy

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a + n \cdot a^2 \geq 1 + (n + 1) \cdot a, \quad (1.3)$$

amit látni akartunk.

Hátravan még az egyenlőség teljesülésének esete. Világos, hogy $n = 1$ ill. $a = 0$ esetén egyenlőség teljesül. Ha azt tesszük fel, hogy egyenlőség van, akkor ezt n helyett $n + 1$ -re felírva, (1.3) alapján

$$(1 + a)^{n+1} = 1 + (n + 1) \cdot a + n \cdot a^2 = 1 + (n + 1) \cdot a$$

kell igaz legyen, amiből $n \cdot a^2 = 0$. Ezért vagy $n = 0$, és akkor $n + 1 = 1$, vagy $a = 0$. \square

1.8. Tétel (Binomiális tétel). *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n, \quad (1.4)$$

másképp írva:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Itt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 0$ esetén az egyenlőség

$$(a + b)^0 = \binom{0}{0}b^0,$$

ami $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy az (1.4) egyenlőség *valamelyik* n -re teljesül! Belátjuk, hogy $n + 1$ -re is igaz. Mivel $(a + b)^{n+1} = (a + b) \cdot (a + b)^n$, ezért az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \cdot \left(\binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n \right) \\ &= \binom{n}{0}ab^n + \binom{n}{1}a^2b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}a^n b + \binom{n}{n}a^{n+1} + \\ &+ \binom{n}{0}b^{n+1} + \binom{n}{1}ab^n + \binom{n}{2}a^2b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}a^n b \\ &= \binom{n}{0}b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] ab^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] a^2b^{n-1} + \dots \\ &+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] a^n b + \binom{n}{n}a^{n+1}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ esetén

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

továbbá

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$$

kapjuk, hogy

$$(a + b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}b^{n+1} + \binom{n+1}{1}ab^n + \binom{n+1}{2}a^2b^{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n}a^n b + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1},$$

ami épp a bizonyítandó állítás $n + 1$ -re.

□

1.9. Tétel (Számítási-mértani-harmonikus közép közti egyenlőtlenség).

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ tetszőleges számok ($n \geq 1$). Ekkor

$$\begin{aligned} A_n &:= \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} && \text{(számítási közép),} \\ G_n &:= \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} && \text{(mértani/geometriai közép),} \\ H_n &:= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} && \text{(harmonikus közép)} \end{aligned}$$

jelöléssel

$$H_n \leq G_n \leq A_n. \quad (1.5)$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n = 1$ esetben triviális. Tegyük fel most, hogy valamely n -re és tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ számokra

$$A_n \geq G_n.$$

Legyenek adva $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} > 0$ számok, és tegyük fel, hogy úgy vannak sorba rendezve, hogy a_{n+1} az (egyik) legnagyobb közülük (világos, hogy az állítás nem függ a számok sorrendjétől). Be kell látnunk, hogy $A_{n+1} \geq G_{n+1}$, vagyis mindkét oldalt $n + 1$. hatványra emelve

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n + 1} \right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}, \quad (1.6)$$

ami a belátandó állítással ekvivalens. Az alábbi átalakítást végezzük:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n + 1} \right)^{n+1} &= \left(\frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n + 1} \right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{(n + 1) \cdot A_n + a_{n+1} - A_n}{n + 1} \right)^{n+1} \\ &= \left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n + 1} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Mivel a_{n+1} az (egyik) legnagyobb szám, ezért könnyen látható, hogy $a_{n+1} - A_n \geq 0$. Így a kapott kifejezést a Binomiális tétel szerint kifejtve az (1.4) összegben minden tag pozitív. Ezért a hatvány értékét csökkentjük, ha az (1.4) összegnek csak az utolsó két tagját hagyjuk meg, vagyis

$$\begin{aligned} \left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n + 1} \right)^{n+1} &\geq \binom{n + 1}{n} A_n^n \cdot \frac{a_{n+1} - A_n}{n + 1} + \binom{n + 1}{n + 1} A_n^{n+1} \\ &= (n + 1) \cdot A_n^n \cdot \frac{a_{n+1} - A_n}{n + 1} + A_n^{n+1} \\ &= A_n^n \cdot (a_{n+1} - A_n) + A_n^{n+1} = A_n^n \cdot a_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Az indukciós feltevés szerint

$$A_n^n \cdot a_{n+1} \geq G_n^n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1},$$

tehát (1.7) és (1.8) alapján

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n + 1} \right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1},$$

ami éppen a bizonyítandó (1.6) egyenlőtlenség.

A mértani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség könnyen adódik az előbb bizonyított mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségből. Alkalmazzuk ez utóbbit az $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ számok reciprokaira, ebből

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdots a_n}}.$$

Mindkét oldal reciprokát véve kapjuk:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Ha $a_1 = \dots = a_n$, akkor az (1.5) egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek. Belátjuk, hogy

$$G_n = A_n \implies a_1 = \dots = a_n,$$

a harmonikus közép esete hasonlóan bizonyítható. Tegyük fel indirekt, hogy $A_n = G_n$, de például $a_1 \neq a_2$. Cseréljük ki a_1 -t és a_2 -t is $\frac{a_1+a_2}{2}$ -re, az a_3, \dots, a_n számokat hagyjuk változatlanul! Ekkor könnyen látható, hogy az

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, \dots, a_n$$

számok számtani közepének értéke változatlanul A_n . Másrészt

$$a_1 \cdot a_2 < \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \iff 0 < (a_1 - a_2)^2$$

teljesül, mivel $a_1 \neq a_2$. Így

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} = A_n = G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdots a_n}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \dots, a_n$ számok mértani közepe nagyobb, mint a számtani közepe – ami ellentmondás. \square

A fenti egyenlőtlenség-láncolathoz kapcsolható még egy: a négyzetes közepéről szóló. Az a_1, a_2, \dots, a_n számok ($n \geq 1$) *négyzetes közepe*:

$$Q_n := \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

1.10. Tétel. Az $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ számok ($n \geq 1$) közepei között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n.$$

Bizonyítás. Világos, hogy a fentiek alapján elég az utolsó egyenlőtlenséget bizonyítani. Teljes indukcióval járunk el.

1. Az állítás $n = 1$ -re triviálisan teljesül. Lássuk be $n = 2$ -re, hogy $A_2 \leq Q_2$, mert erre a bizonyítás során később szükségünk lesz! Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} &\iff \frac{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2}{4} \leq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \\ &\iff a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2 \iff 0 \leq (a_1 - a_2)^2, \end{aligned}$$

ami teljesül.

2. Tegyük fel, hogy valamely n -re és tetszőleges a_1, \dots, a_n számokra igaz, hogy $A_n \leq Q_n$. Legyenek adva a_1, \dots, a_n, a_{n+1} valóságok. Be kell lássuk, hogy a belőlük képezett számtani közép kisebb vagy egyenlő, mint a négyzetes közép – vagy ami ezzel ekvivalens:

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1}. \quad (1.9)$$

Átalakítva a bal oldalt, az alábbi kapjuk:

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^2 = \left(\frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^2 = \frac{n^2 A_n^2 + 2n A_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2}. \quad (1.10)$$

Kihhasználva az indukciós feltételt, vagyis hogy $A_n^2 \leq Q_n^2$, kapjuk:

$$\frac{n^2 A_n^2 + 2n A_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \leq \frac{n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + 2n A_n \cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2}{(n+1)^2}. \quad (1.11)$$

A jobb oldalon a számlálóban a 2. tag

$$2n A_n \cdot a_{n+1} = 2 \cdot (a_1 + \dots + a_n) \cdot a_{n+1} = 2 \cdot (a_1 \cdot a_{n+1} + \dots + a_n \cdot a_{n+1})$$

alakú. Alkalmazzuk minden tagra az $n = 2$ -re már belátott $G_2(\leq A_2) \leq Q_2$ egyenlőtlenséget! Ebből

$$a_j \cdot a_{n+1} \leq \frac{a_j^2 + a_{n+1}^2}{2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Így tovább alakítva (1.11) jobb oldalát:

$$\begin{aligned} & \frac{n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + 2 \cdot (a_1 \cdot a_{n+1} + \dots + a_n \cdot a_{n+1}) + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \\ & \leq \frac{n(a_1^2 + \dots + a_n^2) + (a_1^2 + \dots + a_n^2) + n \cdot a_{n+1}^2 + a_{n+1}^2}{(n+1)^2} \\ & = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Egybevetve (1.10)-et, (1.11)-et és (1.12)-t kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2}{n+1},$$

ami épp a bizonyítandó állítás. □

1.4. Halmazok

Egy **halmazt** akkor tekintünk ismertnek, ha minden jól megfogalmazható dologról el tudjuk dönteni, hogy hozzá tartozik vagy nem tartozik hozzá. (Az „okos gondolat”, a „szép lány”, az „elégg nagy szám” vagy a „kicsi pozitív szám” nem tekinthető jól megfogalmazott dolognak, ezekről nem kérdezzük vagy hogy benne vannak-e valamilyen halmazban vagy hogy alkotnak-e halmazt.)

Legyen A halmaz, x egy jól definiált dolog. Ha x hozzátartozik a halmazhoz, akkor ezt $x \in A$ jelölje. Ha x nem tartozik hozzá a halmazhoz, akkor ezt $x \notin A$ jelöli.

A halmaz elemeit felsorolhatjuk, például

$$A := \{a, b, c, d\}.$$

Ilyenkor minden elemet csak egyszer sorolunk fel. Más módon egy értelmes tulajdonsággal adhatjuk meg a halmazt, például

$$B := \{x : x \text{ valós szám és } x^2 < 2\}.$$

A B halmaz megadásánál használni fogjuk az alábbi (kevésbé precíz) felírást is:

$$B := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}.$$

1.11. Definíció. Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy A része vagy *részhalma* a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$. Jele: $A \subset B$.

1.12. Definíció. Legyen A és B halmaz. Az A halmaz *egyenlő* a B halmazzal, ha ugyanazok az elemei. Jele: $A = B$.

Fontos, hogy az analízisben a fenti \subset halmazok közötti ún. reláció jelenthet egyenlőséget is. Könnyen meggondolható az alábbi

1.13. Állítás. Legyen A és B halmaz. $A = B$ pontosan akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.

A következőkben definiálunk néhány műveletet, melyekkel halmazokból újabb halmazokhoz juthatunk.

1.14. Definíció. Legyen A és B halmaz.

Az A és B *egyesítése (uniója)* az a halmaz, amelyre

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

Az A és B *metszete (közös része)* az a halmaz, amelyre

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

Az A és B *különbsége* az a halmaz, amelyre

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

A metszet és a különbség képzése során elképzelhető, hogy egyetlen x dolog sem rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Azt a halmazt, amelynek bármely jól definiálható dolog sem eleme, **üres halmaznak** nevezzük. Jele: \emptyset .

Legyen H halmaz és $A \subset H$ egy részhalma. Az A halmaz (H -ra vonatkozó) *komplementerén* az $A^c := H \setminus A$ halmazt értjük (a komplementerhalmaz jelölésére sosem fogjuk az \bar{A} -t használni, mert ez a későbbiekben mást fog jelenteni!). Itt fontos szerepe van a H ún. alaphalmaznak is. Legyen például $A := [0,1]$ zárt intervallum. Ha $H = \mathbb{R}$, akkor $A^c = H \setminus A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ nyílt intervallumok uniója. Ha azonban $H = [0,2]$, akkor $A^c = H \setminus A = (1,2]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum.

*De Morgan-azonosságok*nak nevezik a következő tételt.

1.15. Tétel. Legyen H halmaz, $A, B \subset H$. Ekkor

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{és} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Bizonyítás. Házi feladat. □

Tekintsük alapfogalomnak az (a, b) **rendezett párt**, amelynek lényeges tulajdonsága, hogy

$$(a, b) = (c, d) \text{ pontosan akkor, ha } a = c \text{ és } b = d.$$

A rendezett pár segítségével értelmezzük a halmazok szorzatát.

1.16. Definíció. Legyen A, B halmaz. Az A és B *Descartes-szorzata*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ és } b \in B\}$$

rendezett párokból álló halmaz.

Például $A := \{2, 3, 5\}$, $B := \{1, 3\}$ esetén

$$A \times B = \{(2,1), (2,3), (3,1), (3,3), (5,1), (5,3)\}.$$

1.5. Függvények

A **függvény** fogalmát alapfogalomnak tekintjük – halmazok közötti egyértelmű hozzárendelést értünk alatta. Az x -hez hozzárendelt elemet $f(x)$ -szel jelöljük. Ha X és Y tetszőleges halmazok, akkor

$$f : X \rightarrow Y$$

egy olyan függvény, melyre

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f) \subset X \text{ esetén } f(x) \in Y.$$

$\mathcal{D}(f)$ jelöli az f függvény *értelmezési tartományát*, vagyis

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in X : x\text{-hez } f \text{ hozzárendel valamit}\},$$

ami az X egy részhalmaza. Az f függvény $\mathcal{R}(f)$ -el jelölt *értékkészlete* Y -nak részhalmaza és

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ valamely } x \in \mathcal{D}(f)\text{-re}\}.$$

Fontos fogalom a függvény grafikonja.

1.17. Definíció. Egy $f : X \rightarrow Y$ függvény *grafikonja* a $\mathcal{D}(f) \times \mathcal{R}(f)$ Descartes-szorzat alábbi részhalmaza:

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\},$$

vagyis az $(x, f(x))$ alakú pontok halmaza, ahol x az f értelmezési tartományából való.

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja tehát az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, vagyis a sík egy részhalmaza, és az $(x, f(x))$ alakú pontokat tartalmazza.

Egy függvény inverze csak speciális, ún. kölcsönösen egyértelmű függvények esetén értelmezhető.

1.18. Definíció. Legyen $f : X \rightarrow Y$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *kölcsönösen egyértelmű* vagy *injektív*, ha különböző $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ elemeknek különböző Y -beli elemeket feleltet meg, azaz

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), x_1 \neq x_2 \text{ esetén } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Másképp:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Az $f : X \rightarrow Y$ *bijektív függvény* vagy *bijekció*, ha f injektív, $\mathcal{D}(f) = X$ és $\mathcal{R}(f) = Y$.

1.19. Definíció. Legyen $f : X \rightarrow Y$ injektív függvény. Ekkor az f *inverze* vagy *inverzfüggvénye* az az

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$$

függvény, mely egy $y \in \mathcal{R}(f)$ ponthoz azt az egyértelműen létező $x \in \mathcal{D}(f)$ pontot rendeli, amelyre $f(x) = y$, vagyis

$$\text{bármely } f(x) = y \in \mathcal{R}(f) \text{ esetén } f^{-1}(y) = x.$$

1.20. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha $f : X \rightarrow Y$ injektív, akkor az $f^{-1} : Y \rightarrow X$ függvényre $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$, továbbá f^{-1} is injektív. Ha f bijektív, akkor f^{-1} is bijektív.

Könnyen meggondolható, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor $\text{graph}(f^{-1}) \subset \mathbb{R}^2$ úgy nyerhető, hogy $\text{graph}(f)$ -et tükrözzük a 45° -os ($y = x$) egyenesre.

1.21. Definíció. Legyen $g : X \rightarrow Y, f : Y \rightarrow Z$. Ekkor az f és g függvények *kompozíciója* az az $f \circ g : X \rightarrow Z$ függvény, melyre

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\},$$

és

$$\text{bármely } x \in \mathcal{D}(f \circ g) \text{ esetén } (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

1.22. Példa. A g függvény minden szám duplájához 1-et adjon hozzá

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := 2x + 1;$$

az f függvény pedig minden számot emeljen négyzetre

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2,$$

akkor

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$$

lesz az f és g kompozíciója.

1.23. Definíció. Legyen $f : X \rightarrow Y$ és $H \subset \mathcal{D}(f)$. Az f függvény H -ra való *leszűkítése* az az $f|_H : H \rightarrow Y$ függvény, amelyre bármely $x \in H$ esetén $f|_H(x) := f(x)$.

A továbbiakban a véges, megszámlálható és a megszámlálhatóan végtelen halmaz fogalmát definiáljuk.

1.24. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *véges*, ha létezik $n \in \mathbb{Z}^+$ és $\phi : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha létezik $\phi : A \rightarrow \mathbb{N}$ bijekció.

Azt mondjuk, hogy az A halmaz *megszámlálható*, ha létezik $\phi : A \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\phi) = A$ injektív függvény.

A definíciókból következik, hogy egy megszámlálható halmaz vagy véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Példák megszámlálhatóan végtelen halmazokra:

1. Legyen A a páros természetes számok halmaza, vagyis

$$A := \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Könnyen(!) látható, hogy a

$$\phi(n) := 2n, n \in \mathbb{N}$$

függvény bijekciót létesít \mathbb{N} és A között.

2. Meglehető, de a racionális számok \mathbb{Q} halmaza megszámlálható.

Írjuk fel az $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ nevezőjű törteket soronként.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & \leftarrow & -\frac{1}{1} & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & \dots \\ & & \downarrow & & \uparrow & & & \downarrow & \uparrow & & \downarrow & \\ \dots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\ & & \downarrow & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\ \dots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots \\ & & & & & & & & & & & \downarrow & \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \end{array}$$

A $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ bijekciót úgy készítjük, hogy

$$\phi(1) := \frac{0}{1}, \quad \phi(2) := \frac{1}{1}, \quad \phi(3) := \frac{1}{2}, \quad \phi(4) := -\frac{1}{2}, \dots$$

A rajz szerinti lépegetéssel haladunk, úgyelve arra, hogy olyan törtet ugorjunk át, amely már egyszer sorra került. Ezzel biztosítjuk, hogy valóban kölcsönösen egyértelmű maradjon a függvényünk. Látható az is, hogy előbb-utóbb minden racionális számhoz eljutunk, így ϕ bijekció lesz \mathbb{N} és \mathbb{Q} között, ami azt jelenti, hogy \mathbb{Q} megszámlálható.

1.6. Valós számok

Kiskorunktól számolunk a valós számokkal, összeadjuk, szorozzuk, osztjuk őket, hatványozunk, abszolút értékét vesszük a számoknak. Egyenleteket, egyenlőtlenségeket „rendezünk”. Most lefektetjük azt a viszonylag egyszerű szabályrendszert, amelyből a megtanult eljárások levezethetők.

1.6.1. Műveletek és rendezés

Legyen \mathbb{R} nem üres halmaz. Tegyük fel, hogy van még egy összeadásnak nevezett $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és egy szorzásnak nevezett \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény is, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- a1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás)
- a2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)
- a3. van olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$ (0 az összeadás egységeleme)
- a4. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $-a \in \mathbb{R}$ ellentett elem, hogy $a + (-a) = 0$.

- m1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitás)
- m2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asszociativitás)
- m3. van olyan $1 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = a$ (1 a szorzás egységeleme)
- m4. bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén van olyan $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ reciprok elem, hogy $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

- d. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (disztributív a szorzás az összeadásra nézve)

Látható, hogy a szorzás szabályrendszere a 4. követelményben lényegesen eltér az összeadástól (egyébként nem is különbözne az összeadás és a szorzás). A d. is az eltérést erősíti.

Tegyük fel, hogy \mathbb{R} -en van egy olyan \leq (kisebb vagy egyenlőnek nevezett) ún. rendezési reláció, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- r1. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq a$ (reflexív),
- r2. ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$ (antiszimmetrikus),
- r3. ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ (tranzitív),
- r4. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$ (teljes),
- r5. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor $a + c \leq b + c$.
- r6. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $0 \leq c$, akkor $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Állapodjunk meg abban, hogy az $a \leq b$, $a \neq b$ helyett $a < b$ jelölést használunk.

Az a1.–a4., m1.–m4., d., r1.–r6. alapján levezethető az összes egyenlőség és egyenlőtlenséggel kapcsolatos „szabály”. Kiegészítésül három fogalmat külön is megemlítünk.

1.25. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$.

Az osztás tehát elvégezhető a valós számokkal.

1.26. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az x abszolút értéke

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Hasznosak az abszolút értékkel kapcsolatos egyenlőtlenségek.

- 1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |x|$.
- 2. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon$. Ekkor $(x \leq \varepsilon \text{ és } -x \leq \varepsilon) \iff |x| \leq \varepsilon$.
- 3. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $|a + b| \leq |a| + |b|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

4. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Ezek az állítások könnyen igazolhatóak. A 4. bizonyítását megmutatjuk. Tekintsük az $a = a - b + b$ egyenlőtlenséget. Ekkor a 3. szerint

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Az r2. szerint $-|b|$ számot mindkét oldalhoz hozzáadva nem változik az egyenlőtlenség

$$|a| + (-|b|) = |a| - |b| \leq |a - b|. \quad (1.13)$$

Hasonló megfontolással

$$\begin{aligned} b &= b - a + a \\ |b| &= |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad / -|a| \\ |b| - |a| &\leq |b - a| \end{aligned}$$

$$-(|a| - |b|) \leq |b - a| = |a - b|. \quad (1.14)$$

Az (1.13) és az (1.14) a 2. tulajdonság szerint ($x := |a| - |b|$; $\varepsilon := |a - b|$ szereposztással) éppen azt jelenti, hogy $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

1.6.2. Intervallumok és környezetek

1.27. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy I *intervallum*, ha bármely $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén ha $x_1 < x < x_2$, akkor $x \in I$.

1.28. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ekkor az alábbi halmazok mindegyike intervallum.

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ [a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\ (a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}; (0, +\infty) =: \mathbb{R}^+ \\ (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}; (-\infty, 0) =: \mathbb{R}^- \\ (-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Megemlítjük, hogy az $[a, a] = \{a\}$ és az $(a, a) = \emptyset$ ún. *elfajuló* intervallumok.

1.29. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$. Az a pont r sugarú környezetén a

$$K_r(a) := (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. Azt mondjuk, hogy $K(a)$ az a pont egy környezete, ha van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $K(a) = K_r(a)$.

1.6.3. Természetes, egész és racionális számok

Most elkülönítjük az \mathbb{R} egy nevezetes részhalmazát.

Legyen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ olyan részhalmaz, amelyre

1° $0 \in \mathbb{N}$

2° bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \in \mathbb{N}$

3° bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \neq 0$ (a 0 az „első” elem)

4° abból, hogy a) $S \subset \mathbb{N}$

b) $0 \in S$

c) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \in S$

következik, hogy $S = \mathbb{N}$. (Teljes indukció.)

Az \mathbb{R} -nek az ilyen \mathbb{N} részhalmazát a **természetes számok halmazának** nevezzük.

Kiegészítésül álljon itt még néhány megállapodás:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{m \in \mathbb{R} : -m \in \mathbb{N}\}$ az **egész számok halmaza**

$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} : \text{van olyan } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0, \text{ hogy } x = \frac{p}{q}\}$ a **racionális számok halmaza**

$\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az **irracionális számok halmaza**.

Az \mathbb{N} segítségével a műveleti és rendezési szabályrendszer mellé a harmadik követelményt illesztjük az \mathbb{R} -hez.

Archimedeszi axióma: Bármely $x \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n$.

Könnyen látható, hogy ezen axiómával ekvivalens az alábbi:

Archimedeszi axióma - változat: Bármely $y > 0$ valós számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n} < y$.

Az Archimedeszi axióma egy fontos következménye, hogy minden (nyílt) intervallumban van racionális szám. Ez valami olyasmit jelent, hogy a racionális számok „sűrűn” helyezkednek el a számegyenesen.

1.30. Következmény. *Legyenek $a < b$ tetszőleges valós számok. Ekkor az (a, b) nyílt intervallumban van racionális szám, vagyis*

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $0 < a < b$, a többi eset hasonlóan meggondolható. A bizonyítás alapgondolata, hogy az Archimedeszi axióma biztosítja, hogy az a és b számokhoz található egy olyan $q \in \mathbb{N}$ szám, mellyel mindkettőt megszorozva a különbségük nagyobb, mint 1, vagyis

$$1 < qb - qa.$$

Ekkor a (qa, qb) nyílt intervallumban van $p \in \mathbb{N}$ természetes szám, így $a < \frac{p}{q} < b$ teljesül. Nézzük részletesen!

Az Archimedeszi axióma szerint az

$$\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$$

számhoz található olyan $q \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{1}{b-a} < q. \tag{1.15}$$

Másrészt, szintén az Archimedeszi axióma miatt választhatunk olyan $p \in \mathbb{N}$ *legkisebb* számot, melyre $qa < p$, vagyis melyre

$$qa < p \leq qa + 1 \quad (1.16)$$

teljesül. Mivel (1.15) miatt

$$qa + 1 < qb,$$

ezért az (1.16)-ból kapjuk:

$$qa < p < qb \Leftrightarrow a < \frac{p}{q} < b,$$

vagyis

$$\frac{p}{q} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

□

Az Archimedeszi axiómával sem vált még minden igényt kielégítővé az \mathbb{R} . Ugyanis belátható, hogy \mathbb{Q} , a racionális számok halmaza kielégíti az összes fenti axiómát – tehát ezek az axiómák nem biztosítják az irracionális számok létezését (a számegegyenesen maradtak „lyukak”). Szükségünk lesz még egy utolsó axiómára, amelyet néhány fogalommal készítünk elő.

1.6.4. Felső és alsó határ

1.31. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy A *felülről korlátos* számhalmaz, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \leq K$. Az ilyen K az A halmaz egyik *felső korlátja*.

Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. Tekintsük a

$$B := \{K \in \mathbb{R} : K \text{ felső korlátja az } A \text{ halmaznak}\}$$

halmazt. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ a B halmaz legkisebb eleme, azaz olyan szám, amelyre

1° $\alpha \in B$ (α is felső korlátja az A halmaznak)

2° bármely $K \in B$ felső korlátra $\alpha \leq K$.

A kérdés csupán az, hogy van-e ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$.

Felső határ axiómája: Minden felülről korlátos $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ halmaznak **van** legkisebb felső korlátja.

Az ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az A halmaznak) a halmaz *felső határának* nevezzük, és így jelöljük:

$$\alpha := \sup A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz szuprémuma”})$$

Nyilván igaz a $\sup A$ két tulajdonsága:

1° bármely $a \in A$ esetén $a \leq \sup A$

2° bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $(\sup A) - \varepsilon < a'$.

Ha $\sup A \in A$, akkor $\sup A$ az A halmaz *maximuma*.

1.32. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ felülről *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint

$$\sup A := +\infty.$$

Nézzük meg most egy példán, hogyan biztosítja a felső határ axiómája az irracionális számok létezését!

1.33. Példa. Tekintsük az alábbi halmazt!

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

Világos, hogy A nem üres, hiszen például $0 \in A$. Másrészt A felülről korlátos, mivel 2 nyilván egy felső korlátja. A Felső határ axiómája szerint létezik A -nak legkisebb felső korlátja, $\sup A \in \mathbb{R}$, amiről belátható, hogy nem lehet racionális. Ezt a $\sup A$ számot nevezzük $\sqrt{2}$ -nek.

A műveleti, rendezési szabályrendszerrel, az Archimedeszi axiómával és a Felső határ axiómájával teljessé tettük az \mathbb{R} valós számok halmazát. Ezzel biztos alapot teremtettünk a jövőbeni számolásokhoz is.

Néhány további megállapodás.

1.34. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy A *alulról korlátos*, ha van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy minden $a \in A$ esetén $L \leq a$. Az L az A halmaz egyik *alsó korlátja*.

Legyen $A \neq \emptyset$ alulról korlátos számhalmaz. Az A alsó korlátjai közül a legnagyobb a halmaz *alsó határa*. (Ennek létezéséhez már nem kell újabb axióma, visszavezethető a felső határ létezésére.)

Az A halmaz alsó határát

$$\inf A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz infimuma”})$$

jelölje. Nyilván igaz, hogy

1° bármely $a \in A$ esetén $\inf A \leq a$

2° bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $a' < (\inf A) + \varepsilon$.

Ha $\inf A \in A$, akkor $\inf A$ az A halmaz *minimuma*.

1.35. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ alulról *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint

$$\inf A := -\infty.$$

1.36. *Megjegyzés.* A fentiekben nem volt szándékunk a valós számok precíz axiomatikus felépítése. Megjegyezzük, hogy az Archimedeszi axióma mellé elég lett volna az alábbi axiómát feltenni, hogy biztosítsuk az irracionális számok létezését.

Cantor-axióma: Legyenek $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ ún. egymásba skatulyázott zárt intervallumok, vagyis

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor ezen intervallumoknak van közös pontja, vagyis

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

1.37. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az Archimedeszi és Cantor-axiómák együtt ekvivalensek a Felső határ axiómájával, vagyis

$$(\text{Archimedeszi axióma} + \text{Cantor-axióma}) \iff \text{Felső határ axiómája}.$$

1.6.5. Valós számok hatványai

1.38. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $a^1 := a$, $a^2 := a \cdot a$, $a^3 := a^2 \cdot a$, \dots , $a^n := a^{n-1} \cdot a$, \dots

1.39. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a$. A \sqrt{a} jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete a , azaz $0 \leq \sqrt{a}$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Vegyük észre, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = |a|$.

1.40. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k+1]{a}$ jelentse azt a valós számot, amelynek $(2k+1)$ -edik hatványa a .

Vegyük észre, hogy ha $0 < a$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, és ha $a < 0$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} < 0$.

1.41. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $0 \leq a$, $k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k]{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek $(2k)$ -edik hatványa a .

A gyökök létezése a Felső határ axiómájából következik hasonlóan, mint az 1.33. Példában, de itt nem részletezzük.

Vezessük be a következő jelölést: ha $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ az n paritásának megfelelő, akkor

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

1.42. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

1.43. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

1.44. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $a^0 := 1$.

Látható, hogy ezzel a definíciólánccal egy $a \in \mathbb{R}^+$ bármely $r \in \mathbb{Q}$ racionális kitevőjű hatványát értelmeztük. Belátható, hogy a definíciókban szereplő számok egyértelműen léteznek, és érvényesek a következő azonosságok:

1. $a \in \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
2. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,
3. $a \in \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

A későbbiekben definiálni fogjuk egy szám irracionális kitevős hatványát is.

Második fejezet

Elemi függvények

Ismertetjük a valós számok halmazán értelmezett, valós szám értékű függvények legfontosabb tulajdonságait. Definiáljuk a gyakran használt valós függvényeket, melyeket elemi függvényeknek neveznek. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Műveletek; korlátos, monoton, periodikus, páros, páratlan függvény fogalma
- Hatványfüggvények
- Exponenciális és logaritmus függvények
- Trigonometrikus, hiperbolikus függvények és inverzeik

2.1. Valós függvények alaptulajdonságai

2.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *valós függvénynek* nevezünk.

2.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lambda f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \mathcal{D}(\lambda f) = \mathcal{D}(f).$$

2.3. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$. Ekkor $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), & \mathcal{D}(f + g) &= \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), & \mathcal{D}(f \cdot g) &= \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g). \end{aligned}$$

2.4. Definíció. Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H := \mathcal{D}(g) \setminus \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) = 0\} \neq \emptyset$. Ekkor $1/g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(1/g)(x) := \frac{1}{g(x)}, \quad \mathcal{D}(1/g) = H.$$

2.5. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{f}{g} := f \cdot 1/g$$

2.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *felülről korlátos* függvény, ha az $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz.

Azt mondjuk, hogy f *alulról korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz.

Azt mondjuk, hogy f *korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ alulról is és felülről is korlátos halmaz.

2.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *monoton növekvő* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), \quad x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \leq f(x_2).$$

Az f szigorúan monoton növekvő függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) < f(x_2).$$

Azt mondjuk, hogy f monoton fogyó függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Az f szigorúan monoton fogyó függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) > f(x_2).$$

2.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f páros függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = f(x)$.

2.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f páratlan függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = -f(x)$.

2.10. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f periodikus függvény, ha létezik olyan $p \in \mathbb{R}$, $0 < p$ szám, hogy

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $x + p$, $x - p \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$.

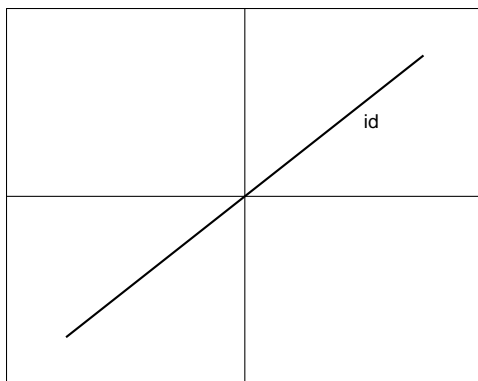
A p szám a függvény egyik *periódusa*. (Vigyázat! Nem biztos, hogy van legkisebb periódus!)

2.2. Az elemi függvények

Ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért a függvényeket mint $f : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ tüntetjük fel (tehát a nyíl előtt az értelmezési tartomány áll minden esetben).

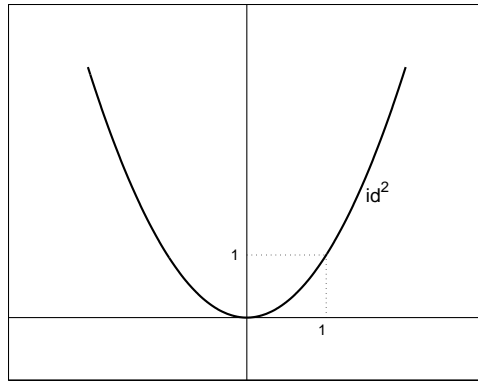
2.2.1. Hatványfüggvények

1. Legyen $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}(x) := x$.



2.1. ábra.

Az id szigorúan monoton növekvő, páratlan függvény (2.1. ábra).

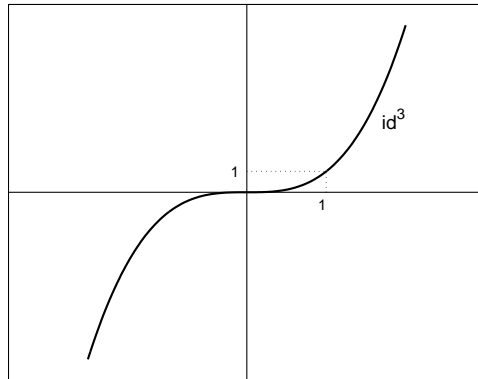


2.2. ábra.

2. Legyen $\text{id}^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^2(x) := x^2$.

Az $\text{id}^2|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növekvő, az $\text{id}^2|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó. Az id^2 páros (2.2. ábra).

3. Legyen $\text{id}^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^3(x) := x^3$.



2.3. ábra.

Az id^3 szigorúan monoton növekvő, páratlan függvény (2.3. ábra).

4. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\text{id}^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^n(x) := x^n$ függvény páros n esetén az id^2 , páratlan n esetén az id^3 tulajdonságait örökli.

5. Legyen $\text{id}^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^{-1}(x) := 1/x$.

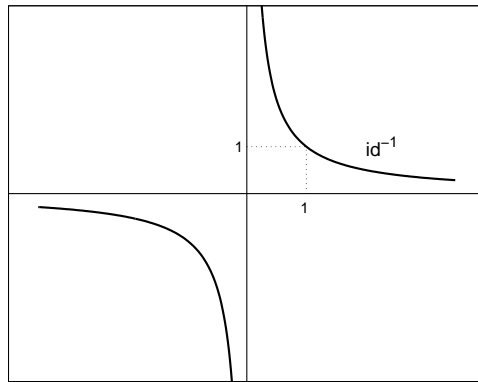
Az $\text{id}^{-1}|_{\mathbb{R}^-}$ és az $\text{id}^{-1}|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton fogyó (de id^{-1} nem monoton!). Az id^{-1} páratlan (2.4. ábra).

6. Legyen $\text{id}^{-2} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^{-2}(x) := 1/x^2$.

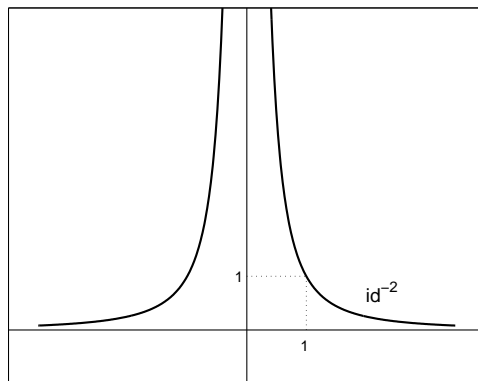
Az $\text{id}^{-2}|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton növekvő, az $\text{id}^{-2}|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton fogyó. Az id^{-2} páros (2.5. ábra).

7. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $\text{id}^{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^{-n}(x) := 1/x^n$ függvény páros n esetén az id^{-2} , páratlan n esetén az id^{-1} tulajdonságait örökli.

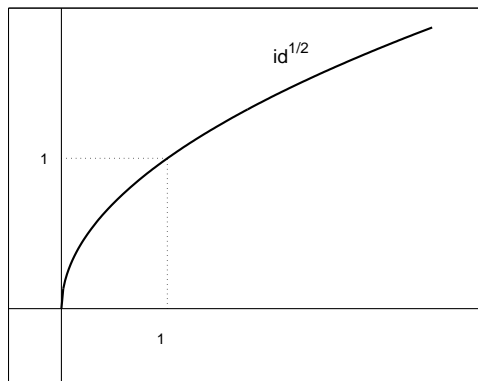
8. Legyen $\text{id}^{1/2} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^{1/2}(x) := \sqrt{x}$. Az $\text{id}^{1/2}$ szigorúan monoton növekvő függvény (2.6. ábra).



2.4. ábra.



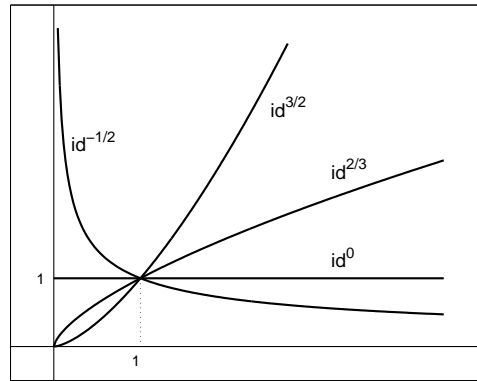
2.5. ábra.



2.6. ábra.

Megemlítjük, hogy az $\text{id}^{1/2}$ az $\text{id}^2|_{[0,\infty)}$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzeként is értelmezhető.

9. Legyen $r \in \mathbb{Q}$. Az $\text{id}^r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^r(x) := x^r$. Néhány r esetén szemléltetjük az id^r függvényeket (2.7. ábra).



2.7. ábra.

10. Végül legyen $\text{id}^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}^0(x) := 1$. Az id^0 monoton növény és monoton fogyó is, páros függvény. Bármilyen $p > 0$ szám szerint periodikus (2.7. ábra).

2.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények

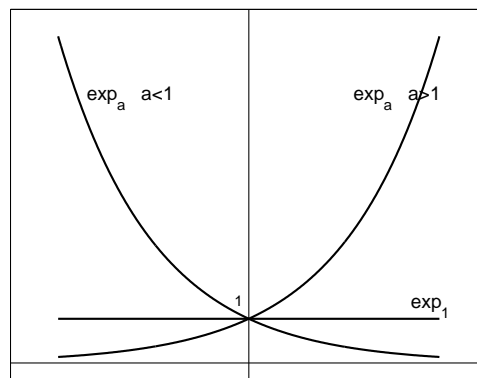
Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Az a alapú *exponenciális függvény*

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x. \quad (2.1)$$

1. \exp_a szigorúan monoton növény, ha $a > 1$,
2. \exp_a szigorúan monoton fogyó, ha $a < 1$,
3. $\exp_a = \text{id}^0$, ha $a = 1$ (monoton növény és monoton fogyó is) (2.8. ábra).

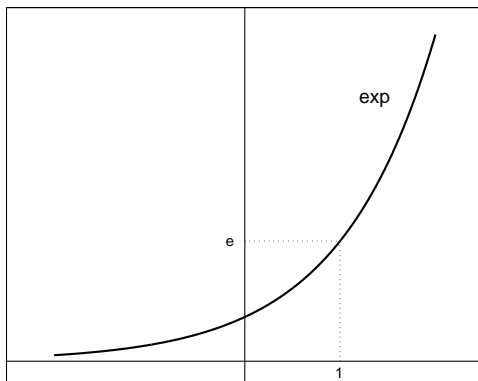
Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor $\mathcal{R}(\exp_a) = \mathbb{R}^+$, vagyis az \exp_a csak pozitív értéket vesz fel (és minden pozitív számot fel is vesz). Bármely $a > 0$ esetén minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mellett

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2).$$



2.8. ábra.

(Ez a legfontosabb ismertetőjele az exponenciális függvényeknek.) Kitüntetett szerepe van az $\exp_e =: \exp$ függvénynek (2.9. ábra) (e az ún. Euler-féle szám).



2.9. ábra.

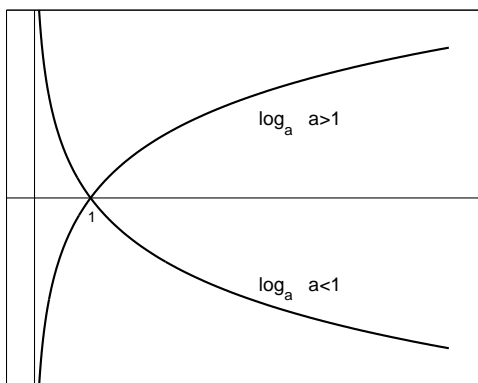
Legyen $a > 0, a \neq 1$. Mivel \exp_a szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű is, tehát van inverzfüggvénye.

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}$$

lesz az a alapú *logaritmusfüggvény* (2.10. ábra). Tehát

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = y, \text{ amelyre } \exp_a(y) = x.$$

Ha $a > 1$, akkor \log_a szigorúan monoton növekedő, ha $a < 1$, akkor \log_a szigorúan monoton



2.10. ábra.

fogyó. A logaritmusfüggvények alapvető tulajdonságai a következők:

1. bármely $a > 0, a \neq 1$ és minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

2. bármely $a > 0, a \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\log_a x^k = k \log_a x,$$

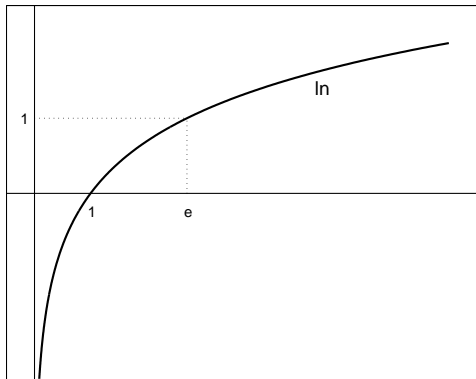
3. bármely $a, b > 0, a, b \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

A 3. tulajdonság szerint akár egyetlen logaritmusfüggvény számszorosaként az összes logaritmusfüggvény előáll. Ezért is van kitüntetett szerepe az e alapú logaritmusnak:

$$\ln := \log_e$$

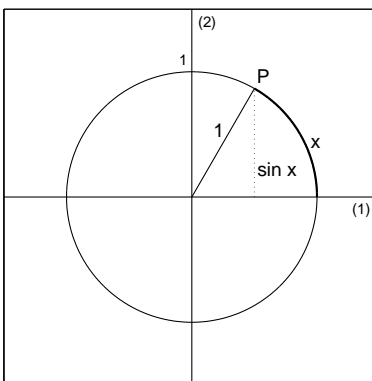
a „természetes alapú logaritmus” (2.11. ábra).



2.11. ábra.

2.2.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik

A $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény precíz definíciója a későbbi félévek anyaga. Itt most a középiskolából ismert definíciót ismételjük át. Vegyünk fel a síkon egy origó középpontú, 1 sugarú kört! Ahol a vízszintes



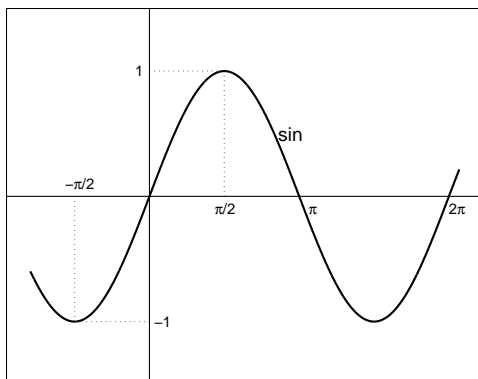
2.12. ábra.

tengely (pozitív fele) metszi a kört (vagyis az $(1,0)$ pont), abból a pontból „mérjük fel az $x \in \mathbb{R}$ számnak megfelelő hosszúságú ívet a kör kerületére”, pozitív x esetén pozitív, negatív x esetén negatív irányítással. [Ez a művelet nagy kézügyességet igényel!...] Az ív P végpontjának második koordinátája legyen a $\sin x$ (2.12. ábra). A \sin függvény páratlan, $p = 2\pi$ szerint periodikus (2.13. ábra). $\mathcal{R}(\sin) = [-1,1]$.

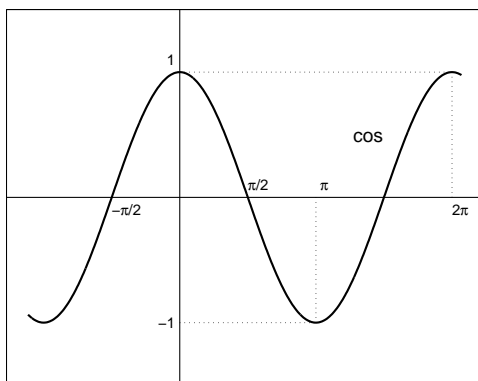
Legyen $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cos x := \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Könnyen látható, hogy ez a fenti módon definiált P pont 1. koordinátája lesz. A \cos függvény páros, $p = 2\pi$ szerint periodikus (2.14. ábra). $\mathcal{R}(\cos) = [-1,1]$. Alapvető összefüggések:

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2. Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2,$$



2.13. ábra.



2.14. ábra.

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2.$$

Legyen

$$\operatorname{tg} := \frac{\sin}{\cos} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg} := \frac{\cos}{\sin}.$$

Az értelmezésből következik, hogy

$$\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \mathcal{D}(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

A tg és ctg is páratlan, $p = \pi$ szerint periodikus (2.15. és 2.16. ábra).

A trigonometrikus függvények periodikusságuk miatt nem kölcsönösen egyértelműek.

Tekintsük a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ leszűkítést. Ez a függvény szigorúan monoton növekvő, ezért kölcsönösen egyértelmű, így van inverzfüggvénye:

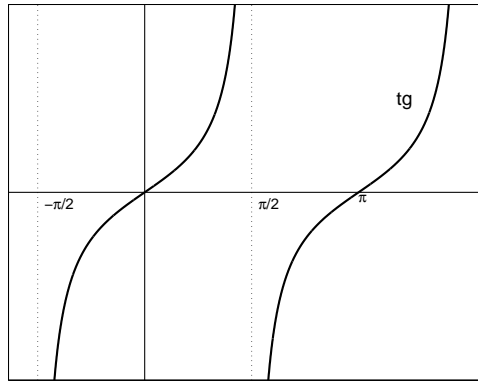
$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$$

Az értelmezésből $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin x = \alpha$, amelyre $\sin \alpha = x$.

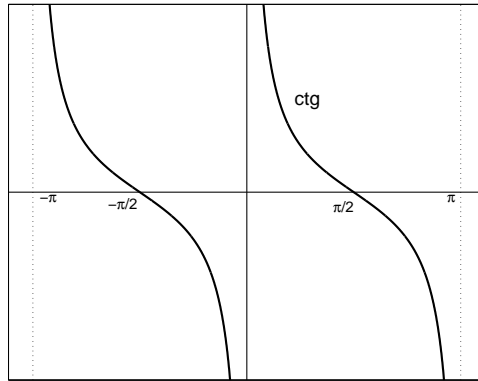
Az arcsin szigorúan monoton növekvő, páratlan függvény (2.17. ábra).

A cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

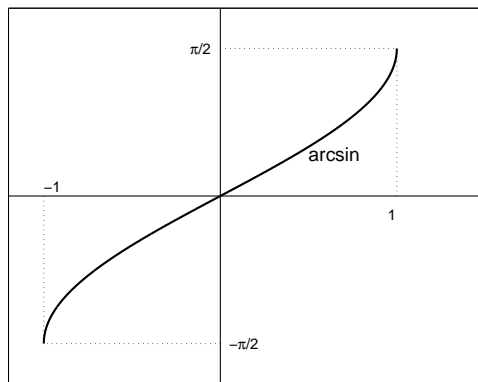
$$\arccos := \left(\cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1}$$



2.15. ábra.



2.16. ábra.



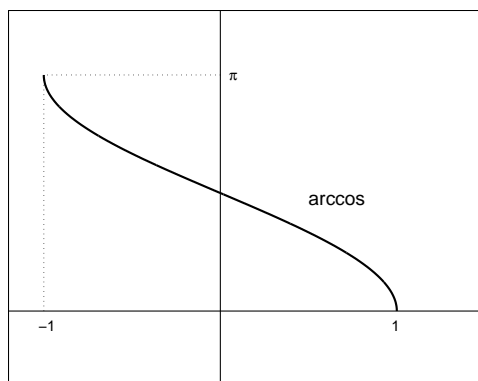
2.17. ábra.

Az értelmezésből következik, hogy $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\arccos x = \alpha$, amelyre $\cos \alpha = x$. Az arccos függvény szigorúan monoton fogyó (2.18. ábra).

A tg függvény $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növény, ezért van inverzfüggvénye:

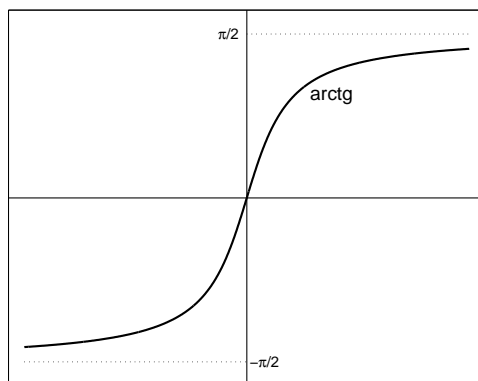
$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}$$

Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{arctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{tg} \alpha = x$.



2.18. ábra.

Az arctg szigorúan monoton növe, páratlan függvény (2.19. ábra).



2.19. ábra.

A ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{ctg}_{|(0, \pi)} \right)^{-1}$$

Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $\operatorname{arctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{ctg} \alpha = x$.

Az arctg szigorúan monoton fogyó függvény (2.20. ábra).

2.2.4. Hiperbolikus függvények és inverzeik

1. Legyen $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

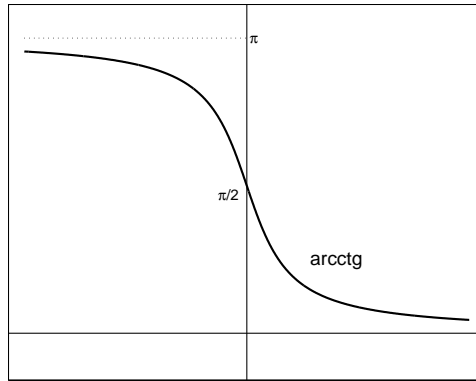
$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Az sh szigorúan monoton növe, páratlan függvény (2.21. ábra).

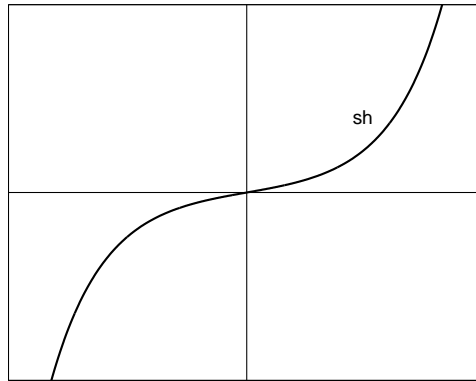
2. Legyen $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

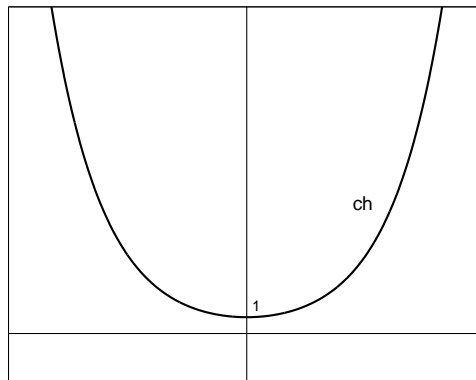
A $\operatorname{ch}_{|\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó, a $\operatorname{ch}_{|\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növe. A ch páros függvény. $\mathcal{R}(\operatorname{ch}) = [1, +\infty)$. A függvény grafikonját *lánccörcbének* is nevezik (2.22. ábra).



2.20. ábra.



2.21. ábra.



2.22. ábra.

Alapvető összefüggések:

a) Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

b) Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2,$$

$$\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{ch} x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2.$$

3. Legyen

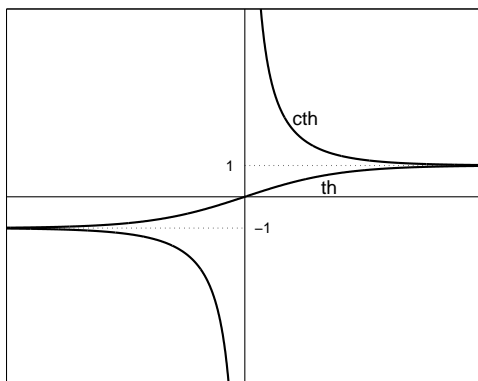
$$\operatorname{th} := \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}, \quad \operatorname{cth} := \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}.$$

Az értelmezésből következik, hogy

$$\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

A th és cth páratlan függvények (2.23. ábra).



2.23. ábra.

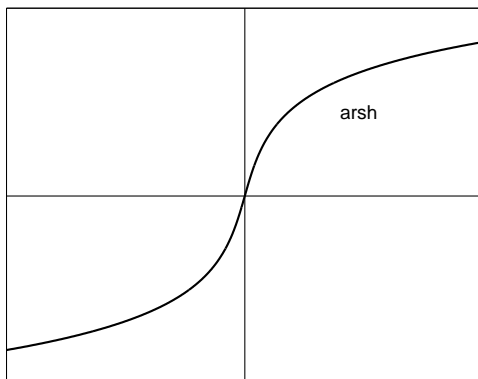
A th szigorúan monoton növekvő függvény. $\mathcal{R}(\operatorname{th}) = (-1, 1)$.

A $\operatorname{cth}|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó, a $\operatorname{cth}|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növekvő. $\mathcal{R}(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

4. Az sh szigorúan monoton növekvő függvény, ezért van inverzfüggvénye: $\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arsh} := (\operatorname{sh})^{-1}.$$

Az arsh szigorúan monoton növekvő, páratlan függvény (2.24. ábra).

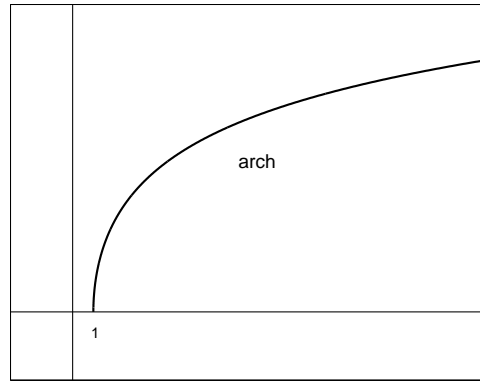


2.24. ábra.

5. Az ch függvény $[0, \infty)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növekvő, ezért van inverzfüggvénye: $\operatorname{arch} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$$\operatorname{arch} := (\operatorname{ch}|_{[0, \infty)})^{-1}.$$

Az arch szigorúan monoton növekvő függvény (2.25. ábra).

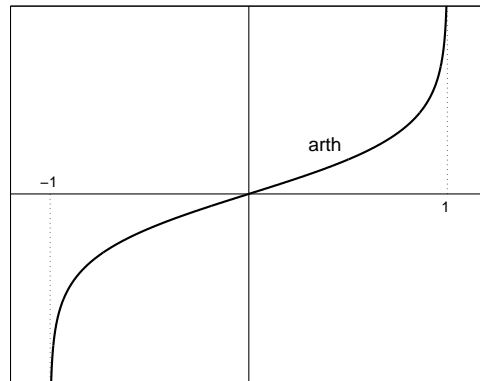


2.25. ábra.

6. Az th szigorúan monoton növény, ezért van inverzfüggvénye: $\text{arth} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

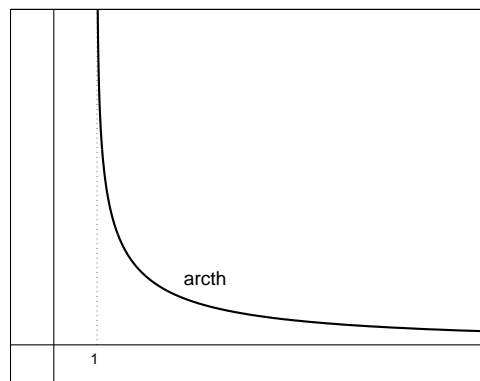
$$\text{arth} := (\text{th})^{-1}.$$

Az arth szigorúan monoton növény, páratlan függvény (2.26. ábra).



2.26. ábra.

7. Az cth függvény \mathbb{R}^+ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye: $\text{arch} : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$,



2.27. ábra.

$$\operatorname{arcth} := (\operatorname{cth}_{\mathbb{R}^+})^{-1}.$$

Az arcth szigorúan monoton fogyó függvény (2.27. ábra).

2.11. Feladat. Lássuk be az alábbiakat!

(a) $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$,

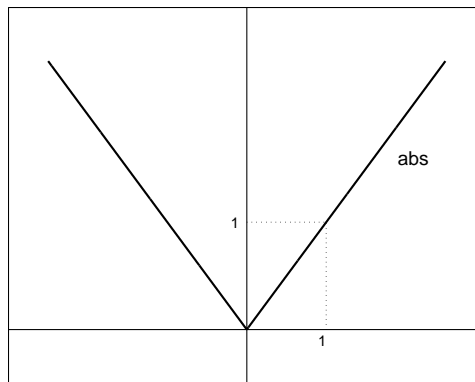
(c) $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1,1)$,

(d) $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$.

2.2.5. Néhány különleges függvény

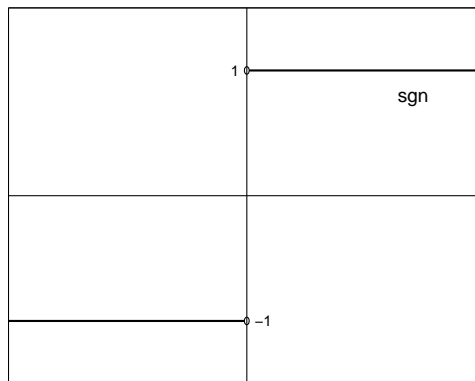
1. Legyen $\operatorname{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{abs}(x) := |x|$, ahol (emlékeztetőül)

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \quad (2.28. \text{ ábra})$$



2.28. ábra.

2. Legyen $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,



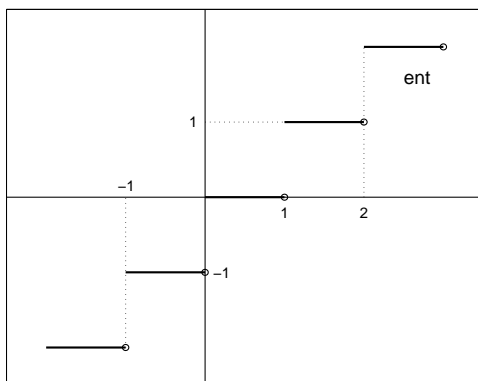
2.29. ábra.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

3. Legyen $\text{ent} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{ent}(x) := [x]$, ahol

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

(Az $x \in \mathbb{R}$ szám „egész része” az x -nél kisebb vagy egyenlő egészek közül a legnagyobb.)
(2.30. ábra)



2.30. ábra.

4. Legyen $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dirichlet-függvénynek nevezik, nem is kíséreljük meg a szemléltetését.

5. Legyen $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$R(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

ahol $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, és p -nek és q -nak nincs valódi közös osztója. *Riemann-függvénynek* nevezik, ezt sem kíséreljük meg szemléltetni.

Harmadik fejezet

Sorozatok

A sorozatok igen egyszerű függvények. Rajtuk tanulmányozható a közelítés pontossága. Hasznos építőkövei a későbbi fogalmaknak. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Sorozat fogalma, monotonitás, korlátosság
- Határérték és konvergencia
- Fontos határértékek
- Határérték és műveletek kapcsolata
- Az e szám definíciója
- Cauchy-féle konvergenciakritérium sorozatra

3.1. A sorozat fogalma és tulajdonságai

A **sorozat** a pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvény.

Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, ha $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow H$, akkor H -beli sorozatról beszélünk. Ha például H a valós számok halmaza, akkor *számsorozat*ról; ha H bizonyos jelek halmaza, akkor *jelsorozat*ról; ha H az intervallumok halmaza, akkor *intervallum-sorozat*ról beszélünk.

Legyen $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ számsorozat. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $a(n)$ helyett az a_n jelölést használjuk, és a_n -et a sorozat *n -edik tagjának* nevezzük. Magát az $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ számsorozatot is a rövidebb

$$(a_n)$$

helyettesítse, esetleg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ hangsúlyozza, hogy számsorozatról van szó.

Például az $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}, a_n := \frac{1}{n}$ helyett az $(\frac{1}{n})$ sorozatról beszélünk.

Néha a tömör (a_n) helyett az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ jelölést is használhatjuk. Például az (n^2) helyett $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$ sorozatról beszélünk.

Mivel a sorozat is függvény, így a korlátosság, a monotonitás, műveletek sorozatokkal nem igényelnek új definíciót. Emlékeztetőül mégis újrafogalmazunk egy-két elnevezést.

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) sorozat *korlátos*, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$.

3.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) *monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.

3.3. Definíció. Ha (a_n) sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda \cdot (a_n) := (\lambda \cdot a_n).$$

Ha $(a_n), (b_n)$ két sorozat, akkor

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n).$$

Ha még $b_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

Például az $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ sorozat korlátos, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $n < n+1$, ezért

$$\left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Az $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ monoton növvő, mert bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1},$$

mivel $n(n+2) < (n+1)^2$.

3.4. Példa. Fontos nevezetes sorozat az

$$(e_n) := \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right). \quad (3.1)$$

Ez a sorozat is monoton növvő. Ugyanis legyen $n \in \mathbb{N}^+$. A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = 1 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_n \leq \left(\frac{1 + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+1} \right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

Az (e_n) sorozat korlátos is, bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$. Ugyanis szintén a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből adódik a következő:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_n \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+2} \right)^{n+2} = 1.$$

3.2. Sorozat véges határértéke

Most a sorozatok egy merőben új tulajdonságával ismerkedünk meg. Ha az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat tagjai valamilyen szám körül keveset ingadoznak, akkor az ilyen sorozatot konvergenseknek fogjuk nevezni. Pontosabban:

3.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat *konvergens*, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ (ε -tól függő) küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

másképp

$$a_n \in K_\varepsilon(A). \quad (3.2)$$

Ha van ilyen A szám, akkor ez a sorozat *határértéke* lesz, és

$$\lim a_n = A \text{ vagy } a_n \rightarrow A$$

jelöli.

A fenti definícióban nagyon fontos, hogy a (3.2) (vagy az ezzel ekvivalens állítások) *bármely* pozitív ε -ra teljesülnek, de *különböző* ε -okra *más-más* küszöbindextől kezdve.

3.6. *Megjegyzés.* Könnyen látható a definíció alapján, hogy

$$a_n \rightarrow A \iff (a_n - A) \rightarrow 0 \iff |a_n - A| \rightarrow 0.$$

3.7. **Állítás.**

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $\frac{1}{\varepsilon}$ számhoz az *Archimedeszi axióma* alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ha pedig $n \geq N$, akkor

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

azaz

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Tehát egy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ -hoz találtunk olyan N küszöbindextet, hogy $n \geq N$ esetén a sorozatelemek legfeljebb ε -al térnek el 0-tól – ezért a sorozat 0-hoz tart. \square

Egy másik példaként vegyünk egy 1 méteres rudat. Ha félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúd hosszaknak

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

sorozatához jutunk. Alkalmazva az 1.5. Állítást, a fentivel analóg módon belátható, hogy $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, azaz a keletkezett új darabok tetszőlegesen kicsik lesznek.

3.8. **Definíció.** Legyen (a_n) olyan sorozat, melyre $a_n = a$ minden n -re. Ekkor (a_n) -et *konstans sorozatnak* nevezzük. Ha $a_n = a$ csak egy indextől kezdve teljesül, akkor (a_n) *kvázikonstans sorozat*.

A definíció alapján triviális, hogy ha (a_n) kvázikonstans (vagy konstans) a sorozat, akkor $a_n \rightarrow a$.

3.9. *Megjegyzés.* A sorozathatárérték egyértelmű. Tehát nem lehet, hogy $a_n \rightarrow A$ és $a_n \rightarrow B$ teljesülnek, de $A \neq B$.

Bizonyítás. Ha $A \neq B$, akkor $\varepsilon := |A - B|/2$ jelöléssel könnyen látható, hogy $K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset$. A sorozathatárérték definíciója alapján azonban elég nagy n -re $a_n \in K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B)$ teljesül, ami nem lehetséges. \square

3.10. **Állítás.** Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor (a_n) korlátos.

Bizonyítás. A definíció szerint az $\varepsilon := 1$ számhoz is van olyan N küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

Ha $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |A - 1|, |A + 1|\}$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$. \square

Igaz-e vajon a fenti állítás megfordítása, vagyis hogy minden korlátos sorozat konvergens is? Tekintsük az $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ képlettel megadott sorozatot! A sorozat tagjai

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

alakúak. Mivel $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}^+$, ezért (a_n) korlátos. Másrészt könnyen meggondolható, hogy mivel a sorozat tagjai között tetszőleges index után előfordul -1 és 1 is, (a_n) nem lehet konvergens. Igaz azonban az alábbi tétel.

3.11. Tétel. *Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor (a_n) konvergens, mégpedig*

1. *monoton növekvő (a_n) esetén $a_n \rightarrow \alpha$, ahol $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} =: \sup_n a_n \in \mathbb{R}$;*
2. *monoton fogyó (a_n) esetén $a_n \rightarrow \alpha$, ahol $\alpha = \inf\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} =: \inf_n a_n \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) monoton növekvő és korlátos. A felső határ axiómája miatt a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak létezik (véges) felső határa, ez legyen $\alpha := \sup_n a_n$. Megmutatjuk, hogy $a_n \rightarrow \alpha$. Ehhez legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám. A halmaz felső határának tulajdonságai alapján

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \alpha$, és

(b) $\exists N \in \mathbb{N}^+ : a_N > \alpha - \varepsilon$.

Belátjuk, hogy a (b) pont alapján létező N jó küszöbindex ε -hoz. Legyen $n \geq N$ tetszőleges, és becsljük meg a sorozat n -edik tagját:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy a sorozat monoton növekvő. Ebből következik, hogy $a_n \rightarrow \alpha$.

Monoton fogyó sorozat esetén hasonlóan igazolható, hogy a sorozat a tagjaiból alkotott halmaz infimumához tart. \square

3.12. Definíció. Az $(e_n) := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatról már láttuk a 3.4. Példában, hogy monoton növekvő és korlátos, ezért a fenti tétel alapján konvergens. A határértékét e -vel jelöljük, ez az ún. *Euler-féle szám*, tehát

$$e := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

3.13. Tétel (Rendőr-elv). *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez léteznek olyan (x_n) és (y_n) sorozatok, hogy*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \leq a_n \leq y_n$, és
2. $\lim x_n = \lim y_n =: A$.

Ekkor (a_n) konvergens, és $\lim a_n = A$.

Bizonyítás. Legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám.

Mivel $x_n \rightarrow A$, ezért ε -hoz létezik N_1 , hogy minden $n \geq N_1$ esetén

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

Mivel $y_n \rightarrow A$, ezért ε -hoz létezik N_2 , hogy minden $n \geq N_2$ esetén

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$A - \varepsilon < x_n \leq a_n \leq y_n < A + \varepsilon,$$

amiből $|a_n - A| < \varepsilon$. Tehát ε -hoz N jó küszöbindex, így következik az állítás. \square

3.14. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a fenti tétel 1. feltételében elegendő lett volna megkövetelni, hogy $x_n \leq a_n \leq y_n$ elég nagy n -re.

3.3. Műveletek konvergens sorozatokkal

3.15. Állítás. Ha $a_n \rightarrow 0$ és $b_n \rightarrow 0$, akkor $a_n + b_n \rightarrow 0$.

Bizonyítás. Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám.

Mivel $a_n \rightarrow 0$, ezért $\varepsilon/2$ -höz létezik N_1 , hogy minden $n \geq N_1$ esetén

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $b_n \rightarrow 0$, ezért $\varepsilon/2$ -höz létezik N_2 , hogy minden $n \geq N_2$ esetén

$$-\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n + b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

azaz $|a_n + b_n| < \varepsilon$, ha $n \geq N$. Tehát $a_n + b_n \rightarrow 0$. □

3.16. Állítás. Ha $a_n \rightarrow 0$ és (c_n) korlátos (vagyis $|c_n| < K$, $n \in \mathbb{N}^+$), akkor $a_n c_n \rightarrow 0$.

Bizonyítás. Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Mivel $a_n \rightarrow 0$, ezért $\frac{\varepsilon}{K} > 0$ -hoz létezik N , hogy minden $n \geq N$ esetén

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Legyen $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$|a_n c_n| = |a_n| |c_n| \leq |a_n| \cdot K < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$

amiből következik, hogy $a_n c_n \rightarrow 0$. □

3.17. Állítás. Ha $a_n \rightarrow A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda a_n \rightarrow \lambda A$.

Bizonyítás. Nyilván

$$(\lambda a_n - \lambda A) = (\lambda) \cdot (a_n - A).$$

Mivel $a_n - A \rightarrow 0$, a (λ) korlátos sorozat, ezért az előzőek alapján

$$(\lambda) \cdot (a_n - A) \rightarrow 0 \iff \lambda a_n \rightarrow \lambda A.$$

□

3.18. Állítás. Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n + b_n \rightarrow A + B$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$(a_n + b_n - (A + B)) = (a_n - A + b_n - B) = (a_n - A) + (b_n - B).$$

Mivel $a_n - A \rightarrow 0$ és $b_n - B \rightarrow 0$, ezért a 3.15. Állítás alapján az összegük is 0-hoz tart, azaz $a_n + b_n \rightarrow A + B$. □

3.19. Állítás. Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor $a_n b_n \rightarrow AB$.

Bizonyítás. Egyszerű számolással

$$(a_n b_n - AB) = (a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB) = (a_n - A)(b_n) + (A)(b_n - B).$$

Mivel $a_n - A \rightarrow 0$, és (b_n) konvergens, ezért korlátos, így a 3.16. Állítás szerint a szorzatuk 0-hoz tart. Hasonlóan, $b_n - B \rightarrow 0$, és (A) korlátos, ezért szorzatuk is 0-hoz tart. A 3.15. Állítás szerint két 0-hoz tartó sorozat összege is 0-hoz tart, tehát $a_n b_n \rightarrow AB$. □

3.20. Állítás. Ha $b_n \rightarrow B$, $B \neq 0$, akkor $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$.

Bizonyítás. A $B \neq 0$ feltételből adódik, hogy $b_n \neq 0$ elég nagy n -re. Legyen $B > 0$. Ekkor

$$\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{B - b_n}{Bb_n}\right) = -\frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \cdot (b_n - B)$$

Tudjuk, hogy $b_n - B \rightarrow 0$. Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel $b_n \rightarrow B$, ezért $\varepsilon := \frac{B}{2} > 0$ számhoz létezik N , hogy minden $n \geq N$ esetén

$$-\frac{B}{2} < b_n - B < \frac{B}{2},$$

vagyis

$$B - \frac{B}{2} < b_n < B + \frac{B}{2},$$

amiből

$$\frac{2}{B} > \frac{1}{b_n} > \frac{2}{3B}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel a 3.16. Állítás alapján 0-hoz tartó és korlátos sorozat szorzata 0-hoz tart, ezért $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{B}$. \square

3.21. Állítás. Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$.

Bizonyítás. Mivel

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right),$$

az előző két tétel szerint

$$a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow A \cdot \frac{1}{B},$$

tehát $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$. \square

3.22. Állítás. Ha $a_n \rightarrow A$, akkor $|a_n| \rightarrow |A|$.

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőtlenségből és a 3.13. Tételből (Rendőr-elv) következik:

$$0 \leq ||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

\square

3.23. Állítás. Ha $a_n \rightarrow A$ és $p \in \mathbb{N}^+$, akkor $a_n^p \rightarrow A^p$.

Bizonyítás. Rögtön adódik a 3.19. Állítás p -szeri alkalmazásából $(b_n) = (a_n)$ -re. \square

3.24. Állítás. Ha $a_n \rightarrow A$, $a_n > 0$ és $q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[q]{a_n} \rightarrow \sqrt[q]{A}$.

Bizonyítás. A hatványozás azonosságaiából könnyen meggondolható az alábbi:

$$\left|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{A}\right| = |a_n - A| \cdot \frac{1}{(\sqrt[q]{a_n})^{q-1} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-2} \cdot \sqrt[q]{A} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-3} \cdot (\sqrt[q]{A})^2 + \dots + (\sqrt[q]{A})^{q-1}}.$$

Itt a második tényező q darab pozitív korlátos sorozat összegének a reciproka – tehát korlátos. Ezt megszorozva egy 0-hoz tartó sorozattal 0-hoz tartó sorozatot kapunk, ami a bizonyítandó állítás. \square

3.25. Következmény. Legyen $a_n \rightarrow A$, $a_n > 0$ és $p, q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[q]{a_n^p} \rightarrow \sqrt[q]{A^p}$.

Bizonyítás. Azonnal adódik a fenti két állításból. \square

Ezeknek a tételeknek az alkalmazásaként nézzük a következő példát.

3.26. Példa.

$$\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = \lim \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$

hiszen $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, ezért a számlálóban $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$. A nevezőben $2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2 + 0 \neq 0$, így a hányadossorozat is konvergens.

3.4. Részsorozatok

3.27. Definíció. Egy $\mathbf{n} : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növekedő sorozatot *indexsorozatnak* nevezünk.

Könnyen meggondolható, hogy $\forall i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\mathbf{n}_i \geq i.$$

3.28. Definíció. Legyen $a, b : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy b az a sorozat egy *részsorozata*, ha $\exists \mathbf{n} : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ indexsorozat, hogy $b = a \circ \mathbf{n}$, azaz $(b_i) = (a_{\mathbf{n}_i})$.

Például $(a_n) := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ és $(\mathbf{n}_i) := 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ esetén

$$(a_{\mathbf{n}_i}) := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$$

lesz a részsorozat.

3.29. Állítás. Ha $\lim a_n = A$, akkor bármely $(a_{\mathbf{n}_i})$ részsorozatára $\lim a_{\mathbf{n}_i} = A$

Bizonyítás. Azonnal adódik a sorozat konvergenciájának definíciójából: adott $\varepsilon > 0$ -hoz ugyanaz az N küszöbindex jó lesz a részsorozathoz, is, mivel $\mathbf{n}_N \geq N$. \square

3.30. Tétel. Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás. Az (a_n) sorozat egy a_m tagját *csúcsnak* nevezzük, ha $\forall n \geq m$ esetén $a_n \leq a_m$. Két eset lehetséges:

1. Az (a_n) sorozat tagjai között végtelen sok csúcs van.
2. Az (a_n) sorozat tagjai között véges sok (esetleg 0) csúcs van.

Nézzük az 1. esetet! Legyen a_{n_1} egy csúcs a sorozatban. Mivel végtelen sok csúcs van, ezért létezik olyan $n_2 > n_1$ index, hogy a_{n_2} csúcs. Ismét felhasználva, hogy végtelen sok csúcs van a sorozatban, létezik olyan $n_3 > n_2$ index, amire a_{n_3} csúcs. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak csúcsokból álló

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

részsorozatát, amely a csúcs definíciója alapján monoton fogyó részsorozata $(a_{\mathbf{n}_i})$ -nek.

A 2. esetben létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n \geq N$ esetén a_n *nem* csúcs. Legyen $n_1 := N$. Mivel a_{n_1} nem csúcs, ezért létezik $n_2 > n_1$ index, hogy $a_{n_2} > a_{n_1}$, a csúcs definíciója miatt. Mivel a_{n_2} sem csúcs, ezért találunk olyan $n_3 > n_2$ indexet, melyre $a_{n_3} > a_{n_2}$. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak egy olyan (csupa nem-csúcsból álló)

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

részsorozatát, mely a sorozat tagjainak megválasztása alapján szigorúan monoton növő. \square

3.31. Tétel (Bolzano-Weierstrass-tétel). Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. A 3.30. Tétel alapján a sorozatnak van monoton részsorozata. Nyilván ez a részsorozat is korlátos lesz. A 3.11. Tétel szerint egy monoton és korlátos sorozat konvergens. \square

3.5. Sorozat $\lim \sup$ -ja és $\lim \inf$ -je

Legyen (a_n) korlátos sorozat. Készítsük el az

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \\ \alpha_2 &:= \sup\{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\} \\ &\vdots \\ \alpha_k &:= \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.3}$$

számsorozatot. Mivel $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \supset \{a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, ezért a felső határukra nyilván $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Ezt tovább gondolva látszik, hogy (α_k) monoton fogyó sorozat. Az (α_k) ugyanolyan korlátok közé szorítható, mint az eredeti (a_n) sorozat. Mivel (α_k) monoton és korlátos, ezért konvergens, és $\inf_k \alpha_k$ -hoz tart (ld. a 3.11. Tételt).

3.32. Definíció. $\lim \sup a_n := \lim \alpha_k$.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan legyen

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \\ \beta_2 &:= \inf\{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\} \\ &\vdots \\ \beta_k &:= \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nyilván $\beta_1 \leq \beta_2$, és ez a tendencia megmarad, így (β_k) monoton növvő. A (β_k) is korlátos. Mivel (β_k) monoton és korlátos, ezért konvergens.

3.33. Definíció. $\lim \inf a_n := \lim \beta_k$.

A definíciókból látszik, hogy $\forall k \in \mathbb{N}^+$ esetén $\alpha_k \geq \beta_k$, így

$$\lim \inf a_n = \lim \beta_k \leq \lim \alpha_k = \lim \sup a_n.$$

Bizonyítás nélkül megemlíjtük a $\lim \sup a_n$ érdekes tulajdonságait.

- (a) Minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(\lim \sup a_n) - \varepsilon$ számnál nagyobb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $(\lim \sup a_n) + \varepsilon$ számnál nagyobb tag csak véges sok van az (a_n) sorozatban.
- (b) A $\lim \sup a_n$ az (a_n) sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legnagyobb (tehát van is olyan (a_{n_i}) konvergens részsorozat, amelyre $a_{n_i} \rightarrow \lim \sup a_n$.)

Értelemszerű módosítással megfogalmazhatók a $\lim \inf a_n$ tulajdonságai is.

- (a) Minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(\lim \inf a_n) + \varepsilon$ számnál kisebb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $(\lim \inf a_n) - \varepsilon$ számnál kisebb tag csak véges sok van az (a_n) sorozatban.
- (b) A $\lim \inf a_n$ az (a_n) sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legkisebb (tehát van is olyan (a_{n_i}) konvergens részsorozat, amelyre $a_{n_i} \rightarrow \lim \inf a_n$.)

A fentiek segítségével bebizonyítható az alábbi állítás.

3.34. Tétel. Az (a_n) korlátos sorozat konvergens $\iff \liminf a_n = \limsup a_n$.

Bizonyítás. Ha (a_n) konvergens, akkor a 3.29. Állítás alapján minden részsorozata ugyanoda tart, ezért a konvergens részsorozatok határértékei közül a legnagyobb megegyezik a legkisebbel – így az előző (b) pontok alapján $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Megfordítva, ha $\liminf a_n = \limsup a_n = A$, akkor A -ra teljesül mindkét fenti (a) tulajdonság, vagyis bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van – ami éppen azt jelenti, hogy $a_n \rightarrow A$. \square

3.6. Cauchy-féle konvergencia-kritérium

A sorozat konvergenciájának definíciója tartalmaz egy komoly nehézséget: meg kell sejtteni azt az $A \in \mathbb{R}$ számot, amelyhez a sorozat tagjai tetszőlegesen közel kerülnek. Ezt küszöböli ki a Cauchy-féle konvergencia-kritérium.

3.35. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) Cauchy-sorozat, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ hogy } \forall n, m \geq N \text{ esetén } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tehát egy sorozat Cauchy-sorozat, ha bármely pozitív ε -hoz van olyan küszöbindex, hogy ettől az indextől kezdve a sorozat tagjai ε -nál közelebb vannak egymáshoz.

3.36. Tétel (Cauchy-féle konvergencia-kritérium). Legyen (a_n) számsorozat. Ekkor

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Tehát az, hogy a számsorozat hozzásimul, tetszőlegesen megközelít egy számot, egyenértékű azzal, hogy a sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik egymást.

Bizonyítás. (\implies) Legyen $\lim a_n =: A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \rightarrow A$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz

$$\exists N, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyenek $n, m \geq N$ tetszőleges indexek. Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezek szerint (a_n) Cauchy-sorozat.

(\impliedby) Legyen (a_n) Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos. Ugyanis az $\varepsilon := 1$ pozitív számhoz is $\exists N_1$, hogy $\forall n, m \geq N_1$ esetén

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Rögzítsük az $m = N_1$ indexet! Így

$$a_{N_1} - 1 < a_n < a_{N_1} + 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall n \geq N_1$ esetén a sorozat tagjai a két korlát közé esnek. Az a_1, a_2, \dots, a_{N_1} véges sok tag már nem ronthatja el az egész (a_n) sorozat korlátosságát.

Mivel (a_n) korlátos, ezért a 3.31. Bolzano-Weierstrass-tétel miatt van (a_{n_i}) konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim a_{n_i}.$$

Megmutatjuk, hogy $a_n \rightarrow \alpha$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_{n_i} \rightarrow \alpha$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N_2$, hogy

$$\forall i \geq N_2 \text{ esetén } |a_{n_i} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.5)$$

Mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N_3$, hogy

$$\forall n, m \geq N_3 \text{ esetén } |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.6)$$

Legyen $N := \max\{N_2, N_3\}$, és legyen $n \geq N$ tetszőleges. Rögzítsünk le egy $i \geq n$ indexet – ekkor $n_i \geq i \geq n \geq N$ is teljesül. A (3.5) alapján és a (3.6)-ban $m = n_i$ -t véve kapjuk, hogy

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{n_i} + a_{n_i} - \alpha| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezek szerint $a_n \rightarrow \alpha$. □

3.7. Divergens sorozatok, sorozatok végtelen határértéke

3.37. Definíció. Egy (a_n) sorozatot *divergensnek* nevezünk, ha nem konvergens. Másképp: ha $\forall A \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex után $\exists n \geq N$ olyan, hogy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Divergens sorozat például az (n^2) és a $((-1)^n)$ sorozat is. Az (n^2) sorozathoz tágabb értelemben lehetőség lesz határértéket rendelni.

Korlátos (a_n) sorozat esetén a 3.34. Tétel alapján a divergencia ekvivalens azzal, hogy

$$\limsup a_n \neq \liminf a_n.$$

Könnyen látható, hogy

$$\limsup(-1)^n = 1 \neq \liminf(-1)^n = -1.$$

3.38. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozatnak $+\infty$ a *határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n > K$, vagyis $a_n \in (K, +\infty)$.

Ha az (a_n) sorozat ilyen, akkor

$$\lim a_n = +\infty \text{ vagy } a_n \rightarrow +\infty.$$

Ez a definíció arról szól, hogy a sorozat elég nagy küszöbindextől kezdve „közel van” a $+\infty$ -hez. Ezért könnyen látható, hogy elég lett volna a feltételt pozitív K számokra megkövetelni. Hasonlóan definiáljuk a $-\infty$ -hez tartás fogalmát.

3.39. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozatnak $-\infty$ a *határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n < K$, vagyis $a_n \in (-\infty, K)$.

Ha az (a_n) sorozat ilyen, akkor

$$\lim a_n = -\infty \text{ vagy } a_n \rightarrow -\infty.$$

Könnyen meggondolható, hogy a definíciót elég lett volna negatív K számokra megkövetelni.

Példaként: $\lim n^2 = +\infty$ és $\lim(-n^2) = -\infty$.

3.40. *Megjegyzés.* A fenti definíciókból következik, hogy a sorozathatárérték itt is egyértelmű, hasonlóan a véges határérték esetéhez.

Megmutatjuk, hogy egy $+\infty$ -hez tartó sorozat alulról, egy $-\infty$ -hez tartó pedig felülről korlátos.

3.41. Állítás. Ha $a_n \rightarrow +\infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, ha pedig $a_n \rightarrow -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos sorozat.

Bizonyítás. Legyen $a_n \rightarrow +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor $K = 1$ -hez is létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > 1$. Legyen

$$L := \min \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, 1\}.$$

Világos, hogy $a_n \geq L$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Az $a_n \rightarrow -\infty$ eset hasonlóan látható be. \square

Jelölje a továbbiakban

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \quad (3.7)$$

az ún. *kibővített számegyenes*et, tehát a valós számokhoz hozzávéve a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokat. Fontos, hogy ez utóbbiak valóban szimbólumok, és nem valós számok!

3.42. Állítás. *Ha $\lim a_n = A$ ($A \in \overline{\mathbb{R}}$), akkor bármely (a_{n_i}) részsorozatra $\lim a_{n_i} = A$*

Bizonyítás. Ugyanúgy belátható, mint a 3.29. Állítás. \square

Könnyen meggondolható az alábbi állítás.

3.43. Állítás. *Minden monoton sorozatnak van határértéke.*

Bizonyítás. Ha a monoton sorozat korlátos, akkor a 3.11. Tétel alapján tudjuk, hogy konvergens. Ha (a_n) nem korlátos, akkor monoton növekvő esetben ez csak úgy lehet, hogy felülről nem korlátos. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel (a_n) -nek K nem felső korlátja, ezért létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_N > K$. Node $n \geq N$ esetén - a monoton növést kihasználva - kapjuk, hogy

$$a_n \geq a_N > K.$$

Mivel K tetszőleges volt, ebből következik, hogy $a_n \rightarrow +\infty$. A monoton fogyó sorozat esete hasonlóan bizonyítható. \square

A $+\infty$ vagy $-\infty$ határértékű sorozatokkal végzett műveletek (ilyenek összege, szorzata, hányadosa) nagy körültekintést igényelnek.

3.44. Tétel (Végtelen határérték és műveletek). *Az alábbiak teljesülnek az (a_n) és (b_n) sorozatokra.*

1. *Ha $a_n \rightarrow +\infty$ és (b_n) alulról korlátos (pl. (b_n) konvergens vagy $+\infty$ -hez tart), akkor $a_n + b_n \rightarrow +\infty$.*
2. *Ha $a_n \rightarrow +\infty$ és (b_n) -nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. (b_n) egy pozitív számhoz vagy $+\infty$ -hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$.*
3. *Ha $a_n \rightarrow +\infty$ és (b_n) -nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. (b_n) egy negatív számhoz vagy $-\infty$ -hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$.*
4. *Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és (b_n) felülről korlátos (pl. (b_n) konvergens vagy $-\infty$ -hez tart), akkor $a_n + b_n \rightarrow -\infty$.*
5. *Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és (b_n) -nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. (b_n) egy pozitív számhoz vagy $+\infty$ -hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$.*
6. *Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és (b_n) -nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. (b_n) egy negatív számhoz vagy $-\infty$ -hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$.*
7. *Ha $a_n \rightarrow +\infty$ vagy $a_n \rightarrow -\infty$, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.*
8. *Ha $a_n \rightarrow 0$ és $a_n > 0$ egy indextől kezdve, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$, ha pedig $a_n < 0$ egy indextől kezdve, akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$.*

Bizonyítás. 1. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \rightarrow +\infty$, ezért $K - L$ -hez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > K - L$. Tehát $n \geq N$ esetén

$$a_n + b_n > K - L + L = K,$$

amiből következik az állítás.

2. Legyen $K > 0$ tetszőleges szám. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}^+$ szám és $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \rightarrow +\infty$, ezért K/L -hez létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $a_n > K/L$. Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n \geq N$ indexekre

$$a_n \cdot b_n > \frac{K}{L} \cdot L = K,$$

ahol kihasználtuk, hogy $K/L > 0$ és $L > 0$. Így következik az állítás.

A 3 – 6. állítások a fentiekkel analóg módon láthatók be.

7. Legyen $a_n \rightarrow +\infty$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az $1/\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > 1/\varepsilon$. Ebből

$$\frac{1}{a_n} = \left| \frac{1}{a_n} \right| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Ezért $1/a_n \rightarrow 0$. Ha $a_n \rightarrow -\infty$, akkor $-a_n \rightarrow +\infty$, amiből $-1/a_n \rightarrow 0$, így $1/a_n \rightarrow 0$ következik.

8. Az előzőhöz hasonlóan látható. \square

A fentiek alapján könnyen megmondhatók az alábbi, táblázatba rendezett eredmények sorozatok összegének, szorzatának ill. hányadosának határértékeiről.

3.45. Állítás. *Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:*

	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B \in \mathbb{R}$	$A + B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$?
$B = -\infty$	$-\infty$?	$-\infty$

Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	0	0	0	?	?
$B < 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$B = -\infty$	$-\infty$?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Ha $a_n \rightarrow A$ és $b_n \rightarrow B$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	A/B	0	A/B	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$?	?	?	?	?
$B < 0$	A/B	0	A/B	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	0	0	0	?	?
$B = -\infty$	0	0	0	?	?

Ahol a táblázatokban? szerepel, ott többfajta eshetőség van – ld. gyakorlatok.

A $\pm\infty$ -el végzett műveleteket az alapján szokták definiálni, ami a fenti táblázatokban a megfelelő határértékkel rendelkező sorozatok közötti műveletekre érvényes.

A végtelen határérték és a rendezés kapcsolatáról szól az alábbi állítás.

3.46. Állítás.

1. Ha $a_n \rightarrow +\infty$ és (b_n) olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve $b_n \geq a_n$, akkor $b_n \rightarrow +\infty$.
2. Ha $a_n \rightarrow -\infty$ és (b_n) olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve $b_n \leq a_n$, akkor $b_n \rightarrow -\infty$.

Bizonyítás. Házi feladat. □

3.8. Sorozatok közép-sorozatai

3.47. Definíció. Legyen (a_n) egy pozitív tagú sorozat, vagyis $a_n > 0$ minden n -re. Képezzük ekkor (a_n)

(a) *számtaniközép-sorozatát* mint

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(b) *mértaniközép-sorozatát* mint

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(c) *harmonikusközép-sorozatát* mint

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

3.48. Tétel. Ha $a_n \rightarrow A$ ($A \in \overline{\mathbb{R}}$), akkor a fent definiált közép-sorozatai is mind A -hoz tartanak, tehát

$$A_n \rightarrow A, \quad G_n \rightarrow A, \quad \text{és} \quad H_n \rightarrow A.$$

Bizonyítás. 1. Legyen először $a_n \rightarrow 0$. Megmutatjuk, hogy (A_n) , (G_n) és (H_n) is 0-hoz tart. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Ekkor $\varepsilon/2$ -höz létezik N_1 küszöbindex, hogy

$$\forall n \geq N_1 \text{ esetén } |a_n| < \varepsilon/2. \quad (3.8)$$

Rögzítsük le N_1 -et! Ekkor $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|$ konstans. Ezért $\varepsilon/2$ -höz létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N_2$ esetén

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} < \varepsilon/2. \quad (3.9)$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ha $n \geq N$, akkor (3.8) és (3.9) alapján

$$\begin{aligned} |A_n| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n} \\ &= \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon/2 \cdot (n - N_1)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon/2 \cdot n}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ez bizonyítja az $A_n \rightarrow 0$ állítást. Az 1.9. Tétel alapján

$$0 \leq H_n \leq G_n \leq A_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

ezért a 3.13. Tételből (Rendőr-elv) következik, hogy $G_n \rightarrow 0$ és $H_n \rightarrow 0$ is teljesül.

2. Legyen most $a_n \rightarrow A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és mivel $a_n > 0$, azért $A > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} |A_n - A| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nA}{n} \right| \\ &= \left| \frac{a_1 - A + a_2 - A + \cdots + a_n - A}{n} \right| \leq \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

A kapott felső becslés a $(b_n) := (|a_n - A|)$ 0-hoz tartó sorozat számtaniközép-sorozata, ami 1. alapján 0-hoz tart. Így $|A_n - A| \rightarrow 0$, vagyis $a_n \rightarrow A$.

Másrészt $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{A}$, és így az előbbieket az $(\frac{1}{a_n})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \rightarrow \frac{1}{A} \implies H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \rightarrow A.$$

Az 1.9. Tétel és a 3.13. Tétel (Rendőr-elv) miatt $G_n \rightarrow A$ is igaz.

3. Már csak az $A = +\infty$ eset van hátra. A 3.45. Állítás 7. pontja alapján $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$. Ezért a bizonyítás 1. része miatt

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \rightarrow 0 \implies H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \rightarrow +\infty,$$

miel (H_n) pozitív tagú sorozat (ld. a 3.45. Állítás 8. pontja). Kihasznlva, hogy $0 < H_n \leq G_n \leq A_n$ és $H_n \rightarrow +\infty$, valamint alkalmazva a 3.46. Állítást kapjuk, hogy

$$G_n \rightarrow +\infty \text{ és } A_n \rightarrow +\infty.$$

□

3.49. Példa. Legyen

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mi az (a_n) határértéke?

Nyilván

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n}},$$

vagyis (a_n) mértaniközép-sorozata az $(\frac{1}{n})$ sorozatnak. Ezért a fenti tétel alapján $a_n \rightarrow 0$.

3.50. Példa. Legyen

$$a_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mi az (a_n) határértéke?

Vegyük észre, hogy a (3.1)-ben definiált (e_n) sorozatból képezett mértaniközép-sorozat a következő alakú:

$$\sqrt[n]{e_1 \cdot e_2 \cdots e_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdots \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}},$$

ami a fenti tétel alapján e-hez tart. Ebből

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 1 \cdot e = e.$$

3.9. Nevezetes sorozathatárértékek

1.

$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

Bizonyítás. Ld. a 3.7. Állítást. □

2.

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenségből (ld. az 1.9. Tételt) $n \geq 2$ -re

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 + 0 = 1.$$

Innen a 3.13. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

3.

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

Bizonyítás. Az Archimedeszi axiómából következik, hogy $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < a < N$. Ezért $n \geq N$ esetén

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < a < N \leq n \implies \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Innen az előzőek és a 3.13. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

4.

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, \\ \nexists, & q \leq -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $0 < q < 1$, akkor könnyen látható, hogy (q^n) (szigorúan) monoton fogyó, tehát a 3.11. Tétel szerint az infimumához tart. Ha $a > 0$ infimuma volna, akkor $q^n \geq a$, vagyis $q \geq \sqrt[n]{a}$ volna, amiből határértéket véve $q \geq 1$ – ez ellentmondás. Tehát $q^n \rightarrow 0$.

Ha $-1 < q \leq 0$, akkor az előbbiek szerint a sorozat abszolút értéke, így maga a sorozat is 0-hoz tart. Ha $q > 1$, akkor $(\frac{1}{q})^n \rightarrow 0$, és ebből $q^n \rightarrow +\infty$, mivel a sorozat pozitív tagú. A $q \leq -1$ esetben a sorozatnak van $+\infty$ -hez és $-\infty$ -hez tartó részsorozata. □

5.

$$\lim (n^k \cdot q^n) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}, |q| < 1).$$

Bizonyítás. Elég belátni $0 < q < 1$ esetre. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k \cdot q^{n+1}}{n^k \cdot q^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot q \rightarrow 1 \cdot q = q < 1,$$

ezért elég nagy n -re

$$a_{n+1} < a_n,$$

tehát a sorozat (szigorúan) monoton fogyó, így az infimumához tart. Ha $a > 0$ alsó korlátja lenne, akkor

$$a \leq n^k \cdot q^n \iff \sqrt[n]{a} \leq (\sqrt[n]{n})^k \cdot q$$

volna, amiből határértéket véve

$$1 \leq q$$

következne – ez ellentmondás. □

6.

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}, a > 1).$$

Bizonyítás. Azonnal adódik az előzőből $q = \frac{1}{a}$ jelöléssel. □

7.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1).$$

Bizonyítás. Ha $n \geq [a] + 1 =: N$ ($[a]$ az a egészrésze), akkor $\frac{a}{n} < 1$. Így $n > N$ -re

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdots n} \leq \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{n} \rightarrow 0.$$

Innen a 3.13. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

8.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Bizonyítás.

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n}$$

és Rendőr-elv. □

9.

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Legyen $a_n \rightarrow +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor, ha $[a_n]$ jelöli az a_n egészrészét,

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n] + 1}.$$

A bal ill. jobb oldalon az $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ ill. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ egy-egy részsorozata áll, melyek mindegyike e -hez tart, tehát

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \rightarrow e.$$

Ha $x > 0$, akkor $a_n := \frac{n}{x} \rightarrow +\infty$, ezért az előzőek és a 3.58. Állítás alapján

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \rightarrow e^x.$$

A negatív x esete hasonlóan gondolható meg. □

10.

$$\lim \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e. \tag{3.10}$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy

$$0 < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{2n}, \quad (3.11)$$

ahonnan az állítás a Rendőr-elv alapján következik. Fejtsük ki az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ kifejezést a Binomiális tétel szerint! Ekkor, kihasználva, hogy $\binom{n}{0} = 1$ és $\binom{n}{1} = n$,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ = & 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} \right] \\ = & \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} \right] \\ = & \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \right] \\ = & \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left[\frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{(n-1) \cdots 1}{n^{n-1}} \right] \\ = & \frac{1}{2!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] + \frac{1}{3!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \right] + \cdots + \\ & + \frac{1}{n!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \right] \\ = & \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

A kapott kifejezés nyilvánvalóan pozitív. Továbbá az ún. *általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség*-ből következik, hogy tetszőleges $2 \leq k \leq n$ esetén

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \cdots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k \cdot (k-1)}{2n},$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] & \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left[1 - 1 + \frac{k \cdot (k-1)}{2n} \right] \\ & = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2n}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Kihasználva, hogy $(k-2)! \geq 2^{k-3}$, $k \geq 3$, kapjuk:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n} \cdot \left(1 + \sum_{k=3}^n \frac{1}{2^{k-3}}\right) \leq \frac{1}{2n} \cdot (1+2) = \frac{3}{2n}. \quad (3.14)$$

Egybevetve (3.12)-t, (3.13)-at és (3.14)-et, kapjuk (3.11)-et. \square

11.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Bizonyítás. Ld. a 3.49. Példát. \square

12.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Bizonyítás. Ld. a 3.50. Példát. \square

3.10. Valós számok valós kitevőjű hatványai

Az első fejezet végén volt szó valós számok racionális kitevős hatványairól, amelyeket a középiskolában megismert módon vezettünk be. Most a sorozathatárérték fogalmának ismeretében definiálni tudjuk egy (pozitív) szám tetszőleges valós, így irracionális kitevős hatványát is úgy, hogy a hatványozástól „elvárt” tulajdonságok érvényben maradjanak.

A definícióhoz szükségünk lesz a következő állításokra.

3.51. Állítás. *Legyen $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Ha $a > 1$, akkor*

$$a^r < a^s,$$

ha pedig $0 < a < 1$, akkor

$$a^r > a^s.$$

Legyen $0 < a < b$ és $r \in \mathbb{Q}$. Ha $r > 0$, akkor

$$a^r < b^r,$$

ha pedig $r < 0$, akkor

$$a^r > b^r.$$

Bizonyítás. Legyen először $a > 1$. A hatványozás azonosságaiából és a valós számok (r6.) rendezési tulajdonságából következik, hogy

$$a^r < a^s \Leftrightarrow 1 < a^{s-r},$$

ezért elég belátni, hogy ha $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, akkor $a^p > 1$. Legyen $p = \frac{n}{m}$, $m \neq 0$. Ekkor

$$a^p = \sqrt[m]{a^n}.$$

Mivel $a > 1$, azért szintén a hatványozás azonosságaiából és a rendezés (r6.) tulajdonságából következik, hogy $a^n > 1$ is teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt[m]{a^n} \leq 1$. Ekkor az előbbiekhöz hasonló meggondolással

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n \leq 1,$$

ami ellentmondás. Tehát $a^p = \sqrt[m]{a^n} > 1$.

Ugyanígy látható be az $0 < a < 1$ eset is.

Ha $0 < a < b$, akkor

$$a^r < b^r \iff 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^r,$$

ahol $\frac{b}{a} > 1$ és $r > 0$. Ez a bizonyítás első része alapján adódik. Hasonlóan gondolható meg az $r < 0$ eset is. \square

Az Archimedeszi axióma következménye lesz az alábbi állítás.

3.52. Állítás. *Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor található olyan $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növekvő sorozat, melyre $r_n \rightarrow x$.*

Bizonyítás. Az 1.30. Következmény azt mondja, hogy minden nyílt intervallumban, így az $(x-1, x)$ intervallumban is van racionális szám. Ezért

$$\exists r_1 \in (x-1, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Világos, hogy $(r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x)$ egy nyílt intervallum. Ezért igaz, hogy

$$\exists r_2 \in (r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Hasonlóan,

$$\exists r_3 \in (r_2, x) \cap (x - \frac{1}{3}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Folytatva az eljárást, kapjuk racionális számoknak olyan r_1, r_2, r_3, \dots szigorúan monoton növvő sorozatát, melyre

$$0 < x - r_n < \frac{1}{n} \implies r_n \rightarrow x.$$

□

3.53. Definíció. Legyenek $a \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ekkor a fentiek alapján létezik $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növvő sorozat, melyre $r_n \rightarrow x$. A 3.51. Állítás szerint az (a^{r_n}) sorozat monoton, és korlátos (hiszen bármely $q > x$, $q \in \mathbb{Q}$ esetén a^q egy felső ill. alsó korlátja, attól függően, hogy $a > 1$ vagy $0 < a < 1$) – tehát konvergens. Definálj

$$a^x := \lim a^{r_n}.$$

Be kell látnunk még, hogy a fenti definíció nem függ az (r_n) sorozat megválasztásától. Ehhez az alábbi állítást gondoljuk meg, mely az

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad (a > 0)$$

nevezetes sorozathatárérték általánosítását mondja ki.

3.54. Állítás. Legyen $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \rightarrow 0$ racionális számokból álló nullsorozat és $a > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$a^{r_n} \rightarrow 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Tudjuk, hogy $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ és ezért a reciproksorozatra $a^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$. Így ε -hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $\forall n \geq N$ esetén

$$a^{\frac{1}{n}}, a^{-\frac{1}{n}} \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Speciálisan,

$$a^{\frac{1}{N}}, a^{-\frac{1}{N}} \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon). \quad (3.15)$$

Mivel $r_n \rightarrow 0$, ezért $\frac{1}{N} > 0$ -hoz létezik olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall k \geq K$ esetén

$$-\frac{1}{N} < r_k < \frac{1}{N}.$$

A (3.15)-ből és a 3.51. Állításból kapjuk, hogy $a > 1$ esetén

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{r_k} < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon, \quad k \geq K.$$

Tehát $\varepsilon > 0$ -hoz találtunk olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindexet, hogy $\forall k \geq K$ esetén $a^{r_k} \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, ezért $a^{r_n} \rightarrow 1$.

A $0 < a < 1$ eset könnyen meggondolható abból, hogy ilyenkor $\frac{1}{a} > 1$. □

3.55. Következmény. Az a^x , $x \in \mathbb{R}$ fenti definíciója nem függ az x -hez tartó (szigorúan monoton növvő) racionális számokból álló sorozat megválasztásától, tehát tetszőleges $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \rightarrow x$ és $q_n \rightarrow x$ szigorúan monoton növvő sorozatok esetén $\lim a^{r_n} = \lim a^{q_n}$.

Bizonyítás. Ha $r_n \rightarrow x$ és $q_n \rightarrow x$ a fenti tulajdonságú, akkor $s_n := r_n - q_n$, $n \in \mathbb{N}^+$ definícióval $(s_n) \subset \mathbb{Q}$ és $s_n \rightarrow 0$. Az előző állítás alapján

$$\frac{a^{r_n}}{a^{q_n}} = a^{r_n - q_n} = a^{s_n} \rightarrow 1.$$

Mivel (a^{r_n}) és (a^{q_n}) is konvergens, ezért a határértékük meg kell egyezzen. □

A sorozathatárérték és műveletek kapcsolatából adódik, hogy a fent definiált valós kitevős hatványozás megőrzi a hatványozás ismert azonosságait.

3.56. Állítás. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a hatványozás azonosságai érvényben maradnak valós kitevős hatványokra is, tehát bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$;
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

Továbbá, érvényben maradnak a 3.51. Állításban kimondott rendezési tulajdonságok is $r, s \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Az 1. állítást bizonyítjuk, a többi hasonlóan megy. Legyenek $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \rightarrow x$ és $q_n \rightarrow y$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő sorozatok. Nyilván $r_n + q_n \rightarrow x + y$ és $(r_n + q_n)$ szigorúan monoton növekvő. A definíció alapján, és kihasználva a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultakat:

$$a^x \cdot a^y = (\lim a^{r_n}) \cdot (\lim a^{q_n}) = \lim (a^{r_n} \cdot a^{q_n}) = \lim a^{r_n + q_n} = a^{x+y},$$

ahol alkalmaztuk a racionális kitevős hatványozás azonosságát. \square

Ezen állítás egyik következménye, hogy a továbbiakban, ha a^x -et akarjuk közelíteni, vehetünk tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow x$ sorozatot.

3.57. Következmény. *Ha $a > 0$ és $x_n \rightarrow x$ tetszőleges valós sorozat, akkor*

$$a^{x_n} \rightarrow a^x.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságai miatt

$$a^{x_n} \rightarrow a^x \iff \frac{a^{x_n}}{a^x} = a^{x_n - x} \rightarrow 1.$$

Tudjuk, hogy $x_n - x \rightarrow 0$ és a 3.54. Állítás bizonyításával analóg módon látható, hogy $a^{x_n - x} \rightarrow 1$ teljesül (a bizonyításban sehol sem használtuk ki, hogy a kitevők racionálisak!). \square

Végül belátjuk, hogy a 3.25. Következmény is általánosítható valós kitevőre.

3.58. Állítás. *Legyen (a_n) valós számsorozat, $a_n, A > 0$ és $a_n \rightarrow A$. Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$a_n^x \rightarrow A^x.$$

Bizonyítás. Legyen először $x > 0$. Elég megmutatni, hogy

$$\frac{a_n^x}{A^x} = \left(\frac{a_n}{A} \right)^x \rightarrow 1,$$

ahol

$$b_n := \frac{a_n}{A} \rightarrow 1.$$

Belátjuk, hogy $b_n^x \rightarrow 1$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$. Ekkor felhasználva, hogy $\frac{1}{x} > 0$, és alkalmazva a 3.56. Állítást

$$(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{x}} < 1 < (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{x}}.$$

Mivel $b_n \rightarrow 1$, ezért létezik $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \geq N$ esetén

$$(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{x}} < b_n < (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{x}} \implies 1 - \varepsilon < b_n^x < 1 + \varepsilon,$$

hiszen $x > 0$. Tehát bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan N küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén

$$b_n^x \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon),$$

ezért $b_n^x \rightarrow 1$.

Az $x < 0$ eset következik abból, hogy egy 1-hez tartó sorozat reciproka is 1-hez tart. \square

Negyedik fejezet

Függvények határértéke és folytonossága

Egy függvény határértéke az a pontban A , ha az a -hoz közeli helyeken a függvény A -hoz közeli értékeket vesz fel. Egy függvény folytonos az a pontban, ha az a -hoz közeli helyeken a függvény $f(a)$ -hoz közeli értékeket vesz fel. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Függvény határértékének és folytonosságának fogalma
- Határérték ill. folytonosság és műveletek kapcsolata
- Végtelenbeli és végtelen határérték
- Egyoldali határérték
- Monoton függvény határértéke
- Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

4.1. Torlódási pontok

Az előző fejezet 3.7. Definíciójának megfelelően jelölje a továbbiakban

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

az ún. *kibővített számegyenes*et.

Idézzük fel, hogy az 1.29. Definícióban bevezettük egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú *környezetét* mint a

$$K_r(a) = (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot. Bár a $+\infty$ és $-\infty$ nem valós számok, szükségünk lesz a „környezetük” fogalmára, melyeket nem korlátos intervallumokként értelmezünk. Legyen $r > 0$ pozitív szám, ekkor

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty \right),$$
$$K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r} \right).$$

Világos, hogy a fenti jelöléssel, ha $r > 0$ kicsi és $x \in K_r(+\infty)$, akkor x „közel van” a $+\infty$ -hez. Továbbá az is könnyen látható, hogy egy (a_n) sorozat $A \in \overline{\mathbb{R}}$ (véges vagy végtelen) határértékének fogalma a fenti környezetek segítségével egyszerűen definiálható az alábbi módon.

4.1. Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz létezik } N \in \mathbb{N} \text{ küszöbindex, melyre } \forall n \geq N \text{ esetén } a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Bevezetjük még egy a pont $r > 0$ sugarú ún. *kipontozott környezetét*, mely az a -n kívüli pontokat tartalmazza az r sugarú környezetből, vagyis

$$\begin{aligned} \dot{K}_r(a) &:= (a-r, a) \cup (a+r), \text{ ha } a \in \mathbb{R}, \\ \dot{K}_r(+\infty) &:= K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \\ \dot{K}_r(-\infty) &:= K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

4.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont *torlódási pontja* H -nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset,$$

vagyis ha az a pont tetszőleges környezete tartalmaz tőle különböző H -beli elemet.

Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjainak halmazát jelölje H' .

Könnyen látható, hogy ha $a \in H'$, akkor $a \in H$ és $a \notin H$ is előfordulhat (pl. $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$ is lehet). Ha $H = \mathbb{N}$, akkor $H' = \{+\infty\}$, továbbá ha $H = [a, b]$, akkor $H' = [a, b]$. Másrészt, ha H véges halmaz, akkor meggondolható, hogy $H' = \emptyset$.

Az alábbi állítás a torlódási pont egy fontos ekvivalens definícióját fogalmazza meg.

4.3. Állítás. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

(i) $a \in H'$;

(ii) létezik olyan $(h_n) \subset H$ H -beli sorozat, melyre $h_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$ és $h_n \rightarrow a$.

Bizonyítás. (i) \Rightarrow (ii): Tegyük fel, hogy $a \in H'$ teljesül. Legyen

$$h_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap H$$

tetszőleges elem – ilyen a torlódási pont definíciója alapján létezik. Világos, hogy az így kapott (h_n) sorozat kielégíti a kívánalmakat.

(ii) \Rightarrow (i): Mivel $h_n \rightarrow a$, ezért $\forall r > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $h_n \in K_r(a)$. A feltételek miatt $n \geq N$ esetén $h_n \in \dot{K}_r(a) \cap H$ is teljesül, ezért $\forall r > 0$ esetén $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$, így a valóban torlódási pontja H -nak. \square

4.2. Függvény határértéke

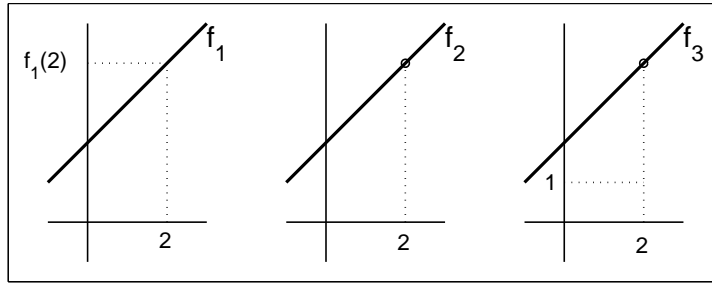
Vizsgáljunk meg három, egymáshoz nagyon hasonló függvényt!

Legyen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & f_1(x) &:= x + 2, \\ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\rightarrow \mathbb{R} & f_2(x) &:= \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2, \\ f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & f_3(x) &:= \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \neq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1. \text{ ábra})$$

A függvények $a := 2$ pont körüli viselkedésére vagyunk kíváncsiak. Az f_1 függvény esetén jól látható, hogy ha x közel van a 2-höz, akkor az $f_1(x) = x + 2$ értékek közel esnek a 4-hez, amely éppen $f_1(2)$.

Az f_2 függvény ugyan nincs értelmezve a 2-ben, de ha x közel van a 2-höz, az $f_2(x) = x + 2$ értékek



4.1. ábra.

egy szám, ebben az esetben a 4 körül keveset ingadoznak.

Az f_3 függvény a 2-ben is értelmezve van. Ha x közel van a 2-höz (de $x \neq 2$), akkor az $f_3(x) = x+2$ értékek (az f_1 és f_2 függvényhez hasonlóan) a 4 körül keveset ingadoznak (függetlenül attól, hogy $f(2) = 1$).

A példákban tapasztalt jelenségek nyomán alakítjuk ki a függvény határértékének fogalmát.

Az f függvény a pontbeli határértékének fogalmát olyan pontokra értelmezzük, melyek „elég közel” vannak az értelmezési tartományhoz, de annak nem feltétlenül elemei – vagyis melyek $\mathcal{D}(f)'$ -ben vannak.

4.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'$ az értelmezési tartomány egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *határértéke* a -ban az $A \in \mathbb{R}$ pont, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

vagyis a -hoz „elég közeli” (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak A -hoz.

Jelölésben:

$$\lim_a f = A \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$, vagyis a az értelmezési tartománynak is eleme, a definíció nem függ a függvény a -ban felvett helyettesítési értékétől, $f(a)$ -tól!

Továbbá, azért követeltük meg, hogy a az értelmezési tartomány torlódási pontja legyen, hogy így (bármely $\delta > 0$ esetén) a $\dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ tartalmazzon (legalább egy) x elemet.

4.5. Feladat. Fogalmazzuk meg a fenti definíció összesen 9 speciális esetét aszerint, hogy $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$, illetve $A \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ vagy $A = -\infty$!

Nézzük meg példaként az $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ esetet! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\begin{aligned} \lim_a f = A &\iff \\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, &\text{ hogy ha } x \in (a - \delta, a + \delta) \cap \mathcal{D}(f), x \neq a, \text{ akkor } f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon). \end{aligned}$$

Nézzük meg az $a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ esetet is! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\begin{aligned} \lim_a f = +\infty &\iff \\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, &\text{ hogy ha } x \in (a - \delta, a + \delta) \cap \mathcal{D}(f), x \neq a, \text{ akkor } f(x) > \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

(Világos, hogy itt ε helyett $K > 0$ -t és $f(x) > K$ -t is írhattunk volna.)

A fejezet elején lévő példában

$$\lim_2 f_1 = \lim_2 f_2 = \lim_2 f_3 = 2.$$

Példa végtelen határértékre:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

A következő fontos tétel a függvényhatárérték fogalmát „viszi át” sorozathatárérték fogalmára – ezért a neve Átviteli elv.

4.6. Tétel (Átviteli elv függvényhatárértékre). *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

$$(i) \lim_a f = A;$$

$$(ii) \text{ minden } (x_n) \subset \mathcal{D}(f), x_n \neq a \ (n \in \mathbb{N}), x_n \rightarrow a \text{ sorozat esetén } f(x_n) \rightarrow A.$$

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ tetszőleges sorozat (ilyen létezik $a \in \mathcal{D}(f)'$ és a 4.3. Állítás miatt!). Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel (i) szerint $\lim_a f = A$, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A). \quad (4.1)$$

Node $x_n \rightarrow a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \neq a$, $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n \geq N$ esetén $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (4.1) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(A), \quad n \geq N.$$

Tehát adott ε -hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$, ezért $f(x_n) \rightarrow A$ teljesül.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy (ii) teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy f -nek A nem határértéke a -ban. Ekkor

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy minden } \frac{1}{n} > 0 \text{ esetén található olyan } x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ melyre } f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ sorozatot (hiszen $x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\rightarrow A$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$ minden n -re), ami ellentmond (ii) -nek. \square

4.7. Következmény. *Adott pontbeli függvényhatárérték egyértelmű. Tehát*

$$\lim_a f = A \text{ és } \lim_a f = B \implies A = B.$$

Bizonyítás. Következik a 3.9. és 3.40. Megjegyzésekből és a 4.6. Tételből. \square

4.8. Példa. Egyszerű példa olyan függvényre, amelynek nem létezik határértéke egy pontban, az előjelfüggvény, azaz legyen

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ennek az $a = 0$ pontban nincs határértéke, hiszen ha $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, akkor $f(x_n) = 1 \rightarrow 1$, viszont ha $x_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$, akkor $f(x_n) = -1 \rightarrow -1$. Viszont könnyen látható, hogy ez a függvény sem „teljesen csúnya”, mert rendelkezik a következő tulajdonsággal. Ha $x_n > 0$, $x_n \rightarrow 0$, azaz az (x_n) sorozat jobbról tart az a ponthoz, akkor $f(x_n) = 1 \rightarrow 1$. Hasonlóan, ha $x_n < 0$, $x_n \rightarrow 0$, azaz az (x_n) sorozat balról tart az a ponthoz, akkor $f(x_n) = -1 \rightarrow -1$.

Az Átviteli elv egy következménye, hogy függvények véges határértékére megfogalmazhatunk a sorozat konvergenciájával analóg módon *Cauchy-kritériumot* (ld. a 3.36. Tételt).

4.9. Tétel (Cauchy-kritérium függvényhatárértékre). *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$. A következők ekvivalensek.*

(i) *Létezik $\lim_a f = A \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$, hogy minden $x, y \in \dot{K}_\delta(a) \cap D(f)$, esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. (i) \Rightarrow (ii): Tegyük fel, hogy létezik $\lim_a f = A \in \mathbb{R}$. Ez azt jelenti a határérték definíciója szerint, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így ha $x, y \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) \Rightarrow (i): Legyen $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$. Ekkor a sorozathatárérték definíciója alapján

$$\forall \delta > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap D(f).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adva. A (ii) feltételből kapjuk, hogy ehhez létezik megfelelő $\delta > 0$ szám. Válasszunk δ -hoz az előbbiek szerinti N küszöbindexet! Ekkor (ii) alapján

$$n, m \geq N \text{ esetén } x_n, x_m \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Tehát erre az (x_n) sorozatra $(f(x_n))$ sorozat Cauchy-sorozat, így létezik $\lim f(x_n)$ véges határérték. Azt kell meggondolnunk, hogy különböző (x_n) sorozatokra nem kaphatunk különböző határértékeket (tehát minden esetben ugyanaz az A szám lesz a határérték). Legyen $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ sorozat – ehhez található $A \in \mathbb{R}$, hogy $f(x_n) \rightarrow A$. Hasonlóan, legyen $(z_n) \subset D(f)$, $z_n \neq a$, $z_n \rightarrow a$. Az előzőek alapján ehhez is található $B \in \mathbb{R}$, hogy $f(z_n) \rightarrow B$.

Ekkor „összefésülve” az (x_n) és a (z_n) sorozatot kapjuk, hogy az alábbi sorozat

$$x_1, z_1, x_2, z_2, \dots, x_n, z_n, \dots$$

a -hoz tart. Az előzőek alapján következik, hogy

$$f(x_1), f(z_1), f(x_2), f(z_2), \dots, f(x_n), f(z_n), \dots$$

sorozat Cauchy-sorozat, azaz konvergens. Mivel a páratlan indexű részsorozata A -hoz, a páros indexű B -hez tart, ezért a 3.29. Állítás miatt $A = B$. \square

A függvényhatárérték és műveletek kapcsolata könnyen meggondolható az Átviteli elv és a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultak alapján (ld. 3.45. Állítás).

4.10. Állítás (Függvényhatárérték és műveletek). *Legyenek f és g valós függvények, legyen $a \in (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g))'$, és $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy*

$$\lim_a f = A \text{ és } \lim_a g = B.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a |f| = |A|,$$

továbbá

$$\begin{aligned}\exists \lim_a (f + g) &= A + B, \text{ ha } A + B \text{ értelmes;} \\ \exists \lim_a (f \cdot g) &= A \cdot B, \text{ ha } A \cdot B \text{ értelmes.}\end{aligned}$$

Ha $g \neq 0$ az a egy kipontozott környezetében, akkor

$$\exists \lim_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{A}{B}, \text{ ha } \frac{A}{B} \text{ értelmes.}$$

Az A és B közötti műveleteket a 3.45. Állítás alapján értelmezzük.

Bizonyítás. A bizonyítások adódnak a 4.6. Tételből és a 3.45. Állításból. Példaként nézzük meg az $f + g$ határértékének esetét! A 4.6. Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \neq a, x_n \rightarrow a \text{ akkor } (f + g)(x_n) \rightarrow A + B.$$

Mivel $\lim_a f = A$ és $\lim_a g = B$, ezért a 4.6. Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen sorozatra

$$f(x_n) \rightarrow A \text{ és } g(x_n) \rightarrow B.$$

Alkalmazva a 3.45. Állítást kapjuk, hogy ha $A + B$ értelmes, akkor

$$\lim (f + g)(x_n) = \lim (f(x_n) + g(x_n)) = A + B.$$

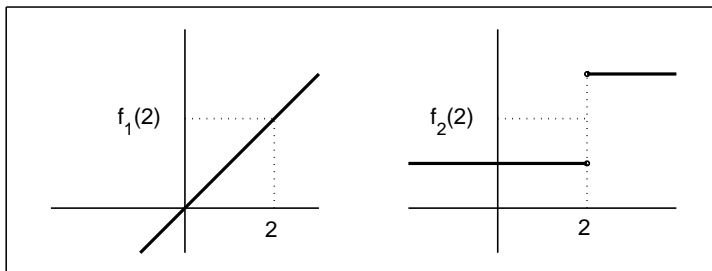
□

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az $f \circ g$ kompozíció-művelet nem viselkedik ilyen jól a függvényhatárértékre nézve.

4.3. Függvény folytonossága

Legyen $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f_1(x) := x$, $a := 2$. Egy másik függvény pedig legyen $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x < 2 \\ 2, & \text{ha } x = 2 \\ 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases} \quad (4.2. \text{ ábra})$$



4.2. ábra.

Látható, hogy az f_1 függvény olyan, hogy ha x közel van az $a := 2$ ponthoz, akkor az $f_1(x) = x$ függvényértékek is közel lesznek az $f_1(2) = 2$ értékhez. Ugyanezt nem mondhatjuk el az f_2 függvényről. Akármilyen x számot veszünk is, amely közel van az $a = 2$ ponthoz ($x \neq 2$), az $f_2(x)$ függvényértékek elég távol lesznek az $f_2(2) = 2$ számtól (biztosan $\frac{1}{2}$ -nél távolabb). Az f_1 függvény viselkedése nyomán fogalmazzuk meg a folytonosság fogalmát.

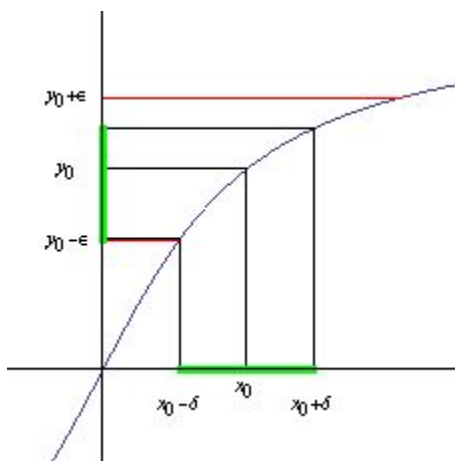
4.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartomány egy pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *follytonos* a -ban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)),$$

vagyis a -hoz elég „közeli” (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak $f(a)$ -hoz.

Ha $H \subset \mathcal{D}(f)$ olyan részhalmaz, hogy f minden $a \in H$ pontban folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f *follytonos* H -n. Ha $H = \mathcal{D}(f)$, akkor azt mondjuk, hogy f *follytonos (függvény)*.

Figyeljük meg, miben különbözik ez a definíció a függvényhatárérték 4.4. Definíciójától! Most megköveteltük, hogy $a \in \mathcal{D}(f)$ legyen – értelmezési tartományon kívüli pontban nem beszélhetünk a függvény folytonosságáról. Másrészt, a definícióban szereplő $x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ pont $x = a$ is lehet. Erre azonban triviálisan teljesül, hogy $f(x) = f(a) \in K_\varepsilon(f(a))$, mivel itt A helyett $f(a)$ szerepel.



4.3. ábra. f folytonos x_0 -ban, $f(x_0) = y_0$

4.12. Állítás. Ha $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$, akkor

$$f \text{ folytonos } a\text{-ban} \iff \exists \lim_a f = f(a).$$

Bizonyítás. Rögtön adódik a 4.4. és 4.11. Definíciókból. □

A folytonosság definíciója segítségével a véges helyen vett véges határérték fogalma is újradefiniálható az alábbi módon.

4.13. Definíció. Ha $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_a f =: A \in \mathbb{R} \iff \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ A, & x = a \end{cases} \text{ függvény folytonos } a\text{-ban.}$$

Ha például $\mathcal{D}(f)$ intervallum, akkor $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$ teljesül minden pontjára.

Egyszerűen meggondolható, hogy a *Dirichlet-függvény* egyetlen pontban sem folytonos.

4.14. *Megjegyzés.* Ha $a \in \mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{D}(f)'$, akkor a ún. *izolált pontja* $\mathcal{D}(f)$ -nek. Könnyen látható a definíció alapján, hogy ilyenkor f mindig folytonos a -ban.

4.15. Tétel (Átviteli elv függvény folytonosságára). *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) f folytonos a -ban;

(ii) minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \rightarrow a$ sorozat esetén $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Bizonyítás. Analóg módon történik, mint a 4.6. Tételé.

(i) \Rightarrow (ii): Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \rightarrow a$ tetszőleges sorozat. Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel (i) szerint f folytonos a -ban, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy minden } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)). \quad (4.2)$$

Node $x_n \rightarrow a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n > N \text{ indexre } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n > N$ esetén $x_n \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (4.2) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a)), \quad n > N.$$

Tehát adott ε -hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n > N$ -re $f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a))$, ezért $f(x_n) \rightarrow f(a)$ teljesül.

(ii) \Rightarrow (i): Tegyük fel, hogy (ii) teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy f nem folytonos a -ban. Ekkor

$\exists \varepsilon > 0$, hogy minden $\frac{1}{n} > 0$ esetén található olyan $x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f)$, melyre $f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a))$.

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \rightarrow a$ sorozatot (hiszen $x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a))$ minden n -re), ami ellentmond (ii)-nek. \square

4.16. Megjegyzés. Ha a fenti átviteli elvet akarjuk alkalmazni egy $a \in \mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{D}(f)'$ pontban, akkor a 4.3. Állítás alapján nincs olyan $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$ sorozat, hogy $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$ és $x_n \rightarrow a$. Ezért a (ii)-ben csak olyan (x_n) sorozatokat vizsgálunk, melynek tagjai egy indextől kezdve megegyeznek a -val. Ekkor egy indextől kezdve $f(x_n) = f(a)$, tehát $f(x_n) \rightarrow f(a)$ teljesül. Ezzel beláttuk a 4.14. Megjegyzést is.

A függvények közötti műveletek a folytonosságra is „jól viselkednek”.

4.17. Állítás (Folytonosság és műveletek). *Legyenek f és g valós függvények és $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Tegyük fel, hogy f és g folytonosak a -ban. Ekkor*

$$\begin{aligned} &|f|, \\ &f + g, \\ &f \cdot g \text{ és} \\ &\frac{f}{g} \quad (\text{ha } g(a) \neq 0) \end{aligned}$$

is folytonosak a -ban.

Bizonyítás. A bizonyítások adódnak a 4.15. Tételből és a sorozatok közötti műveletekről tanultakból. Példaként nézzük meg az $f \cdot g$ folytonosságának esetét! A 4.15. Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \rightarrow a \text{ akkor } (f \cdot g)(x_n) \rightarrow (f \cdot g)(a).$$

Mivel f és g folytonosak a -ban, ezért a 4.15. Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen sorozatra

$$f(x_n) \rightarrow f(a) \text{ és } g(x_n) \rightarrow g(a).$$

Alkalmazva a 3.19. Állítást kapjuk, hogy

$$\lim(f \cdot g)(x_n) = \lim(f(x_n) \cdot g(x_n)) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a).$$

\square

4.4. Határérték, folytonosság – és kompozíció

Az előző fejezet utolsó tétele a folytonosság és függvények közötti műveletek kapcsolatáról a függvényhatárértékre vonatkozó megfelelő tétel analogonja. Van azonban a függvények között lehetséges műveletek között még egy, a *kompozíció* (ld. 1.21. Definíció), melyre folytonosság és határérték esetén lényegesen különböző tételeket kell megfogalmaznunk. Kezdjük a folytonosság és függvények közötti kompozíció kapcsolatával.

4.18. Tétel (Folytonosság és kompozíció). *Legyenek f és g valós függvények, és tegyük fel, hogy g folytonos az $a \in \mathcal{D}(f \circ g)$ pontban, f pedig az $g(a) \in \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $f \circ g$ folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Az állítást legegyszerűbben a 4.15. Átviteli elv segítségével bizonyíthatjuk. Legyen $x_n \rightarrow a$, $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$ tetszőleges sorozat. A g függvény a -beli folytonosságára vonatkozó átviteli elv alapján $g(x_n) \rightarrow g(a)$. Az f függvény $g(a)$ pontbeli folytonosságát kihasználva

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \rightarrow f(g(a)) = (f \circ g)(a),$$

amiből az állítás következik. □

Próbáljuk meg megfogalmazni a függvényhatárértékre vonatkozó, fentiek megfelelő állítást!

Hamis Állítás. Legyenek f és g valós függvények, $a \in \mathcal{D}(f \circ g)'$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim_a g = b$ és $\exists \lim_b f = c$. Ekkor

$$\exists \lim_a (f \circ g) = c.$$

Egy nagyon egyszerű példán megmutatható, hogy a fenti állítás nem igaz! Legyen

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Legyen $a = 1$. Ekkor $\exists \lim_a g = b = 0$, $\exists \lim_b f = \lim_0 f = c = 1$, de

$$\lim_a (f \circ g) = 2 \neq c = 1!$$

A probléma azzal van, hogy a g függvény „nagyon nem injektív” az a pont környezetében. Ha megpróbálnánk a fenti *Hamis Állítást* az átviteli elv segítségével bizonyítani, kiderül, ez miért baj. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ tetszőleges sorozat. Ekkor a 4.6. Tétel alapján $g(x_n) \rightarrow b$. Ebből azonban nem következik (feltétlenül), hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \rightarrow c$ – ugyanis nem biztos, hogy $g(x_n) \neq b$ (legalább egy indextől kezdve) teljesül! Épp ez a probléma az előbbi példában is. A következő tétel a helyes állítást fogalmazza meg.

4.19. Tétel (Határérték és kompozíció). *Legyenek f és g valós függvények, $a \in \mathcal{D}(f \circ g)'$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim_a g = b$. Ekkor az alábbi 1. és 2. állítások bármelyikéből következik, hogy*

$$\exists \lim_a (f \circ g) = c.$$

1. $b \in \mathcal{D}(f)$ és f folytonos b -ben, $f(b) = c$;
2. $b \in \mathcal{D}(f)'$ és $\exists \lim_b f =: c$, továbbá a -nak létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy $g(x) \neq b$, ha $x \in \dot{K}(a)$ (pl. g injektív/szigorúan monoton az a egy környezetében vagy $b = \pm\infty$).

Bizonyítás. A bizonyítás lényege, hogy mindkét esetben működik az átviteli elv. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \rightarrow a$ tetszőleges sorozat. Ekkor a 4.6. Tétel alapján $g(x_n) \rightarrow b$. Továbbá:

1. Mivel f folytonos b -ben, ezért $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \rightarrow f(b) = c$.
2. Mivel $x_n \in \dot{K}(a)$ egy indextől kezdve, ezért $g(x_n) \neq b$ teljesül elég nagy n -re. Így ismét alkalmazva a 4.6. Tételt, $\lim_b f = c$ miatt kapjuk, hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \rightarrow c$. \square

4.5. Jobb és bal oldali határértékek

4.20. Definíció. Egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú bal oldali környezetén a

$$K_r^-(a) := (a - r, a]$$

intervallumot értjük. Az r sugarú jobb oldali környezetén a

$$K_r^+(a) := [a, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. A $+\infty$ -nek csak bal oldali, a $-\infty$ -nek csak jobb oldali környezeteit értelmezzük – ezek megegyeznek az eredeti környezetekkel, vagyis

$$\begin{aligned} K_r^-(+\infty) = K_r(+\infty) &:= \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \\ K_r^+(-\infty) = K_r(-\infty) &:= \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

4.21. Definíció. Egy a pont $r > 0$ sugarú kipontozott bal/jobbi oldali környezetein azon halmazokat értjük, melyek az a -n kívüli pontokat tartalmazzák az r sugarú bal/jobbi oldali környezetből, vagyis

$$\begin{aligned} \dot{K}_r^-(a) &:= (a - r, a), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}, \\ \dot{K}_r^+(a) &:= (a, a + r), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}, \\ \dot{K}_r^-(+\infty) &:= K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \\ \dot{K}_r^+(-\infty) &:= K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

4.22. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont bal (jobb) oldali torlódási pontja H -nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{K}_r^-(a) \cap H \neq \emptyset \text{ (} \dot{K}_r^+(a) \cap H \neq \emptyset \text{),}$$

vagyis ha az a pont tetszőleges bal (jobb) oldali környezete tartalmaz tőle különböző H -beli elemet. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz bal ill. jobb oldali torlódási pontjainak halmazát jelölje H'_- ill. H'_+ .

4.23. Megjegyzés. Könnyen meggondolható, hogy $H'_- \subset H'$ és $H'_+ \subset H'$, de a fordított irányú tartalmazások nem állnak fent feltétlenül! Például, $H = (a, b)$ esetén $a \in H'$, de $a \notin H'_-$.

Az alábbi állítás a bal/jobbi oldali torlódási pont fontos ekvivalens definícióját fogalmazza meg.

4.24. Állítás. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- (i) $a \in H'_-$ ($a \in H'_+$);

(ii) létezik olyan $(h_n) \subset H$ sorozat, melyre $h_n < a$ ($h_n > a$), $n \in \mathbb{N}$ és $h_n \rightarrow a$.

Bizonyítás. Ld. mint a 4.3. Állítás bizonyítása. \square

Most definiáljuk f függvény a pontbeli bal/jobb oldali határértékének fogalmát.

4.25. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'_-$ ($a \in \mathcal{D}(f)'_+$) az értelmezési tartomány egy bal (jobb) oldali torlódási pontja.

Azt mondjuk, hogy az f függvény *bal (jobb) oldali határértéke a -ban az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ pont*, ha

$\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, hogy ha $x \in \dot{K}_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f)$ ($x \in \dot{K}_\delta^+(a) \cap \mathcal{D}(f)$), akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Jelölésben:

$$\begin{aligned} \lim_{a-0} f = A \text{ vagy } \lim_{a-} f = A \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \text{ ill.} \\ \lim_{a+0} f = A \text{ vagy } \lim_{a+} f = A \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A. \end{aligned}$$

Világos, hogy $+\infty$ -ben csak bal oldali, $-\infty$ -ben pedig csak jobb oldali határértéket értelmezhetünk.

4.26. Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'_- \cap \mathcal{D}(f)'_+$. Ekkor

$$\exists \lim_a f \iff \exists \lim_{a-0} f, \exists \lim_{a+0} f \text{ és } \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f.$$

Bizonyítás. Azonnal adódik a definícióból. \square

4.27. Példa.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

A bal/jobb oldali határérték definíciójához hasonló módon értelmezhetjük egy függvény balról ill. jobbról való folytonosságát.

4.28. Definíció. Legyen $a \in \mathcal{D}(f)'_- \cap \mathcal{D}(f)$ ($a \in \mathcal{D}(f)'_+ \cap \mathcal{D}(f)$). Azt mondjuk, hogy f *balról (jobbról) folytonos a -ban*, ha

$$\exists \lim_{a-0} f = f(a) \quad (\exists \lim_{a+0} f = f(a)).$$

4.29. Feladat. Fogalmazzuk meg a függvény bal/jobb oldali határértékére ill. folytonosságára vonatkozó átviteli elvet!

4.30. Tétel (Monoton függvények határértékéről). *Minden monoton függvénynek az értelmezési tartománya minden bal (jobb) oldali torlódási pontjában létezik bal (jobb) oldali határértéke, mégpedig:*

1. ha f monoton növekvő, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{a-0} f &= \sup_{(-\infty, a) \cap \mathcal{D}(f)} f, \\ \lim_{a+0} f &= \inf_{(a, +\infty) \cap \mathcal{D}(f)} f, \end{aligned} \tag{4.3}$$

2. ha f monoton fogyó, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{a-0} f &= \inf_{(-\infty, a) \cap \mathcal{D}(f)} f, \\ \lim_{a+0} f &= \sup_{(a, +\infty) \cap \mathcal{D}(f)} f. \end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned}\sup_H f &:= \sup \{f(x) : x \in H\}, \\ \inf_H f &:= \inf \{f(x) : x \in H\}.\end{aligned}$$

Bizonyítás. A (4.3) esetet bizonyítjuk, a többi hasonlóan meggondolható.

Legyen

$$A := \sup_{(-\infty, a) \cap \mathcal{D}(f)} f.$$

Be kell látni, hogy $\lim_{a-0} f$ létezik és $= A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A szuprémum definíciója miatt

$$\exists x' \in (-\infty, a) \cap \mathcal{D}(f) : f(x') \in K_\varepsilon(A)$$

(ha A véges, akkor $A - \varepsilon < f(x') < A$). Mivel f monoton növény, ezért

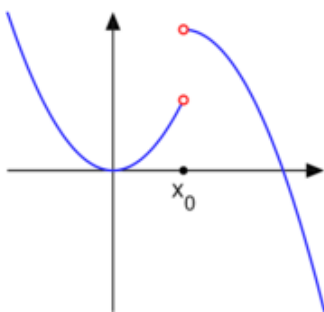
$$\text{ha } x' < x < a \text{ és } x \in \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x') \leq f(x) \leq A \Rightarrow f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Nyilván $\exists \delta > 0$, melyre $(x', a) = \dot{K}_\delta^-(a)$ (ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\delta := |a - x'|$). Ezzel a δ választással

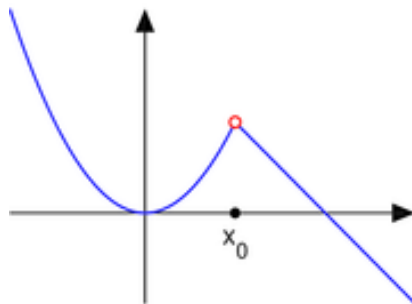
$$x \in \dot{K}_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f) (\Leftrightarrow x' < x < a, x \in \mathcal{D}(f)) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

tehát $\lim_{a-0} f = A$. □

A bal és jobb oldali határérték segítségével osztályozhatjuk egy függvény értelmezési tartományának azon pontjait, melyekben nem folytonos.



4.4. ábra. Elsőfajú szakadási hely - ugrás ($f(x_0) = 0$)



4.5. ábra. megszüntethető szakadási hely ($f(x_0) = 0$)

4.31. Definíció (Szakadási pontok osztályozása). Ha $a \in \mathcal{D}(f)$ olyan pont, hogy f nem folytonos a -ban, akkor a *szakadási pontja* f -nek.

Az $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$ az f *elsőfajú szakadási pontja*, ha

$$\exists \lim_{a-0} f, \exists \lim_{a+0} f \in \mathbb{R}.$$

Ilyenkor

$$u := \left| \lim_{a+0} f - \lim_{a-0} f \right|$$

az f *ugrása* a -ban.

Az elsőfajú szakadási pont speciális esete a *megszüntethető szakadási pont*, ahol $u = 0$, vagyis

$$\mathbb{R} \ni \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f (= \lim_a f \neq f(a)).$$

Az $a \in \mathcal{D}(f)$ *másodfajú szakadási pont*, ha nem elsőfajú.

4.32. *Megjegyzés.* A 4.30. Tételből rögtön adódik, hogy intervallumon értelmezett monoton függvénynek bármely szakadási pontja csak elsőfajú lehet, de nem megszüntethető. (Világos, hogy a monotonitás miatt a létező egyoldali határértékek végesek.)

4.33. *Megjegyzés.* A Dirichlet-függvénynek minden valós szám másodfajú szakadási pontja.

4.6. Elemi függvények folytonossága és határértéke

Jelen fejezet tanulmányozásához érdemes visszalapozni a második fejezethez, és az ott szereplő ábrákhoz!

4.34. Állítás. A 2.2.1. fejezetben felsorolt hatványfüggvények *folytonosak*.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.15. Átviteli elvet! Legyen $x_n, x \in \mathcal{D}(\text{id}^r)$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_n \rightarrow x$ tetszőleges sorozat. Be kell látni, hogy

$$\text{id}^r(x_n) = x_n^r \rightarrow \text{id}^r(x) = x^r.$$

Ez következik a 3.58. Állításból. □

A hatványfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli torlódási pontokban meggondolni.

4.35. Állítás. Ha n páros, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} \text{id}^n &= \lim_{+\infty} \text{id}^n = +\infty, \\ \lim_{-\infty} \text{id}^{-n} &= \lim_{+\infty} \text{id}^{-n} = 0, \\ \lim_0 \text{id}^{-n} &= +\infty. \end{aligned}$$

Ha n páratlan, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} \text{id}^n &= -\infty, & \lim_{+\infty} \text{id}^n &= +\infty, \\ \lim_{-\infty} \text{id}^{-n} &= \lim_{+\infty} \text{id}^{-n} = 0, \\ \lim_{0-} \text{id}^{-n} &= -\infty, & \lim_{0+} \text{id}^{-n} &= +\infty. \end{aligned}$$

Továbbá, ha $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az \mathbb{R}^+ -on értelmezett id^r függvényre

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} \text{id}^r &= +\infty, & r > 0, \\ \lim_{0+} \text{id}^r &= +\infty, & \lim_{+\infty} \text{id}^r = 0, & r < 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Adódik a 4.6. Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából a megfelelő intervallumokon, ld. a 3.56. Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. \square

4.36. Állítás. *Bármely $a > 0$, $a \neq 1$ esetén az \exp_a exponenciális függvény (ld. (2.1)) folytonos.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.15. Átviteli elvet! Legyen $x \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow x$ tetszőleges sorozat. Be kell látni, hogy

$$\exp_a(x_n) = a^{x_n} \rightarrow \exp_a(x) = a^x.$$

Ez adódik a 3.57. Következményből. \square

4.37. Állítás. *Bármely $a > 0$, $a \neq 1$ esetén a $\log_a = (\exp_a)^{-1}$ logaritmusfüggvény folytonos.*

Bizonyítás. Következik a 4.52. Tételből (folytonos függvény inverze is folytonos). \square

Az exponenciális és logaritmusfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli torlódási pontokban meggondolni.

4.38. Állítás. *Bármely $a > 1$ esetén*

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} \exp_a &= \lim_{+\infty} \log_a = +\infty, \\ \lim_{-\infty} \exp_a &= 0, \quad \lim_{0+} \log_a = -\infty. \end{aligned}$$

Bármely $0 < a < 1$ esetén

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} \exp_a &= \lim_{0+} \log_a = +\infty, \\ \lim_{+\infty} \exp_a &= 0, \quad \lim_{+\infty} \log_a = -\infty. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Adódik a 4.6. Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából, ld. a 3.56. Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. \square

4.39. Állítás. *A 2.2.3. fejezetben felsorolt trigonometrikus függvények és inverzeik folytonosak.*

Bizonyítás. A 4.6. ábra alapján belátható $|x| < \frac{\pi}{2}$ -re ($|x| > \frac{\pi}{2}$ -re pedig triviális), hogy

$$|\sin x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A 4.15. Átviteli elvet alkalmazzuk. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $x_n \rightarrow x$ tetszőleges sorozat. Ekkor felhasználva, hogy $|\cos| \leq 1$, kapjuk:

$$|\sin x_n - \sin x| = \left| 2 \cdot \cos \frac{x_n + x}{2} \cdot \sin \frac{x_n - x}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x_n - x}{2} \right|.$$

A fenti egyenlőtlenség alapján

$$|\sin x_n - \sin x| \leq 2 \left| \frac{x_n - x}{2} \right| = |x_n - x| \rightarrow 0, \quad (4.4)$$

és ezt akartuk belátni.

Mivel

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

ezért a 4.18. Tétel miatt \cos is folytonos. A tg és ctg függvények így két folytonos függvény hányadosaként állnak elő, ezért folytonosak (ld. a 4.17. Állítást). A trigonometrikus függvények inverzeinek folytonossága pedig a 4.52. Tételből adódik. \square

Könnyen meggondolható, hogy a \sin és \cos függvényeknek nincs határértékük $\pm\infty$ -ben. Azonban érvényesek az alábbiak:

4.40. Állítás.

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi-0} \operatorname{tg} &= +\infty, & \lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \operatorname{tg} &= -\infty, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \lim_{k\pi-0} \operatorname{ctg} &= -\infty, & \lim_{k\pi+0} \operatorname{ctg} &= +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \lim_{-\infty} \operatorname{arctg} &= -\frac{\pi}{2}, & \lim_{+\infty} \operatorname{arctg} &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{-\infty} \operatorname{arcctg} &= \pi, & \lim_{+\infty} \operatorname{arcctg} &= 0. \end{aligned}$$

4.41. Állítás. A 2.2.4. fejezetben felsorolt hiperbolikus függvények és inverzeik folytonosak.

Bizonyítás. A hiperbolikus függvények folytonossága adódik az \exp függvény folytonosságából és a 4.17. Állításból, az inverzeik folytonossága pedig a 4.52. Tételből. \square

4.42. Állítás.

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} \operatorname{sh} &= -\infty, & \lim_{+\infty} \operatorname{sh} &= +\infty, \\ \lim_{-\infty} \operatorname{ch} &= \lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty, \\ \lim_{-\infty} \operatorname{th} &= \lim_{-\infty} \operatorname{cth} = -1, \\ \lim_{+\infty} \operatorname{th} &= \lim_{+\infty} \operatorname{cth} = 1, \\ \lim_{0-} \operatorname{cth} &= -\infty, & \lim_{0+} \operatorname{cth} &= +\infty. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A sh esetét bizonyítjuk, a többi hasonlóan megy. Felhasználjuk az \exp függvény határértékeit.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{0 - \infty}{2} = -\infty.$$

 \square **4.43. Állítás.**

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} \operatorname{arsh} &= -\infty, & \lim_{+\infty} \operatorname{arsh} &= +\infty, \\ & & \lim_{+\infty} \operatorname{arch} &= +\infty, \\ \lim_{-1+0} \operatorname{arth} &= \lim_{-1-0} \operatorname{arcth} = -\infty, \\ \lim_{1-0} \operatorname{arth} &= \lim_{1+0} \operatorname{arcth} = \infty, \\ \lim_{-\infty} \operatorname{arcth} &= \lim_{+\infty} \operatorname{arcth} = 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Adódik a megfelelő inverzfüggvények határértékeiből. \square

4.7. Nevezetes függvényhatárértékek

Az alábbi nevezetes függvényhatárértékek bizonyítása mind adódik a 4.19. Tétel megfelelő szereposztással való alkalmazásából.

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Bizonyítás. A 4.6. Tételt alkalmazzuk. Legyen $x_n \rightarrow \infty$ tetszőleges sorozat, és tegyük fel, hogy $x_n > 1$ (egy indextől kezdve ez biztos teljesül). Ekkor

$$([x_n])^{\frac{1}{[x_n]+1}} \leq (x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leq ([x_n] + 1)^{\frac{1}{[x_n]}}.$$

A bal ill. jobb oldalon az $(n^{\frac{1}{n+1}})$ ill. $((n+1)^{\frac{1}{n}})$ egy-egy részsorozata áll, melyek 1-hez tartanak. Így $(x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow 1$, amiből az állítás következik. \square

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1.$$

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $x_n \rightarrow 0+$ esetén $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$, ezért az 1. pont alapján

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{x_n^{x_n}} \rightarrow 1,$$

így $x_n^{x_n} \rightarrow 1$ is teljesül. A 4.6. Tétel alapján kész. \square

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_c x}{x^p} = 0 \quad (p, c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy ha $p > 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = +\infty$. Alkalmazva a 4.19. Tétel 2. pontját és az 1. nevezetes határértéket kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^p)^{\frac{1}{x^p}} = 1.$$

Kihhasználva a \log_c függvény folytonosságát és a 4.19. Tétel 1. pontját,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_c (x^p)^{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_c x^p}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p \log_c x}{x^p} = \log_c 1 = 0.$$

Ebből p -vel való osztás után következik az állítás. \square

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \quad (a \in (1, +\infty), q > 0).$$

Bizonyítás. A fenti 3.-at $p := \frac{1}{q}$ és $c := a$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{1}{q}}} = 0.$$

Tudjuk, hogy $a > 1$ miatt $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$. A 4.19. Tétel 2. pontját felhasználva

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a a^x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}} = 0.$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow 0} x^q = 0$, ezért a 4.19. Tétel 1. pontja alapján – tulajdonképpen a fenti határérték q . hatványát véve –,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}} \right)^q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0.$$

□

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^p \log_c x = 0 \quad (p, c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Ha $x \rightarrow 0+$, akkor $x^p \rightarrow 0+$ is teljesül. Felhasználva 2.-t és a 4.19. Tétel 1. pontját, kapjuk:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^p)^{x^p} = 1.$$

Ismét alkalmazva a 4.19. Tétel 1. pontját és a \log_c függvény folytonosságát,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_c (x^p)^{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^p \cdot \log_c x^p = \lim_{x \rightarrow 0+} p \cdot x^p \cdot \log_c x = \log_c 1 = 0.$$

Innen p -vel osztva kapjuk a kívánt egyenlőséget.

□

6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= e, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= e. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 3.9. fejezet 9. pontjának bizonyításában meg gondoltak szerint következnek. □

7.

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Bizonyítás. Legyen $t_n \rightarrow 0$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $(\frac{1}{t_n})$ sorozat vagy $+\infty$ -hez tart, vagy $-\infty$ -hez, vagy két olyan részsorozatból áll össze, melyek egyike $+\infty$ -hez, a másik $-\infty$ -hez tart. A 6. pont alapján ezért

$$(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{t_n}} \right)^{\frac{1}{t_n}} \rightarrow e,$$

és ezt kellett megmutatni.

□

8.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_c(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln c} \quad (c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Mivel \log_c folytonos, ezért alkalmazva a 4.19. Tétel 1. pontját és a fenti 7. határértéket:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log_c(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_c(1+t)}{t} = \log_c e = \frac{1}{\ln c}.$$

□

9.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_c x - \log_c a}{x - a} = \frac{1}{a \cdot \ln c} \quad (a, c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy

$$x \rightarrow a \iff \frac{x}{a} - 1 \rightarrow 0.$$

A 4.19. Tétel 2. pontja és a fenti 8. határérték alapján

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_c(1 + \frac{x}{a} - 1)}{\frac{x}{a} - 1} = \lim_{x \rightarrow a} a \cdot \frac{\log_c x - \log_c a}{x - a} = \frac{1}{\ln c}.$$

Ebből a -val osztva adódik az állítás. □

10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^x - 1}{x} = \ln c \quad (c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy

$$x \rightarrow 0 \iff c^x - 1 \rightarrow 0.$$

A 4.19. Tétel 2. pontja és a fenti 8. határérték alapján

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_c(1 + c^x - 1)}{c^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{c^x - 1} = \frac{1}{\ln c}.$$

Ebből reciprokot véve adódik az állítás. □

11.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{c^x - c^a}{x - a} = c^a \cdot \ln c \quad (c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy

$$x \rightarrow a \iff x - a \rightarrow 0.$$

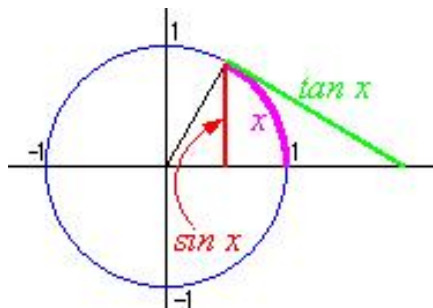
A 4.19. Tétel 2. pontja és a 10. határérték alapján

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{c^{x-a} - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{c^a} \cdot \frac{c^x - c^a}{x - a} = \ln c.$$

Ebből c^a -nal szorozva adódik az állítás. □

12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



4.6. ábra.

Bizonyítás. A 4.6. ábra alapján meggondolható, hogy

$$\sin x < x < \tan x, \text{ ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ebből

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

adódik, és felhasználva a \cos függvény 0 pontbeli folytonosságát, kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

egyenlőség alapján

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

is igaz, így az állítást bizonyítottuk. \square

4.44. Állítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$ és tegyük fel, hogy $\exists \lim_a f = 1$. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot (f(x) - 1) =: b.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a f^g = \lim_b \exp = \begin{cases} e^b, & b \in \mathbb{R}; \\ 0, & b = -\infty; \\ +\infty, & b = +\infty. \end{cases}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a -nak létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy $f(x) \neq 1$, $x \in \dot{K}(a)$. Világos, hogy $\lim_a f = 1$ miatt $\dot{K}(a)$ -t úgy is megválaszthatjuk, hogy ott $f > 0$. Ekkor

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{g(x) \cdot (f(x) - 1) \cdot \frac{\ln f(x)}{f(x) - 1}}, \quad x \in \dot{K}(a)$$

A 8. nevezetes határérték alapján

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Alkalmazva az $f(x) - 1$ belső függvénnyel való helyettesítést (ez megtehető, mivel $f(x) \neq 1$, $x \in \dot{K}(a)$, ld. a 4.19. Tétel 2. pontja) kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{f(x) - 1} = 1.$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot (f(x) - 1) = b$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot (f(x) - 1) \cdot \frac{\ln f(x)}{f(x) - 1}} = \lim_{y \rightarrow b} e^y.$$

Másrészt, ha f az a -hoz tetszőlegesen közel felvesz 1-t, akkor szükségszerűen $b = 0$, f^g pedig az a közelében 1, így a -beli határértéke is $1 = e^0$. \square

4.45. Példa. Számítsuk ki az

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-c}{x+c} \right)^x \quad (c \in \mathbb{R})$$

határértéket! A fenti szereposztással:

$$f(x) := \frac{x-c}{x+c}, \quad g(x) := x, \quad a := +\infty,$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-c}{x+c} = 1$$

és

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \cdot (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{x-c}{x+c} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2c \cdot x}{x+c} = -2c =: b.$$

Így

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-c}{x+c} \right)^x = e^{-2c}.$$

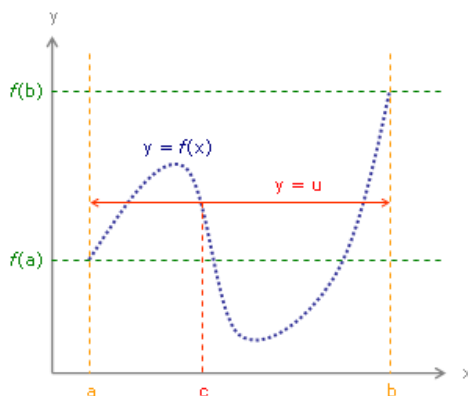
4.8. Folytonos függvények tulajdonságai

Ebben az alfejezetben intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságaival foglalkozunk, ezért az alábbiakban az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jelölés alatt mindig $\mathcal{D}(f) = I$ -t értünk. Az első fontos eredményt egyszerűbben úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy intervallumon folytonos függvény grafikonjának lerajzolásakor „nem emeljük fel a ceruzát”.

4.46. Tétel (Bolzano-Darboux-tétel). *Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor ha $u \in \mathbb{R}$ olyan, hogy*

$$f(a) < u < f(b) \quad (\text{vagy } f(b) < u < f(a)),$$

akkor létezik $c \in (a, b)$, melyre $f(c) = u$.



4.7. ábra. Bolzano-Darboux-tétel

Bizonyítás. Legyen például $f(a) < u < f(b)$. Definiáljuk a következő halmazt:

$$H := \{x \in [a, b] : f(x) < u\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$, ugyanis $a \in H$. Másrészt H felülről korlátos, mivel $H \subset [a, b]$, tehát b egy felső korlátja. Így a Felső határ axiómája miatt H -nak van legkisebb felső korlátja, $\sup H \in \mathbb{R}$. Legyen

$$c := \sup H.$$

$H \subset [a, b]$ miatt $c \in [a, b]$ teljesül. A szupremum tulajdonságai alapján

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists x_n \in H : c - \frac{1}{n} < x_n \leq c.$$

Az így kapott $(x_n) \subset H$ sorozatra nyilván $x_n \rightarrow c$ igaz. Alkalmazva f -re a 4.15. Átviteli elvet, kapjuk, hogy

$$f(x_n) \rightarrow f(c).$$

Mivel $f(x_n) < u$ minden n -re, ezért $f(c) \leq u$. Indirekt tegyük fel, hogy $f(c) < u$. Jelölje

$$\varepsilon := \frac{u - f(c)}{2} > 0,$$

akkor $u > f(c) + \varepsilon$. Az f függvény c -beli folytonosságát kihasználva,

$$\text{az } \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \text{ esetén } f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon).$$

Válasszunk egy $x \in (c, c + \delta) \cap [a, b]$ számot! A $c = \sup H$ definíció miatt $x \notin H$. Másrészt a fentiek alapján

$$(f(c) - \varepsilon <) f(x) < f(c) + \varepsilon < u$$

kellene teljesülnön, amiből viszont $x \in H$ következik – ez ellentmondás. \square

Ennek a tételnek egy fontos következménye, hogy intervallum folytonos függvénnyel vett képe is intervallum.

4.47. Következmény. *Ha f egy tetszőleges I intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor f Darboux-tulajdonságú, azaz bármely $J \subset I$ intervallum esetén*

$$f(J) := \{f(x) : x \in J\}$$

intervallum.

Bizonyítás. Legyen f egy I intervallumon értelmezett folytonos függvény, és legyen $J \subset I$ intervallum. Be kell látni, hogy $f(J)$ is intervallum, vagyis az intervallum 1.27. Definíciója szerint

$$\text{bármely } y_1 < u < y_2, \quad y_1, y_2 \in f(J) \text{ esetén } u \in f(J).$$

Mivel $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$ valamely $a, b \in J$ számokra, továbbá $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos (hiszen $[a, b] \subset J \subset I$), ezért alkalmazhatjuk a Bolzano-Darboux-tételt. Ennek alapján

$$\exists c \in (a, b) \subset J, \text{ melyre } f(c) = u,$$

vagyis $u \in f(J)$, és ezt akartuk belátni. \square

4.48. Következmény (Bolzano-tétel). *Ha f olyan, intervallumon értelmezett folytonos függvény, mely felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor f -nek van gyöke (nullhelye) az intervallumban.*

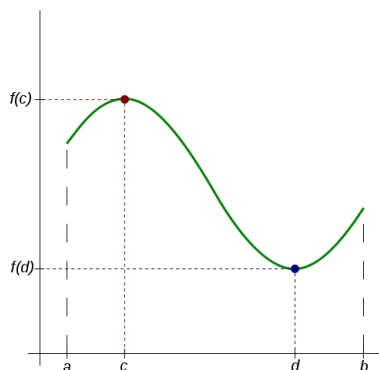
Bizonyítás. A feltétel szerint léteznek olyan $a, b \in I$ számok, melyekre $f(a) < 0 < f(b)$. A Bolzano-Darboux-tétel alapján $\exists c \in (a, b)$ (vagy $c \in (b, a)$), melyre $f(c) = 0$. \square

Ha egy halmaz infimuma/szupremuma eleme a halmaznak, akkor azt mondjuk, hogy ez a halmaz *minimuma/maximuma*. Hasonlóan definiálhatjuk egy függvény minimumát/maximumát mint az értékkészletének megfelelő elemét.

4.49. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha létezik olyan $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, hogy

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \geq f(x_0) \text{ (ill. } f(x) \leq f(x_0)),$$

akkor $f(x_0)$ az f *minimuma* (ill. *maximuma*).



4.8. ábra. Weierstrass-tétel

4.50. Tétel (Weierstrass-tétel). *Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f -nek van minimuma és maximuma.*

Bizonyítás. A 4.47. Következmény alapján $\mathcal{R}(f) = f([a, b])$ intervallum. Jelölje $m := \inf \mathcal{R}(f)$ és $M := \sup \mathcal{R}(f)$. Azt kell belátni, hogy $m, M \in \mathcal{R}(f)$. Az infimum tulajdonságai alapján

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists y_n \in \mathcal{R}(f) : m \leq y_n < m + \frac{1}{n}.$$

A kapott (y_n) sorozatra $y_n \rightarrow m$ teljesül. Mivel $y_n \in \mathcal{R}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, ezért léteznek $x_n \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ számok, melyekre $f(x_n) = y_n$. Így

$$f(x_n) \rightarrow m.$$

A kapott $(x_n) \subset [a, b]$ sorozat korlátos, ezért a 3.31. Bolzano-Weierstrass-tétel szerint van konvergens részsorozata, (x_{n_i}) . Legyen

$$d := \lim x_{n_i} \in [a, b].$$

A 4.15. Átviteli elv alapján az f függvény d -beli folytonosságából adódik, hogy

$$f(x_{n_i}) \rightarrow f(d) = m,$$

mivel $(f(x_{n_i}))$ részsorozata az m -hez tartó $(f(x_n))$ -nek. Ezzel beláttuk, hogy $f(d) = m \in \mathcal{R}(f)$. Az M esete ezzel analóg módon gondolható meg. \square

4.51. Következmény. *Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete korlátos és zárt intervallum.*

Bizonyítás. Azonnal adódik a 4.47. Következményből és a 4.50. Weierstrass-tételből. \square

A következő tételben azt gondoljuk meg, hogy milyen tulajdonságú egy (intervallumon értelmezett) folytonos függvény inverze.

4.52. Tétel (Folytonos függvény inverze). *Legyen f egy I intervallumon értelmezett folytonos és injektív függvény. Ekkor f szigorúan monoton. Továbbá, az f^{-1} inverz függvény*

- *is intervallumon van értelmezve;*
- *szigorúan monoton ugyanúgy, mint f ;*
- *folytonos.*

Bizonyítás. Először meggondoljuk, hogy ha f folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton. Tegyük fel indirekt, hogy

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3, \text{ hogy } f(x_1) < f(x_3) < f(x_2),$$

(az összes többi „rossz” eset hasonlóan gondolható meg).

Mivel $[x_1, x_2] \subset I = \mathcal{D}(f)$ és $f(x_1) < u := f(x_3) < f(x_2)$, ezért a 4.46. Bolzano-Darboux-tétel alapján

$$\exists c \in (x_1, x_2) : f(c) = u = f(x_3).$$

Ez azonban ellentmond f injektivitásának, ugyanis $c < x_3$.

Most lássuk be az inverzfüggvényre vonatkozó állításokat!

- A 4.47. Következmény alapján $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ intervallum.
- Legyenek $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ számok, és tegyük fel, hogy f szigorúan monoton növe. Ekkor a létező $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ számokra nyilván

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

teljesül. A szigorúan monoton fogyó eset hasonlóan meggondolható.

- Indirekt tegyük fel, hogy y az f^{-1} egy szakadási pontja. Mivel f^{-1} intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 4.32. Megjegyzés alapján y -ban csak elsőfajú, nem megszüntethető szakadása lehet. Ez azonban azt jelentené, hogy $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$ nem volna intervallum, ami ellentmondás. Tehát f^{-1} folytonos.

□

Az alábbiakban a folytonosságnak egy fontos speciális esetét definiáljuk, amikor egy halmaz pontjaiban a folytonosság definíciója alapján $\varepsilon > 0$ -hoz létező δ nem függ a pont helyétől.

4.53. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $H \subset \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *egyenletesen folytonos* H -n, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H, |x - y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4.54. Példa. Az $f(x) = x$ egyenletesen folytonos \mathbb{R} -en. Az $f(x) = x^2$ azonban nem egyenletesen folytonos \mathbb{R} -en. Később látni fogjuk, hogy viszont ez a függvény is egyenletesen folytonos bármely $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon.

4.55. Példa. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *Lipschitz-tulajdonságúnak* mondjuk, ha létezik olyan $L > 0$ konstans, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|, \quad x, y \in \mathcal{D}(f).$$

Egy Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen folytonos $\mathcal{D}(f)$ -en, ugyanis ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ választással, $x, y \in \mathcal{D}(f)$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Lipschitz-tulajdonságú például az id és a sin (ld. a (4.4) becslést $x_n = y$ -ra) $L = 1$ konstanssal.

4.56. Állítás. Ha f egyenletesen folytonos H -n, akkor folytonos is H -n.

Bizonyítás. Legyen $a \in H$ tetszőleges és $\varepsilon > 0$ adva. Ekkor az egyenletes folytonosság definíciója alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H, |x - y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ezzel a δ választással, a fentit $y = a$ -ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$|x - a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ami épp az a -beli folytonosságot jelenti.

□

A 4.54. Példában láttuk, hogy az állítás megfordítása általában nem igaz, tehát van olyan H halmaz és H -n folytonos függvény, mely nem egyenletesen folytonos. A következő tétel azt mondja ki, hogy ha H korlátos és zárt intervallum, akkor ez az eset nem állhat fenn.

4.57. Tétel (Heine-tétel). *Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos $[a, b]$ -n. Ez a definíció alapján a következőt jelenti:

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall \delta > 0 \text{ esetén } \exists x_\delta, y_\delta \in [a, b], |x_\delta - y_\delta| < \delta, \text{ melyre } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Válasszunk megfelelő $x_n, y_n \in [a, b]$ pontokat $\delta = \frac{1}{n} > 0$ -hoz minden $n \in \mathbb{N}$ -re! Így kaptunk olyan $(x_n), (y_n) \subset [a, b]$ sorozatokat, melyekre

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ és } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat, ezért a 3.31. Bolzano-Weierstrass-tétel szerint létezik konvergens részsorozata, (x_{n_i}) . Legyen

$$x := \lim x_{n_i} \in [a, b].$$

Az $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ miatt (y_{n_i}) is konvergens és

$$x = \lim y_{n_i}.$$

A 4.15. Átviteli elv alapján az f függvény x pontbeli folytonosságából következik, hogy

$$f(x_{n_i}) \rightarrow f(x) \text{ és } f(y_{n_i}) \rightarrow f(x),$$

ami ellentmondás, hiszen

$$|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N}.$$

□

Ötödik fejezet

Sorok

A sorokra akkor van szükségünk, mikor végtelen sok számot akarunk összeadni. A sorok tulajdonképpen speciális alakú, véges összegekből álló sorozatok. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Sor konvergenciája, összege
- Konvergenciakritériumok sorokra
- Sorok Cauchy-szorzata

5.1. Végtelen sorok

Vegyünk egy 1 méteres rudat. A harmadik, sorozatokról szóló fejezetben meg gondoltak szerint ha a rudat félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúdhosszaknak

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

sorozatához jutunk. Most gondoljunk arra, hogy valaki a rúd szeletelésénél kapott darabokat össze szeretné illeszteni, azaz az

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

„összeget” szeretné elkészíteni. Akkor az $\frac{1}{2}$ -hez hozzáragasztja az $\frac{1}{2^2}$ hosszúságút, így a kapott rúd $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ hosszú lesz; majd ehhez ragasztja az $\frac{1}{2^3}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ hosszút kap, és így tovább. A kapott összegekből álló sorozatot fogjuk végtelen sornak nevezni.

5.1. Definíció. Legyen (a_n) egy adott sorozat. Készítsük el az

$$S_1 := a_1, S_2 := a_1 + a_2, S_3 := a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

összegek sorozatát. A kapott $(S_n) := (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ sorozatot (*végtelen*) *sornak* nevezzük, és $\sum a_n$ -nel jelöljük, azaz

$$\sum a_n := (S_n).$$

Itt $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ a sor n . *részletösszege* vagy *szelete*.

A végtelen sor tehát egy speciális alakú sorozat. Ennek megfelelően beszélhetünk arról, hogy egy sor konvergens vagy divergens.

5.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, ha az (S_n) sorozat konvergens. $\sum a_n$ *divergens*, ha az (S_n) sorozat divergens.

Ha az (S_n) sorozatnak létezik (véges vagy végtelen) határértéke, akkor a $\sum a_n$ *végtelen sor összegén* a részletösszeg-sorozat határértékét értjük, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n.$$

5.3. Példa. *Mértani sor*

Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Tekintsük a (q^n) összeadandó sorozatot! Az n -edik részletösszeg ($n \geq 0$):

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \rightarrow 0$, ezért

$$\lim S_n = \lim \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}.$$

tehát a $\sum q^n$ végtelen sor konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

a végtelen sor összege.

Ha $q \geq 1$, akkor a fenti részletösszegre $S_n \rightarrow \infty$ teljesül, tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.$$

Ha pedig $q \leq -1$, akkor a $\sum q^n$ sornak nem létezik összege.

5.4. Példa. A (3.10) nevezetes határérték tulajdonképpen az alábbi sorösszeget jelenti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

A véges sok szám összeadására teljesülő azonosságok közül a végtelen sorok összegére teljesül az asszociativitás, valamint, hogy konstanst kiemelhetünk belőle. A végtelen sorok szorzatára (és a szorzat megfelelő definiálására) vonatkozó szabályok már bonyolultabbak, erről a fejezet végén ejtünk néhány szót.

5.5. Tétel (Sorok összege és műveletek). *Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}},$$

$c \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

(a)

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot A;$$

(b)

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B, \text{ ha az összeg értelmes.}$$

Bizonyítás. Jelölje $S_n := a_1 + \dots + a_n$, $T_n := b_1 + \dots + b_n$. A feltételek szerint $\lim S_n = A$, $\lim T_n = B$.

(a) A $\sum(c \cdot a_n)$ sor n . szeletére

$$U_n = (c \cdot a_1) + \dots + (c \cdot a_n) = c \cdot (a_1 + \dots + a_n) = c \cdot S_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = \lim U_n = c \cdot \lim S_n = c \cdot A = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) A $\sum(a_n + b_n)$ sor n . szeletére

$$V_n = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = S_n + T_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim V_n = \lim S_n + \lim T_n = A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

A részletösszegek sorozata – így a sor – pontosan akkor konvergens, ha teljesül rá a Cauchy-kritérium.

5.6. Tétel (Cauchy-kritérium sorokra). *A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > m \geq N \text{ esetén } |a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.36. Tételt az (S_n) sorozatra, és használjuk fel, hogy

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n|, \quad n > m.$$

□

A Cauchy-kritériumból következik, hogy ha egy sor konvergens, akkor a tagjaiból álló sorozat 0-hoz tart.

5.7. Állítás. *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \rightarrow 0$.*

Bizonyítás. Mivel $\sum a_n$ egy konvergens sor, ezért az (S_n) sorozat konvergens. A fenti Cauchy-kritérium szerint bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $m \geq N$ és $n := m + 1 > N$ esetén

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| = |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $a_n \rightarrow 0$.

□

Fontos megjegyeznünk, hogy a fenti állítás megfordítása nem igaz! Ehhez az alábbi példákat gondoljuk meg.

5.8. Példa. Legyen $(a_n) := (\ln \frac{n+1}{n})$, vagyis tekintsük a

$$\sum \ln \frac{n+1}{n}$$

sort! Mivel $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$, ezért

$$a_n = \ln \frac{n+1}{n} \rightarrow \ln 1 = 0.$$

Másrészt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1).$$

Mivel $\ln(n+1) \rightarrow \infty$, ezért (S_n) nem korlátos, így $\sum a_n$ nem konvergens.

5.9. Példa. *Harmonikus sor*

Tekintsük a

$$\sum \frac{1}{n}$$

végtelen sort! Tudjuk, hogy $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Megmutatjuk, hogy a $\sum \frac{1}{n}$ sor nem konvergens. Az 5.6. Tételt alkalmazzuk. Legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Ekkor bármely $N \in \mathbb{N}$ esetén $m = N$ és $n = 2N$ választással

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| = \left| \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} \right| \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát a $\sum \frac{1}{n}$ sorra nem teljesül a Cauchy-kritérium, így nem konvergens.

A gyakorlatban előfordulnak az ún. abszolút konvergens sorok.

5.10. Definíció. A $\sum a_n$ abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

5.11. Állítás. Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.

Bizonyítás. Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, ezért az 5.6. Tétel alapján $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N$, hogy $\forall n > m \geq N$ esetén

$$||a_{m+1}| + \dots + |a_n|| = |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ekkor a $\sum a_n$ sorra is teljesül a Cauchy-kritérium ugyanezen küszöbindexszel, hiszen

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens. □

5.2. Konvergenciakritériumok

A gyakorlatban sokszor nehéz eldönteni egy-egy sor konvergenciáját a definíció vagy a Cauchy-kritérium alapján. Másrészt, általában a sor összegének értékére nincs szükségünk, csak annak ismeretére, hogy konvergens-e. Az alábbiakban néhány olyan tétellel ismerkedünk meg, melyek hasznosak lehetnek sorok konvergenciájának/divergenciájának meghatározásához. A tételeket pozitív (≥ 0) tagú sorokra mondjuk ki, majd általánosítjuk tetszőleges előjelű tagokból álló sorokra.

Először azt gondoljuk meg, hogy egy pozitív tagú sornak mindig létezik összege.

5.12. Állítás. Ha $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

mindig létezik, mégpedig $A \in \mathbb{R}$ (tehát a sor konvergens), ha a részletösszegeiből álló (S_n) sorozat felülről korlátos, és $A = +\infty$, ha (S_n) felülről nem korlátos.

Bizonyítás. Következik abból, hogy ilyenkor (S_n) monoton növekvő sorozat, tehát alkalmazható a 3.43. Állítás: (S_n) határértéke véges vagy $+\infty$, attól függően, hogy felülről korlátos vagy nem. □

5.13. Következmény. Az 5.9. Példában a harmonikus sor összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Az 5.12. Állítás alapján az alábbi, pozitív tagú sorokra kimondott konvergenciakritériumok esetében mindig elegendő azt vizsgálni, hogy a részletösszegekből álló sorozat felülről korlátos vagy nem. Az első az ún. összehasonlító vagy majoráns- ill. minoránskritérium.

5.14. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyen $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.*

(b) *Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ divergens.*

Bizonyítás. Legyen $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ és $T_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Az előbbieket alapján (S_n) és (T_n) monoton növekvő sorozatok. Továbbá, a feltétel szerint

$$S_n \leq T_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

(a) Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor ez azt jelenti, hogy (T_n) konvergens, tehát felülről korlátos. Az (5.1) miatt ilyenkor (S_n) is felülről korlátos, tehát konvergens, azaz $\sum a_n$ konvergens.

(b) Ha $\sum a_n$ divergens, akkor (S_n) felülről nem korlátos. Az (5.1) miatt ilyenkor (T_n) sem korlátos felülről, tehát divergens, így $\sum b_n$ divergens.

□

5.15. *Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy a fenti tételben elég lett volna megkövetelni, hogy $a_n \leq b_n$ egy N indextől kezdve teljesüljön.

5.16. Példa. *Hiperharmonikus sorok*

Az 5.9. Példa alapján a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens. Gyakorlatokon láttuk, hogy $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens. Mivel

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} &\geq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ ha } \alpha \leq 1; \\ \frac{1}{n^\alpha} &\leq \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ ha } \alpha \geq 2, \end{aligned}$$

ezért az 5.14. Tétel alapján

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^\alpha} &\text{ divergens, ha } \alpha \leq 1; \\ \sum \frac{1}{n^\alpha} &\text{ konvergens, ha } \alpha \geq 2. \end{aligned}$$

5.17. Feladat. * Igazoljuk, hogy

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergens, ha } \alpha > 1!$$

A továbbiakban a hányados- és gyökkritériummal ismerkedünk meg.

5.18. Tétel (D’Alambert-féle hányadoskritérium). *Legyen (a_n) adott sorozat, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ha $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad n \geq N,$$

akkor $\sum a_n$ konvergens.

(b) *Ha $\exists q > 1$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q, \quad n \geq N,$$

akkor $\sum a_n$ divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az (a) feltételből

$$\begin{aligned} \frac{a_{N+1}}{a_N} \leq q &\Rightarrow a_{N+1} \leq a_N \cdot q \\ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq q &\Rightarrow a_{N+2} \leq a_{N+1} \cdot q \leq a_N \cdot q^2 \\ &\vdots \\ \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} \leq q &\Rightarrow a_{N+k} \leq a_{N+k-1} \cdot q \leq \dots \leq a_N \cdot q^k. \end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$ -edik részletösszegére

$$\begin{aligned} S_n = S_{N+k} &= a_1 + \dots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k} \\ &\leq L + a_N + a_N \cdot q + a_N \cdot q^2 + \dots + a_N \cdot q^k \\ &= L + a_N \cdot (1 + q + \dots + q^k) < L + a_N \cdot \frac{1}{1-q}, \end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$, és felhasználtuk az 5.3. Példából, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Tehát (S_n) felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.

A (b) feltétel esete hasonlóan megmondható. □

5.19. *Megjegyzés.* A hányadoskritérium feltételei teljesülnek, ha

(a)
$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0,1),$$

illetve

(b)
$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

5.20. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen (a_n) adott sorozat, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ha $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad n \geq N,$$

akkor $\sum a_n$ konvergens.

(b) *Ha $\exists q > 1$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q, \quad n \geq N,$$

akkor $\sum a_n$ divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az (a) feltételből

$$\begin{aligned} \sqrt[N]{a_N} \leq q &\Rightarrow a_N \leq q^N \\ \sqrt[N+1]{a_{N+1}} \leq q &\Rightarrow a_{N+1} \leq q^{N+1} \\ &\vdots \\ \sqrt[N+k]{a_{N+k}} \leq q &\Rightarrow a_{N+k} \leq q^{N+k}. \end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$ -edik részletösszegére

$$\begin{aligned} S_n = S_{N+k} &= a_1 + \dots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+k} \\ &\leq L + q^N + q^{N+1} + \dots + q^{N+k} \\ &= L + q^N \cdot (1 + q + \dots + q^k) < L + q^N \cdot \frac{1}{1-q}, \end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$, és felhasználtuk az 5.3. Példából, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Tehát (S_n) felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.

A (b) eset hasonlóan gondolható meg. □

5.21. *Megjegyzés.* A gyökkritérium feltételei teljesülnek, ha

$$(a) \quad \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q \in [0,1),$$

illetve

$$(b) \quad \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q > 1.$$

Ha a fenti kritériumokat tetszőleges előjelű sorokra akarjuk alkalmazni, akkor a sor tagjainak abszolút értékeire kell őket vonatkoztatni.

5.22. Állítás. *Tegyük fel, hogy (a_n) és (b_n) tetszőleges előjelű sorozatok. Ekkor az 5.14., 5.18. és 5.20. Tételek feltételeit a $\sum |a_n|$ ill. $\sum |b_n|$ sorra alkalmazva, mindegyik tételben az*

(a) *feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ abszolút konvergens, így konvergens; a*

(b) *feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ divergens – kivéve, az 5.14. Tételben csak a $\sum |a_n|$ divergenciáját állíthatjuk.*

Bizonyítás. A bizonyítás az (a) esetben megegyezik a korábbi tételek bizonyításával. A (b) feltétel esetében az 5.18. és az 5.20. Tételek alkalmazásakor meggondolható, hogy $(|a_n|)$, így (a_n) sem tarthat 0-hoz. □

5.23. Feladat. Adjunk példát olyan konvergens ill. divergens sorra, melyről sem a hányados- sem a gyökkritérium alapján nem dönthető el, hogy konvergens-e! (Tehát ezek a kritériumok messze nem szükséges feltételt adnak.)

5.24. Feladat. Lássuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra az 5.18. Tétel (hányadoskritérium) valamelyik feltétele teljesül, akkor az 5.20. Tétel (gyökkritérium) megfelelő feltétele is teljesül rá!

Adjunk példát olyan sorra, melynek a gyökkritérium alapján eldönthető a konvergenciája, a hányadoskritérium alapján azonban nem! Tehát az előbbi állítás megfordítása nem igaz, így a gyökkritérium ténylegesen erősebb a hányadoskritériumnál.

5.25. Példa. A $\sum \frac{1}{n}$ divergens és a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetén is

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$$

teljesül. Tehát az 5.19. és az 5.21. Megjegyzésben a feltételek élesek.

Az alternáló sorokra vonatkozik a következő tétel.

5.26. Tétel (Leibniz-tétel). *Legyen (a_n) szigorúan monoton fogyó, $a_n \rightarrow 0$. Ekkor a*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

végtelen sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 & S_2 = a_1 - a_2 \\ S_3 = a_1 - a_2 + a_3 & S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ \vdots & \vdots \\ S_{2k-1} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2k-1} & S_{2k} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2k-1} - a_{2k} \end{array}$$

Mivel $a_n > 0$ minden n -re, ezért

$$\begin{aligned} S_1 &> S_2 \\ S_3 &> S_4 \\ &\vdots \\ S_{2k-1} &> S_{2k}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_{2k-1} > a_{2k} > \dots$, kapjuk az alábbi

$$S_1 > S_3 > \dots > S_{2k-1} > \dots \text{ és } S_2 < S_4 < \dots < S_{2k} < \dots$$

Ebből következik, hogy (S_{2k-1}) és (S_{2k}) is monoton, korlátos sorozat, tehát konvergens (ld. a 3.11. Tétel). Mivel $S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k}$, ezért

$$\lim(S_{2k-1} - S_{2k}) = \lim a_{2k} = 0,$$

hiszen $a_n \rightarrow 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim S_{2k-1} = \lim S_{2k} = A \in \mathbb{R},$$

amiből következik, hogy (S_n) is konvergens, $\lim S_n = A$, tehát $\sum (-1)^{n+1} a_n$ konvergens. \square

A bizonyításból látszik, hogy $A \in [S_{2k}, S_{2k-1}]$ minden $k \in \mathbb{N}$ -re, így

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{2k} \leq a_{2k-1} \text{ és } |S_{2k} - A| \leq a_{2k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$|S_n - A| \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ez hasznos lehet az alternáló sor összegének a becsléséhez.

5.27. Definíció. Ha egy sor kielégíti a Leibniz-tétel feltételeit, vagyis

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

alakú, ahol (a_n) szigorúan monoton fogyó, $a_n \rightarrow 0$, akkor *Leibniz-sornak* nevezzük.

5.28. Példa. A

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

sor Leibniz-sor, így a Leibniz-tétel szerint konvergens. Azonban nem abszolút konvergens, mert láttuk, hogy $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

5.29. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\sum a_n$ *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.3. Végtelen sorok átrendezései, Cauchy-szorzata

5.30. Definíció. Egy $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekciót (p kölcsönösen egyértelmű és $\mathcal{R}(p) = \mathbb{N}$) a *természetes számok permutációjának* nevezzük.

Például a $3, 2, 1, 6, 5, 4, \dots, 3k+3, 3k+2, 3k+1, \dots$ sorozat egy permutációja a természetes számoknak. Világos, hogy egy permutáció egyben egy sorozat is, ezért a

$$p(n) = p_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

jelölést fogjuk használni.

5.31. Definíció. Legyen adva az (a_n) és (b_n) sorozat. Azt mondjuk, hogy (b_n) az (a_n) sorozat egy *átrendezése*, ha létezik p permutációja a természetes számoknak, hogy $(b_n) = (a_{p_n})$.

A következő két tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki.

5.32. Tétel. Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens sor. Ekkor minden p permutáció esetén $\sum a_{p_n}$ is abszolút konvergens, sőt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

E tétel szerint az abszolút konvergens sorok öröklik a véges sok szám összeadásánál teljesülő kommutativitást. Ezzel szemben a feltételesen konvergens sorok nagyon labilis képződmények.

5.33. Tétel. Legyen $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor.

1. Minden $A \in \mathbb{R}$ számhoz létezik p permutáció, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A.$$

2. Létezik olyan p permutáció, hogy $\sum a_{p_n}$ divergens.

A következőkben technikai okokból a sorozatok tagjait $n = 0$ -tól kezdve sorszámozzuk.

5.34. Definíció. Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok. E két sor *Cauchy-szorzatán* azt a $\sum c_n$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Formálisan a Cauchy-szorzatot úgy képzelhetjük el, mintha a végtelen sorok végtelen összegek lennének, és szorzásukkor minden tagot minden taggal megszorozunk.

5.35. Tétel (Mertens-tétel). Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens és $\sum b_n$ konvergens végtelen sor. Ekkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens, továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Mielőtt a tételt bizonyítanánk, gondoljunk meg az alábbi lemmát!

5.36. Lemma. Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens végtelen sor és (x_n) nullsorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x_{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_n x_0) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk egy K pozitív számot, melyre

$$|x_n| \leq K, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq K. \quad (5.2)$$

Mivel $x_n \rightarrow 0$, a $\sum |a_n|$ sorra pedig teljesül az 5.6. Cauchy-kritérium, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{és} \quad |a_{N+1}| + \dots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad n > N. \quad (5.3)$$

Ha $n > 2N$, akkor $n - k > N$ minden $0 \leq k \leq N$ esetén, ezért (5.2) és (5.3) alapján

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k x_{n-k} \right| &= \left| \sum_{k=0}^N a_k x_{n-k} + \sum_{k=N+1}^n a_k x_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^N |a_k| \cdot |x_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^n |a_k| \cdot |x_{n-k}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \sum_{k=0}^N |a_k| + K \cdot \sum_{k=N+1}^n |a_k| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

Bizonyítás. (Mertens-tétel)

Jelölje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := A \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n := B \in \mathbb{R}.$$

Be kell lássuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = A \cdot B.$$

Legyen $S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $T_n := b_0 + b_1 + \dots + b_n$. Ekkor $\lim S_n = A$ és $\lim T_n = B$. Felírva a Cauchy-szorzat n . részletösszegét, átalakítások után az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} V_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) \\ &= a_0 T_n + a_1 T_{n-1} + \dots + a_n T_0 \\ &= a_0 \cdot (T_n - B) + a_1 \cdot (T_{n-1} - B) + \dots + a_n \cdot (T_0 - B) + (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \cdot B \\ &= [a_0 \cdot (T_n - B) + a_1 \cdot (T_{n-1} - B) + \dots + a_n \cdot (T_0 - B)] + S_n \cdot B. \end{aligned}$$

Mivel a $(x_n = T_n - B)$ sorozat 0-hoz tart, ezért az 5.36. Lemma alapján a kapott összeg 1. (szögletes zárójelben lévő) tagja 0-hoz tart. Az 2. tag pedig definíció szerint $A \cdot B$ -hez tart, amivel a tételt beláttuk.¹ □

5.37. Példa. Könnyen látható (akár a hányados-, akár a gyökkritérium segítségével), hogy a

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

sor abszolút konvergens bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Számítsuk ki a

$$\sum \frac{x^n}{n!} \quad \text{és} \quad \sum \frac{y^n}{n!}$$

sorok Cauchy-szorzatát tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokra! Az 5.34. Definíció alapján a $\sum c_n$ szorzatsor n . tagja

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k},$$

ami az 1.8. Binomiális tétel alapján

$$c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Tehát a két sor Cauchy-szorzatára

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

teljesül.

¹ A bizonyítás Szilágyi Tivadartól származik.

5.4. A sorok néhány alkalmazásáról

5.4.1. Végtelen tizedestörtek

A valós számok középiskolából ismert végtelen tizedestört-előállítás

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad n \geq 1$$

tulajdonképpen egy végtelen sorösszeg:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad (5.4)$$

Kérdések:

1. Ha adva van egy ilyen sor, miért konvergens?
2. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, hogyan kapjuk meg az előállítását?
3. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, egyértelmű-e az előállítás?

1. Mivel

$$0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}, \quad n \geq 1,$$

ezért az 5.14. Összehasonlító kritérium és a $\sum \frac{1}{10^n}$ mértani sor konvergenciája miatt az (5.4) sor-előállítás mindig konvergens.

2. Válasszuk meg az $a_0 \in \mathbb{Z}$ számot úgy, hogy

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a_0 \geq 0$ (az $a_0 < 0$ eset hasonlóan gondolható meg). Válasszuk meg az $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10^1}.$$

Válasszuk meg az $a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Tovább folytatva, az n . lépésben válasszuk meg az $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

Mivel az

$$s_n := a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sorozatra (5.5) alapján

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

teljesül, ezért $s_n \rightarrow x$, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = x.$$

3. Tegyük fel indirekt, hogy x előáll mint

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k},$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$ az első olyan index, melyre $a_n \neq b_n$. Feltehető, hogy $a_n < b_n$, és mivel egész számokról van szó, $a_n + 1 \leq b_n$, tehát

$$a_0 = b_0, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n + 1 \leq b_n.$$

Ekkor az (5.5)-öt (b_n) -re és (a_n) -re alkalmazva

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n} \leq b_0 + \frac{b_1}{10^1} + \dots + \frac{b_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

ami ellentmondás.

Meggondolható, hogy a fenti eljárással a végtelen sok 9-esre végződő tizedestört-alakokat zártuk ki.

5.4.2. Az e szám irracionális

Az 5.4. Példában meggondoltak alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

A (3.10) bizonyításában láttuk, hogy

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Tegyük fel indirekt, hogy

$$e = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}^+, q \geq 2.$$

Az

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

jelöléssel $s_n \rightarrow e$ szigorúan monoton növvő módon. Legyen $n > q$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &\leq q! \cdot (s_n - s_q) = q! \cdot \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \cdot \dots \cdot n} \\ &= \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+2} + \dots + \frac{1}{(q+2) \cdot \dots \cdot n} \right) \\ &\leq \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ebből az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$0 \leq q! \cdot (e - s_q) \leq \frac{1}{2}.$$

Másrészt, az indirekt feltevés alapján

$$0 \leq q! \cdot (e - s_q) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - s_q \right) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} \right) \in \mathbb{Z},$$

ami ellentmondás.

Tárgymutató

- Archimedeszi axióma, 13
- Bernoulli-egyenlőtlenség, 3
- Binomiális tétel, 4
- Bolzano-Darboux-tétel, 72
- Bolzano-tétel, 73
- Bolzano-Weierstrass-tétel, 39
- Cauchy konvergencia-kritérium, 41
- e szám, 36, 88
- függvény
 - grafikonja, 9
 - inverze, 9
 - kölcsönösen egyértelmű (injektív), 9
 - kompozíció, 9
- függvényhatárérték
 - Átviteli elv, 56
 - bal/jobbról, 63
 - Cauchy-kritérium, 57
 - definíció, 55
 - elemi függvények, 65–67
 - kompozíció, 61
 - műveletek, 57
 - monoton függvényé, 63
 - nevezetes határértékek, 68–72
- Felső határ axiómája, 14
- folytonosság
 - Átviteli elv, 60
 - balról/jobbról, 63
 - definíció, 59
 - elemi függvények, 65–67
 - folytonos függvények tulajdonságai, 72–76
 - kompozíció, 61
 - műveletek, 60
 - szakadási helyek, 65
- halmaz(ok)
 - Descartes-szorzata, 8
 - megszámíthatóan végtelen, 10
- Heine-tétel, 76
- intervallum, 12
- környezetek, 53
- bal/jobbról, 62
- Rendőr-elv, 36
- \mathbb{R} , 43
- sor
 - összege, 78
 - összehasonlító kritérium, 81
 - abszolút konvergencia, 80
 - Cauchy-kritérium, 79
 - Cauchy-szorzat, 85
 - definíció, 77
 - feltételesen konvergencia, 84
 - gyökkritérium, 82
 - hányadoskritérium, 81
 - harmonikus sor, 80
 - konvergencia, divergencia, 77
 - Leibniz-sor, 84
 - Leibniz-tétel, 83
 - mértani sor, 78
 - műveletek, 78
 - Mertens-tétel, 85
- sorozat
 - Cauchy-sorozat, 41
 - divergencia, 42
 - határérték és műveletek, 37–39, 43–45
 - középsorozatai, 45
 - középsorozatai határértéke, 45
 - konstans, 35
 - konvergencia, 34
 - korlátos, 33
 - lim sup-ja, lim inf-je, 40
 - monoton növekvő, fogyó, 33
 - nevezetes sorozatok, 47–49
 - részsorozata, 39
 - véges határértéke, 34
 - végtelen határértéke, 42
- Számtani-mértani-harmonikus közép egyenlőtlensége, 5
- Tételek
 - Összehasonlító kritérium sorokra, 81
 - Átviteli elv függvényhatárértékekre, 56
 - Átviteli elv folytonosságra, 60
 - Binomiális tétel, 4

- Bolzano-Darboux-tétel, 72
- Bolzano-tétel, 73
- Bolzano-Weierstrass-tétel, 39
- Cauchy konvergencia-kritérium, 41
- Cauchy-kritérium függvényhatárértékre, 57
- Cauchy-kritérium sorokra, 79
- Gyökkritérium sorokra, 82
- Hányadoskritérium sorokra, 81
- Heine-tétel, 76
- Leibniz-tétel, 83
- Mertens-tétel, 85
- Monoton függvény határértékéről, 63
- Monoton sorozat konvergenciája, 36
- Rendőr-elv, 36
- Weierstrass-tétel, 74
- torlódási pont, 54
 - bal/jobbs oldali, 62
- végtelen tizedestört, 87
- Weierstrass-tétel, 74