ANALÍZIS I. VIZSGA

MATEMATIKA BSC
2009. DECEMBER 22.

Név:

A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható, mobiltelefonok csak kikapcsolt állapotban hozhatóak be. A szabályok elleni vétség elégtelen vizsgával jár. A vizsga 110 perc.

1. Mondja ki és bizonyítsa a sorozatokra vonatkozó Bolzano-Weierstrass tételt! (4+12 pont)
2. Definiálja a sorozat konvergenciájának fogalmát! Mondja ki a sorozatok *véges* határértéke és a sorozatok közötti műveletek kapcsolatról tanult állításokat! Bizonyítsa az egyik szabadon választott állítást! (14 pont)
3. A definíció alapján vezesse le, hogy mennyi lesz az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat határértéke! A valós számoknak milyen fontos tulajdonságát használtuk itt ki és hogyan? (7 pont)
4. (a) Definiálja a függvényhatárérték fogalmát, továbbá a definícióban használt fogalma(ka)t is! (7 pont)
   (b) Mondja ki és bizonyítsa a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elvet! (6+12 pont)
5. Határozza meg és vezesse le a $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ határérték ismeretében a következő függvényhatárértéket! Pontosan indokoljon, hol milyen tételt használ és miért szabad azt a tételt használni! (8 pont)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$
6. Mondja ki alábbiakat!
   (a) végtelen numerikus sor és konvergenciájának definíciója (6 pont)
   (b) Weierstrass tétele folytonos függvényről (5 pont)
   (c) Monoton függvény határértékéről szóló tétel (7 pont)
7. Ábrázolja az $f_1(x) = \log_2 x$ és $f_2(x) = 2^x$ képlettel megadott függvényeket, és jellemezze a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, folytonosság, határértékek! (6+6 pont)

A dolgozat 100 pontot ér. Várhatóan 40 pont kell az elégségeshez.