KÖZÉPSZINT

Matematika BSc Analízis Mintazárthelyi, 2009. október 22.

1. Határozzuk meg $\mathcal{D}(f)$-et az alábbi f függvény esetén! Döntsük el, hogy f injektív-e! Ha igen, adjuk meg f^{-1}-et!

$$f(x) = \log_{10}(x^3 - 1)$$

(6 pont)

2. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számokra!

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3 \geq 27 \cdot \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc}\right)$$

(7 pont)

3. Bizonyítsuk be teljes indukcióval az alábbi egyenlőtlenséget minden $n \geq 1$ természetes számra!

$$(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$$

(6 pont)

4. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét, melyek n. tagja a_n!

(a)

$$a_n := \sqrt[2n]{\frac{3^n - n^2 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n - n^3}}$$

(6 pont)

(b)

$$a_n := \frac{(n+1)^5 + 3 \cdot 5^n - n^2 \cdot 3^n}{5^n - 7n \cdot 3^n + 10}$$

(6 pont)

(c)

$$a_n := \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^{n^2 + 3}$$

(6 pont)

(d)

$$a_n := \frac{\sqrt{2n - 1}}{\sqrt[n]{(n-1)!}}$$

(6 pont)

5. Mi lesz a következő sorozat esetén $\limsup a_n$ és $\liminf a_n$?

$$a_n := \left(\frac{3}{4} + \frac{3 \cdot (-1)^n}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

(7 pont)

Minden megoldást indokoljon! Az indokláshoz előadáson vagy gyakorlaton bizonyított állításra utalhat. Sok sikert!