0. GYAKORLAT - Szükséges ismeretek rövid áttekintése

1. Ábrázoljuk az alábbi hozzárendeléssel megadott (minden esetben f-fel jelölt) függvényeket; vizsgáljuk meg, hogy hol (milyen intervallumokon) növekedőek vagy csökkenőek!

   (a) $f(x) = x^2 - 1$ (b) $f(x) = |x| + 2$ (c) $f(x) = |x - 2|$ (d) $f(x) = \cos 2x$
   (e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (f) $f(x) = \log_2 2x$ (g) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (h) $f(x) = \operatorname{tg} x$
   (i) $f(x) = \sqrt{1+x}$ (j) $f(x) = \log_2 x^2$ (k) $f(x) = x(1-x)$ (l) $f(x) = |x^2 - 2|$
   (m) $f(x) = \sin x \cos x$ (n) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (o) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

2. Milyen x értékek esetén értelmesek az alábbi hozzárendeléssel adott függvények, azaz mi az értelmezési tartományuk?

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ (b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (c) $f(x) = \operatorname{tg} 4x$
   (d) $f(x) = \log_2(x-7)$ (e) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ (f) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$
   (g) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 20}$ (h) $f(x) = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}$ (i) $f(x) = \sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-x}$
   (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (k) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ (l) $f(x) = \log_2\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)$

3. Határozzuk meg a koordinátasík azon (x, y) pontjainak halmazát, amelyekre

   (a) $x = y$ (b) $x^2 = -y$ (c) $x = y + 1$ (d) $\sqrt{x} = y$
   (e) $|x| = y$ (f) $|y| = x$ (g) $|x| = |y|$ (h) $x + 1 \le y$
   (i) $x \le y \le x - 1$ (j) $x^2 + y^2 = 4$ (k) $x^2 + y^2 \le 1$ (l) $|x + y| \le 3.$

4. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán (a pozitív valós számot jelöl)!

   (a) $x^2 = 4$ (b) $\cos 2x = 0$ (c) $a^x = 0$ (d) $a^x = 1$ (e) $\frac{x(x-1)}{\sin x} = 0$
   (f) $\log_a x = 0$ (g) $a^x = \frac{1}{a}$ (h) $\log_2 x = 4$ (i) $a^x = \frac{1}{a}$ (j) $x^2 = -2^x$
   (k) $\log_2 \log_2 x = 4$ (l) $\log_a x = -2$ (m) $x^3 = x$ (n) $\sin x = \cos x$ (o) $a^x = 5$
   (p) $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = x$ (q) $a^x = -1$

5. Fogalmazzuk meg az alábbi állítások tagadását (ha tudjuk, akár többféleképpen)! Próbáljuk minél egyszerűbben!

   (a) Az m egész szám páros.
   (b) A k valós szám pozitív.
   (c) A p valós szám irracionális.
   (d) Az f függvény minden valós x esetén értelmes.
   (e) Az (a_n) sorozat monoton növő.
   (f) Minden háromszög derékszögű.
   (g) Minden gép elromlik egyszer.
   (h) Minden virág sárga.
   (i) Minden autó legalább 1 tonna.
   (j) Minden héten van olyan nap, amikor nem nézek TV-t.
   (k) Minden szakasznak (intervallumnak) van két különböző pontja.

(l) Bármely két különböző racionális szám közt van irracionális.

(m) Minden országban van olyan település, amelyiknek minden utcájában minden ház földszintes.

(n) Ha az alma piros, akkor érett.

(o) Ha egy egész szám osztható 7-tel, akkor osztható 14-gyel is.

(p) Ha egy függvény monoton növekedő, akkor az nem egy másodfokú polinomfüggvény.

6. Indirekt bizonyítással igazoljuk az alábbi állításokat!

(a) A valós számok között nincs legnagyobb.

(b) Nincs olyan természetes szám, amely minden természetes számnak többszöröse.

(c) Minden szigorúan monoton növő függvény különböző pontokban különböző értékeket vesz fel.

(d) Nincs olyan pozitív szám, amelyik kisebb minden természetes szám reciprokánál.

(e) $\sqrt{2}$ irracionális.

(f) Ha egy m egész számra $\sqrt{m}$ nem egész, akkor $\sqrt{m}$ irracionális.

7. Teljes indukcióval igazoljuk az alábbi állításokat és azonosságokat!

(a) Véges sok valós szám közt van maximális.

(b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

(b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(e) $(n-1)\cdot 0.9 \geq \frac{1}{10} - \frac{1}{10^n}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

(g) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(h) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

(i) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$