1. GYAKORLAT - nevezetes egyenlőtlenségek, műveletek halmazokkal, függvények

1. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket, ahol a, b és c pozitív számokat, n pedig pozitív egészeket jelöl!

   (a) $(2a+b)^3 \geq 27a^2b$ (b) $a+\frac{1}{a} \geq 2$

   (c) $n^{n-2} \leq (n-1+\frac{1}{n^2})^n$, ha $n \geq 3$ (d) $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}$

   (e) $a^2+\frac{2}{a} \geq 3$ (f) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, ha $n > 1$

   (g) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \geq 2-\frac{4}{n}$ (h) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$

   (i) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 6$ (j) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$

   (k) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ (l) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

   (m) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$

   (n) Adott kerületű téglalapok közül melyik a legnagyobb területű?

   (o) Adott területű derékszögű háromszögek közül melyik a legkisebb kerületű?

   (p) Adott gömbbe írható egyenes hengerek közül melyiknek legnagyobb a térfogata?

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B, C \subset X$ halmazokra fennállnak az alábbiak!

   (a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ (b) $A \subset B \Leftrightarrow \forall C \subset X (A \cup C \subset B \cup C)$

   (c) $(A \subset B$ és $B \subset A) \Leftrightarrow A = B$ (d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

   (e) $(A \setminus (A \setminus B^c)) \cup B = A \cup B$, ahol $A^c = X \setminus A$ (f) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3. Határozzuk meg a $H_1, H_2, \ldots$ halmazok (végtelen) metszetét, ahol

   (a) $H_n = (0, n)$ (b) $H_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ (c)$H_n = (-n, n)$ (d) $H_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

   (e) $H_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ (f) $H_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ (g) $H_n = (n, \infty)$ (h) $H_n = \{x : x\ 2^n \text{ többszöröse}\}$

   (i) $H_n = \left(1, 2+\frac{1}{n}\right)$ (j) $H_n = \left(\frac{1}{n}, n+1\right)$.

4. Határozzuk meg a $H_1, H_2, \ldots$ halmazok (végtelen) unióját, ahol

   (a) $H_n = (n-1, n)$ (b) $H_n = (-n, n)$ (c) $H_n = \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ (d) $H_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

   (e) $H_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ (f) $H_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$ (g) $H_n = \{n\}$.

5. Határozzuk meg az alábbiakban megadott függvényekből álló $f \circ g$ és $g \circ f$ kompozíciófüggvényeket, ha azok értelmesek (azaz adjuk meg $f(g(x))$ és $g(f(x))$ értékét)!

   (a) $f(x) = x+1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ (b) $f(x) = 2x$, $g(x) = \sin x$ (c) $f(x) = x$, $g(x) = 3x^2$

   (d) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \frac{x}{9+x^2}$ (e) $f(x) = -x$, $g(x) = \sin x$ (f) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x^2$

6. Az alábbiakban megadott kompozíciófüggvényeket bontsuk (minél egyszerűbb) komponensekre, azaz adjuk meg, hogy mi lehet f és g, amennyiben $h(x) = (f \circ g)(x)$ az alábbi:

   (a) $h(x) = (x+1)^2$ (b) $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (c) $h(x) = \cos^2(x-1)$ (d) $h(x) = \sqrt{\sin(x+1)}$

   (e) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (f) $h(x) = x^x$ (g) $h(x) = \mathrm{tg}^2\sqrt{x}$ (h) $h(x) = \log_{10}(1-\cos x)$.

7. Melyek injektívek az alábbi függvények közül?

   (a) $g(x) = \mathrm{tg} x$ (b) $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ (c) $g(x) = \frac{1}{x+3}$ (d) $g(x) = 2^{x-1}$

   (e) $g(x) = \log_{10}(x+1)$ (f) $g(x) = \cos x$ (g) $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ (h) $g(x) = \log_2 x$

8. Az alábbi kérdések mindegyike $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú, azaz *valós* függvényekre vonatkozik, ahol $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$.

(a) Hány megoldása van az $f^{-1} = f$ egyenletnek?

(b) Előfordulhat-e, hogy f^{-1} értelmes, de nincs inverze?

(c) Van-e olyan invertálható f függvény, amelynek értékkészlete a $(-1, 1)$ intervallum?

(d) Igazoljuk, hogy ha f szigorúan monoton növő, akkor van inverze!

(e) Igazoljuk, hogy ha f szigorúan monoton növő, akkor inverze szigorúan monoton növő!

(f) Igazoljuk, hogy ha f invertálható, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + c$ és cf is invertálhatók!

(g) Van-e olyan f függvény, amelynek inverze valamilyen $a \in \mathbb{R}$ szerint periodikus?

(h) Igazoljuk, hogy ha f invertálható és $0 \notin \mathcal{R}(f)$, akkor $1/f$ is invertálható! Fogalmazzuk meg ennek valamilyen általánosítását!

(i) Vannak-e olyan f és g függvények, amelyek nem injektívek, $f \circ g$ viszont injektív?

9. Az alábbi kérdések mindegyike $f, g, h : X \to X$ típusú függvényekre vonatkozik, ahol X egy tetszőleges halmaz.

   (a) Igazoljuk, hogy $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ tetszőleges $f, g, h : X \to X$ esetén teljesül!

   (b) Igaz-e, hogy ha f invertálható, és $f \circ f$ létezik, akkor $f \circ f$ is invertálható?

   (c) Igaz-e, hogy ha $f = f \circ f$, akkor $f = f \circ f \circ f$?

   (d) Igaz-e, hogy ha $f = f^{-1}$ és $\mathcal{D}(f) = X$, akkor $\mathcal{R}(f) = X$?

   Az alábbi kérdések mindegyike $f_1, f_2 : X \to Y$ típusú függvényekre vonatkozik, ahol X, Y tetszőleges halmazok.

   (e) Igazoljuk, hogy graph $f_1 \subset$ graph $f_2 \Rightarrow \mathcal{D}(f_1) \subset \mathcal{D}(f_2)$.

   (f) Igazoljuk, hogy graph $f_1 \subset$ graph $f_2 \Rightarrow \forall x \in \mathcal{D}(f_2) : f_1(x) = f_2(x)$.

   (g) Milyen esetben lehetséges, hogy graph $f_1 = X \times Y$?