3. GYAKORLAT - sorozatok, határértékek

A feladatsorban sorozatokat mindig azok n-edik tagjával adunk meg, amelyet a_n jelöl ($n \in \mathbb{Z}^+$).

1. Mely sorozatok növőek, csökkenőek, illetve korlátosak az alábbiak közül?

   (a) $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ (b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (c) $a_n = \frac{n}{n^3-1}$ (d) $a_n = \ln(n^2+3)$

   (e) $a_n = \sin n$ (f) $a_n = (-1)^n$ (g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3-8n}$ (h) $a_n = \frac{n^2+n}{n^2-2}$

   (i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (j) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (k) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ (l) $a_n = \sqrt[n]{n}$

2. Számítsuk ki az alábbiakban megadott sorozatok határértékét, ha az létezik!

   (a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (b) $a_n = n^{-\frac{1}{2}}$ (c) $a_n = \frac{1}{n^2+n}$

   (d) $a_n = \log_2(2-\frac{1}{n})$ (e) $a_n = \frac{3-n^2}{2+n^3}$ (f) $a_n = \frac{n^2-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+4n}$

   (g) $a_n = \frac{n(3-n^2)}{3+2n^2}$ (h) $a_n = \sqrt{\frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}}$ (i) $a_n = \frac{2\sqrt{n-1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}$

   (j) $a_n = \frac{\sqrt{9n^2+n+\sqrt{n}}}{n+\sqrt[3]{n}}$ (k) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (l) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$

   (m) $a_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ (n) $a_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-n}$ (o) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

3. (a) Határozzuk meg, milyen (konstans) a értékek esetén lesz $\lim a^n$ értéke $0, 1, \infty$, illetve mikor nem létezik!

   (b) Igazoljuk, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $|a| < 1$ esetén $\lim n^k a^n = 0$ teljesül!

   (c) Igazoljuk, hogy ha a nemnegatív tagú (a_n) sorozatra $\lim a_n = A$, akkor $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$ teljesül!

   (d) Igazoljuk, hogy ha a pozitív tagú (a_n) sorozatra $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ teljesül!

   (e) Igazoljuk, hogy ha a pozitív tagú (a_n) sorozatra $\lim a_n = A$, akkor azon sorozatok határértéke is A, amelyeknek n-edik tagja $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$, illetve $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

   (f) Igazoljuk, hogy ha az (a_n) sorozatra $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, ahol $|A| < 1$, akkor $\lim a_n^n = 0$.

   (g)

   (h) Igazoljuk, hogy ha pozitív tagú (a_n) sorozat elemeire $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$ teljesül valamilyen $A > 1$ számra, akkor $\lim a_n = \infty$.

   (i) Igazoljuk, hogy ha (a_n) sorozat elemei közt nem szerepel a nulla, és $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$ teljesül valamilyen $-1 < A < 1$ számra, akkor $\lim a_n = 0$.

4. A $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ egyenlőség felhasználásával számítsuk ki az alábbiakban megadott sorozatok határértékét, ha az létezik! Használjuk fel a 3.(d)-ben szereplő állítást!

   (a) $a_n = \sqrt[n]{5n+3}$ (b) $a_n = \sqrt[2n]{n}$ (c) $a_n = \sqrt[n]{2+\sqrt{n}}$ (d) $a_n = \sqrt[n]{10n^3+2}$

   (e) $a_n = \sqrt[n]{2^n+n^3}$ (f) $a_n = \sqrt[4n]{4^n+n^4+n^3}$ (g) $a_n = \sqrt[n]{\frac{5^n+3^n}{4^n-3^n}}$ (h) $a_n = \sqrt[2n]{\frac{n^2 \cdot 2^n - 3^n}{\sqrt{4^n-3^n}}}$

5. A $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ egyenlőség felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!

   (a) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (b) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ (c) $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-3}$

   (d) $a_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ (e) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$ (f) $a_n = \left(\frac{n^3+2n+3}{n^3-3}\right)^n$

6. A 3.(e) feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, a $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ egyenlőséget, majd számítsuk ki a következő sorozatok határértékét! A további határértékek kiszámításához használjuk fel a 3.(f) (g)és (h) állításokat is!

(a) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[2n]{(2n)!}}$ (b) $a_n = \frac{\sqrt{n-5}}{\sqrt[n]{(n-1)!}}$ (c) $a_n = \frac{n!}{2^n}$ (d) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(e) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (f) $a_n = \sqrt[2n]{n!}$ (g) $a_n = \frac{n!}{\sqrt{n^n}}$ (h) $a_n = \frac{n!}{n^5+1}$

(i) $a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(n+1)^2}$ (j) $a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ (k) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$ (l) $a_n = n - \ln n!$

(m) $a_n = \frac{\ln n!}{n} - \ln n$ (n) $a_n = \ln{(n+1)!} - \ln n!$ (o) $a_n = n^2 - \ln n!$