4. GYAKORLAT - sorozatok konvergenciája (folytatás)

Sorozaton ebben a feladatsorban is valós számokból álló sorozatot értünk.

1. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim a_n = \lim b_n = 0$, emellett
   (a) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ (b) $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ (c) $\lim \frac{a_n}{b_n} = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

2. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim a_n = 0, \lim b_n = \infty$, emellett
   (a) $\lim a_n b_n = \infty$ (b) $\lim a_n b_n = -\infty$ (c) $\lim a_n b_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

3. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim a_n = \infty$ és $\lim b_n = -\infty$, emellett
   (a) $\lim a_n + b_n = \infty$ (b) $\lim a_n + b_n = -\infty$ (c) $\lim a_n + b_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

4. Mutassunk példát olyan (a_n) sorozatra, amelyre $\lim a_n = 0$, emellett
   (a) $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (b) $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$ (c) $\lim \sqrt[n]{a_n} = K$, ahol $K \in (0,1)$ adott.

5. Mutassunk példát olyan pozitív tagú (a_n) sorozatra, amelyre $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, emellett
   (a) $\lim a_n = 0$ (b) $\lim a_n = \infty$ (c) $\lim a_n = K$, ahol $K \in (0,1)$ adott.

6. (a) Mutassunk példát olyan divergens sorozatokra, melyeknek szorzata konvergens!
   (b) Lehetséges, hogy egy konvergens és egy divergens sorozat összege konvergens?
   (c) Van-e olyan sorozat, amelynek minden $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervallumban van tagja? Lehet egy ilyen sorozatnak határértéke?
   (d) Igazoljuk, hogy ha (a_n) konvergens, akkor $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ teljesül! Igaz-e az előző állítás megfordítása?
   (e) Tudjuk, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja esik az $A \in \mathbb{R}$ minden környezetébe. Következik-e ebből, hogy $\lim a_n = A$?
   (f) Tudjuk, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja esik az I_1 és I_2 intervallumba is, ahol $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Lehet-e az (a_n) sorozatnak határértéke?
   (g) Melyek azon (a_n) sorozatok, amelyekre $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, emellett A valamilyen környezetében csak véges sok különböző tagja van (a_n)-nek?
   (h) Tudjuk, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok olyan tagja van, amely nem eleme az A valamely környezetének. Lehetséges, hogy $\lim a_n = A$?