5. GYAKORLAT - sorozatok konvergenciája (folytatás)

A feladatokban használjuk az alábbi fogalmat:
Ha $s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ bijekció, akkor az $(a_{s(n)})$ sorozatot az (a_n) sorozat *átrendezésének* nevezzük.

1. (a) Tegyük fel, hogy $\lim a_n = \lim b_n$. Igazoljuk, hogy ekkor az $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ sorozat limesze létezik, valamint (a_n) és (b_n) közös határértékével egyezik meg!

   (b) Előfordulhat az is, hogy egy (a_n) sorozatnak van határértéke egy átrendezésének meg nincs? Lehetséges, hogy egy sorozatnak és egy átrendezésének van határértéke, de azok különbözők?

   (c) Mutassunk olyan konvergens sorozatot, amelynek van szigorúan monoton növő és csökkenő részsorozata is!

   (d) Lehet-e monoton csökkenő részsorozata (a_n)-nek, ha tudjuk, hogy $\lim a_n = \infty$?

   (e) Jellemezzük azokat a sorozatokat, amelyeknek nincs szigorúan monoton részsorozata!

   (f) Van-e olyan (a_n) sorozat, amelynek minden részsorozata rendelkezik szigorúan monoton növő és csökkenő részsorozattal is?

   (g) Tekintsük az (a_n) sorozatnak az $1, 3, 5, \dots$, az $2, 4, 6, \dots$ valamint az $3, 6, 9, 12 \dots$ indexsorozathoz tartozó részsorozatát! Igazoljuk, hogy ha mindhárom részsorozat konvergens, akkor az (a_n) sorozat is!

2. (a) Igazoljuk, hogy ha egy sorozat monoton növő, akkor számtani közép sorozata is monoton növő!

   (b) Igazoljuk, hogy ha egy pozitív tagú sorozat monoton növő, akkor mértani, és harmonikus közép sorozata is monoton növő!

   (c) Igazoljuk, hogy ha K egy sorozat felső korlátja, akkor az a számtani közép sorozatnak is felső korlátja!

   (d) Mutassunk olyan divergens sorozatot, amelynek számtani közép sorozata konvergens!

   (e) Igaz-e, hogy ha egy (a_n) sorozat számtani közép sorozata korlátos, akkor (a_n) is korlátos?

3. (a) Igazoljuk, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok tagjai véges sok kivételével megegyeznek, akkor $\liminf a_n = \liminf b_n$, valamint $\limsup a_n = \limsup b_n$ teljesül!

   (b) Igaz-e, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok korlátosak, akkor $\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$?

   (c) Igazoljuk, hogy az ha $(a_{f(n)})$ az a_n sorozat egy átrendezése, akkor $\liminf a_n = \liminf a_{f(n)}$ tejesül!

   (d) Határozzuk meg az $a_n = (-1)^n$ sorozat esetén $\liminf a_n$ és $\limsup a_n$ értékét!

   (e) Határozzuk meg az $a_n = (-1)^n(2 + \frac{1}{n})$ sorozat esetén $\liminf a_n$ és $\limsup a_n$ értékét!

   (f) Legyen (q_n) a $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ elemeinek egy sorozatba rendezése. Határozzuk meg $\liminf q_n$ és $\limsup q_n$ értékét!

   (g) Tudjuk, hogy a korlátos (a_n) sorozatnak végtelen sok eleme van az I_1 és I_2 zárt intervallumokban is, ahol $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Igazoljuk, hogy $\liminf a_n \neq \limsup a_n$.

   (h) Igazoljuk, hogy egy korlátos (a_n) sorozatra $\sup\limits_{i,j} |a_i - a_j| \geq \limsup a_n - \liminf a_n$ teljesül! Vizsgáljuk meg azokat az eseteket is, amikor valamelyik mennyiség ∞, illetve $-\infty$! Mutassunk példát, amikor nincs egyenlőség, és mutassunk olyan nem konstans sorozatot, amikor egyenlőség áll fenn!

(i) * Lehetséges-e, hogy egy sorozat konvergens részsorozatainak limeszeiből álló halmaz a $(0,1)$ intervallum?

4. Számítsuk ki azon sorozatok határértékét, amelyek n-edik tagja az alábbi!

(a) $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ (b) $n^{\frac{1}{3}}\sin n$ (c) $2^{-n}\cos\dfrac{2^n}{n^2}$ (d) $\sqrt[n]{\operatorname{arc\,tg} n}$

(e) $\dfrac{\sin^3(n+\frac{1}{n})}{\ln n}$ (f) $\dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh} n}$ (g) $\dfrac{\operatorname{sh} n}{n^2}$ (h) $\operatorname{ch} 2n - \operatorname{sh} n$

(i) $\dfrac{\operatorname{ch} n}{2^n+1}$ (j) $\dfrac{\operatorname{sh} n}{(-4)^n}$ (k) $\sqrt[n]{\operatorname{ch} n}$ (l) $\operatorname{ch} n - \dfrac{e^n}{3}$

(m) $\operatorname{th}(n^{\frac{1}{3}}-1)$ (n) $n - \operatorname{th} n$ (o) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ar\,th}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$

5. Számítsuk ki azon sorozatok határértékét, amelyek n-edik tagja az alábbi!

(a) $\dfrac{2\,(-1)^n}{3\sqrt[3]{n}+1}$ (b) $\dfrac{5^{n+1}}{n!}$ (c) $\dfrac{1+2+...+n}{(n+1)\,(n+10)}$ (d) $\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$

(e) $\dfrac{n}{\sqrt{2+n^2}}$ (f) $\dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}$ (g) $\dfrac{3\cdot 8^{2n}-n^{10}\cdot 3^{3n}}{n^2\cdot 5^n+2\cdot 4^{3n+1}}$ (h) $\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^n$

(i) $\dfrac{2^{2n}+n^2}{5^n-n}$ (j) $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ (k) $\dfrac{1+2+...+n}{n+4}-\dfrac{n}{2}$ (l) $\left(\dfrac{1}{n}+4\right)^n$

(m) $\dfrac{1-5^{n+1}}{5^n+1}$ (n) $\dfrac{n!}{n^2}$ (o) $\dfrac{5^n+5^{-n}}{5^n-5^{-n}}$ (p) $\left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{n+1}$

(q) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{n+\sqrt{2}}$ (r) $\left(\dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$ (s) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\dfrac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ (t) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$