6. GYAKORLAT - torlódási pont, valós függvények határértéke

A feladatokban egy $K \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjainak halmazát (amely $\bar{\mathbb{R}}$-ban van) K' jelöli.

1. Határozzuk meg az alábbi halmazok torlódási pontjait!

   (a) $(0,1)$ (b) $[1,4]$ (c) $(-1,3]$ (d) $(0,\infty)$

   (e) $\mathbb{N}$ (f) $\mathbb{Z}$ (g) $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ (h) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   (i) $\{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, ahol (a_n) konvergens sorozat (j) $\left\{(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   (k) $K \subset \mathbb{R}$, ahol K véges (l) * $(0,1) \setminus H$, ahol H megszámlálható

   (m) $[0,1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ (n) $\{\sqrt{2}q : q \in \mathbb{Q}\}$

2. (a) Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor $\infty \in K'$ teljesül!

   (b) Igazoljuk, hogy ha $(K_1 \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus K_1)$ véges, akkor $K_1' = K_2'$ teljesül!

   (c) Igazoljuk, hogy minden $K \subset \mathbb{R}$ esetén $k \in K'$ pontosan akkor igaz, ha k minden környezetében végtelen sok K-beli elem van.

   (d) Igazoljuk, hogy minden $K \subset \mathbb{R}$ esetén $k \in K'$ pontosan akkor igaz, ha k minden környezetében legalább két K-beli elem van.

   (e) * Lehet-e valamilyen $K \subset \mathbb{R}$ esetén $K' = (0,1)$?

   (f) Mutassunk olyan $K \subset \mathbb{R}$ halmazt, amelyre $K'' \subsetneq K'$ teljesül!

   (g) Igazoljuk, hogy tetszőleges $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ halmazokra $(K_1 \cup K_2)' = K_1' \cup K_2'$ teljesül!

3. Döntsük el, hogy léteznek-e az alábbi függvényhatárértékek, és ha igen, akkor számítsuk ki ezeket!

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^3-x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{2x^2-5x-3}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2}$ (i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2+\sqrt{x}}{x^3-8}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{x^3}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2} \cdot \operatorname{sgn} x$

   (m) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2-2x-10$ (n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4-3x^3-6$ (o) $\lim\limits_{x\to -\infty} x-3\sqrt[3]{x^2}$

   (p) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2-x+4}{x^3+x+5}$ (q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-5x+9}{x+6}$ (r) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt[3]{x^2-x}$

   (s) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ (t) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt[3]{x^2-1}-1}$ (u)* $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$