## 7. GYAKORLAT - valós függvények határértéke (folytatás)

1. Az alábbi két azonosság

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0+} x^x = 1$$

és a logaritmusfüggvény folytonosságának felhasználásával igazoljuk a következő egyenlőségeket, ahol $a \in (1,\infty)$ és $p \in \mathbb{R}^+$ tetszőlegesek!

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{x^p} = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{a^x} = 0$ (c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^p \log_a x = 0$

2. Az alábbi két azonosság

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathsf{e} \qquad \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathsf{e}$$

és a logaritmusfüggvény folytonosságának felhasználásával igazoljuk a következő egyenlőségeket, ahol $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tetszőleges!

(a) $\lim\limits_{s\to 0}(1+s)^{\frac{1}{s}} = \mathsf{e}$ (b) $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\log_a(1+s)}{s} = \dfrac{1}{\ln a}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

3. Az előző feladatokban igazolt egyenlőségek felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!

(a1) $\lim\limits_{x\to 0+}(x^2+2)\ln x$ (a2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ (a3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\log_2 x}{\sqrt[3]{x}}$

(b1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\log_2 x-\log_3 x}$ (b2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^3-x+1)}{\sqrt{x-1}}$ (b3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(5^x+x)}{x}$

(c1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x-x^3}\cdot\ln(x^2+x^4)$ (c2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^2+x)-2\ln x$ (c3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\ln(x^2+1)+\sqrt{x}}{\ln x-\sqrt{x+1}}$

(d1) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (d2) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$ (d3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_2 x-2}{x-2}$

(e1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\cdot\ln\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)$ (e2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{3x}$ (e3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{x^2-1}}{x\cdot\ln x}$

(f1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{x}$ (f2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ch}\,x-1}{x}$ (f3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ch}^2 x-1}{x^2}$

(g1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}$ (g2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2-x)-\ln 2}{x}$ (g3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-x)-\ln 2}{x^2}$

(h1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-x)-\ln 2}{\ln(5-x)-\ln 5}$ (h2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}$ (h3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$

(i1) $\lim\limits_{x\to\infty} x-\ln\mathrm{ch}\,x$ (i2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-|x|)\cdot\ln|x|$ (i3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\mathrm{sh}\,x+5}{\mathrm{sh}\,(x-5)}$

(j1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ch}\,x^2}{x^2\mathrm{sh}\,x^2}$ (j2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^x-2^x}{x^2}$ (j3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{th}\,x)^x$

(k1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ (k2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{\ln x}$ (k3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}$

4. A $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ azonosság felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek!

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg} 2x$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\cdot \ln|x|$

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

5. Ki lehet-e terjeszteni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket $\mathbb{R}$-re úgy, hogy a kiterjesztéssel kapott függvények $\mathbb{R}$-en folytonosak legyenek?

   (a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

   (d) $f(x)=x\cdot\ln|x|$ (e) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (f) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (g) $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ (h) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\cos\dfrac{1}{x}$ (i) $f(x)=x\cdot\ln\left(|\cos x|\right)$

6. Mutassunk olyan $f$ és $g$ függvényeket, amelyekre $\mathcal{D}(f)=\mathcal{D}(g)=\mathbb{R}$, nem folytonosak mindenütt, de

   (a) $f+g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.

   (b) $f^2$ folytonos $\mathbb{R}$-en.

   (c) $fg$ folytonos $\mathbb{R}$-en.

   (d) $f\circ g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.