8. GYAKORLAT - valós függvények határértéke, folytonossága

1. Számítsuk ki az alábbi, $f(x)^{g(x)}$ alakú függvények határértékét a megadott helyeken!

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)^x$ (b) $\lim\limits_{x\to0+}(x^2+x+1)^{\frac{1}{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to0+}(x+1)^{\frac{1}{x^2+x+1}}$

   (d) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (e) $\lim\limits_{x\to0+}(x^2\operatorname{sh} x)^{\frac{1}{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to0+}\sin x^{\sin 2x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to0+}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ (h) $\lim\limits_{x\to0+}(1+\operatorname{sh} x)^{\ln x}$ (i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+}(\operatorname{arc\,tg} x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$

   (j) $\lim\limits_{x\to\infty}(x(1+|\sin x|))^{\frac{1}{x^2}}$ (k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{4^x}\right)^{2^{-x}}$ (l) $\lim\limits_{x\to\infty}([x])!^{\frac{1}{x+1}}$

2. Döntsük el, hogy az alábbi hozzárendeléssel megadott függvények közül melyeknek létezik jobb, illetve bal oldali határértéke azokban a pontokban, ahol nem értelmesek!

   (a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ (d) $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x}$

   (e) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ (f) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x^2}$ (g) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ (h) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

   (i) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ (j) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ (k) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ (l) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$

3. Mutassunk példát olyan $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ függvényre, amelyre $\mathcal{D}(f)=[0,1]$, emellett

   (a) f-nek pontosan egy pontban nem létezik határértéke.
   (b) f-nek végtelen sok pontban nem létezik határértéke.
   (c) f-nek sehol sem létezik határértéke.
   (d) f folytonos $[0,1]$-en egy pont kivételével.
   (e) * f pontosan egy pontban folytonos.
   (f) f-nek mindenhol létezik határértéke, de pontosan 2 pontban nem folytonos.
   (g) f-nek mindenhol létezik határértéke, de végtelen sok pontban nem folytonos.
   (h) f-nek mindenhol létezik határértéke, de nem korlátos. Lehet egy ilyen függvény mindenhol folytonos?

4. Igazoljuk $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre vonatkozó állításokat!

   (a) Ha valamilyen $C\geq 0$ számra minden $x,y\in\mathcal{D}(f)$ esetén $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$, akkor f folytonos $\mathcal{D}(f)$-en. Mutassunk rá konkrét példával, hogy az abszolút érték nem hagyható el!
   (b) Ha az $f_1,f_2:(a,b)\to\mathbb{R}$ folytonos függvények értéke azonos az $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ halmazon, akkor $f_1=f_2$.
   (c) Ha f balról folytonos a-ban, akkor $f(-x)$ jobbról folytonos $-a$-ban.
   (d) Ha f balról folytonos a-ban és $\lim\limits_{a} f$ létezik, akkor f folytonos a-ban.
   (e) Ha $\lim\limits_{a-} f=-b$ és $\lim\limits_{a+} f=b$ valamilyen $b\in\bar{\mathbb{R}}$ értékre, akkor $\lim\limits_{a} f^2=b^2$. Fogalmazzuk meg ennek az állításnak valamilyen általánosítását!
   (f) Ha $\mathcal{D}(f)$ egy intervallum, és $\mathcal{R}(f)$ 3 elemű, akkor f nem lehet $\mathcal{D}(f)$-en folytonos.

(g) Ha $\lim_{\infty} f = 0$, emellett valamilyen n-re f pozitív az (n, ∞) halmazon, akkor $\lim_{\infty} \frac{1}{f} = \infty$ és $\lim_{0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ egyaránt teljesülnek.

(h) Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos, és nem konstans, akkor értékkészlete végtelen sok elemet tartalmaz.

(i) Ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív is, akkor szigorúan monoton.

(j) Ha az f folytonos fügvény bijekciót ad meg az I_1 és I_2 intervallumok között, akkor I_1 és I_2 azonos típusúak: mindketten zártak, mindketten nyíltak vagy egyikük sem nyílt vagy zárt.

(k) Ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek van maximuma, és $\lim_{a+} f < \lim_{-b} f \in \mathbb{R}$ léteznek, akkor f ezek egyikét fel is veszi!

5. Az alábbi egyenletek közül melyeknek van megoldása a megadott intervallumokon?

(a) $x = e^{-x}, \quad x \in (0, 1)$

(b) $\ln x = -x, \quad x \in (0, 2)$

(c) $\operatorname{arc\,tg} x = 3e^{-x}, \quad x \in (0, 2)$

(d) $\operatorname{ch} x \sin x = \cos x, \quad x \in (0, \pi)$

(e) $\operatorname{sh} \sin x = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(f) $\operatorname{ch} x = 2 - x^2, \quad x \in (1, 5)$

(g) $\ln x = (x - 2)^2, \quad x \in (0, 4)$

(h) $x^9 - 5x^2 + x - 3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

(i) $xe^x = 5 + x^2, \quad x \in \mathbb{R}^+$

(j) $e^x \sin x = x^3 + 3, \quad x \in \mathbb{R}^+$

(k) $\sin x = x^3 - \ln |x| + x^2 - 9, \quad x \in \mathbb{R}$

(l) $\operatorname{arc\,tg} ((1 + x^3) \sin x) = x^2 - x^3, \quad x \in (5, \infty)$

6. Mutassunk olyan $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amely nem konstans, és

(a) minden értékét pontosan egyszer veszi fel

(b) egy értékét egyszer, az összes többit kétszer veszi fel

(c) egy értékét végtelen sokszor, a többit pedig egyszer veszi fel

(d) minden értékét végtelen sokszor felveszi.

7. * Van olyan példa is az előző feladatban, ahol minden értéket 2-szer vesz fel f?

8. * Van olyan nem folytonos függvény is, amelyre igaz a Darboux-tulajdonság?