

9. GYAKORLAT - sorok

1. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét!

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} & \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{10^n} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\
 \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-2}} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}) & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
 \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} & \text{(i)*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}
 \end{array}$$

2. Adjunk meg olyan sorokat, hogy a hozzájuk tartozó részletösszeg-sorozatok n -edik tagja:

$$\text{(a)} \frac{1}{n} \quad \text{(b)} \frac{n+1}{n} \quad \text{(c)} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(d)} 3 - \frac{1}{2^n}$$

3. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e!

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} & \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-3}{2n+5} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
 \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^2+5}} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{n}{10}} & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n^2+3n+5} \\
 \text{(g)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 n} & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt{n+1}+1} & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 \text{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-5n+10} & \text{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(n^2+1)\ln(n^2+1)} & \text{(l)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+1)}{n^3} \\
 \text{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} & \text{(n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \operatorname{th}(3n+1)} & \text{(o)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \\
 \text{(p)} \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} 2n \sin \left(\frac{1}{n+1} \right) & \text{(q)*} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} - 1 & \text{(r)*} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{5} - 1
 \end{array}$$

4. A gyök- és hányadoskritériumot is felhasználva döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e!

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} & \text{(b)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2^n}{(n-3)!} & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 3^{2n+3}}{(n+1)!} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 10^{3n-1}}{\sqrt[3]{(n-1)!}} \\
 \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!} & \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \\
 \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+10)!}{n^{n-1}} & \text{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} & \text{(l)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \\
 \text{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \ln n)^n}{n!} & \text{(n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{3^n} & &
 \end{array}$$

5. Mutassunk példát olyan $\sum a_n$ sorokra, amelyekre

- (a) $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ nem létezik, és $\sum a_n$ konvergens,
- (b) $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ nem létezik, és $\sum a_n$ divergens,
- (c) $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, és $\sum a_n$ konvergens,
- (d) $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, és $\sum a_n$ divergens,
- (e) $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ nem létezik, és $\sum a_n$ konvergens,
- (f) $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ nem létezik, és $\sum a_n$ divergens,
- (g) $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, és $\sum a_n$ konvergens,
- (h) $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, és $\sum a_n$ divergens.

6. Igaz-e, hogy ha a $\sum a_n$ pozitív tagú sor konvergens, akkor

- (a) a $\sum \left(\frac{1}{n^2} + a_n \right)$ sor konvergens?
- (b) a $\sum a_n^2$ sor konvergens?
- (c) a $\sum \sqrt{a_n}$ sor konvergens?
- (d) a $\sum a_{2n}$ sor konvergens?
- (e) a $\sum (a_n - a_{n-1})$ sor konvergens?
- (f) a $\sum (a_{2n} - a_n)$ sor konvergens?
- (g) a $\sum a_{2n} a_{2n-1}$ sor konvergens?

7. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{3n^2 + 5}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(n\pi + \frac{1}{n} \right)}{n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$