BSc Analízis II. előadásjegyzet
2009/2010. tavaszi félév

Sikolya Eszter
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2011. október 11.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet a 2009/2010-es tanév tavaszi félévében tartott Analízis II. kurzus anyagához készül. A jegyzet a félév során folyamatosan bővül, az utolsó változtatás dátuma a címlapon látható. A jegyzetben bizonyára előfordulhatnak hibák – ezek jelzését örömmel veszem a `seszter@cs.elte.hu` e-mail-címen!

A jegyzet során az alább jelöléseket használom:

$\mathbb{N}$ természetes számok, a 0-t is beleértve;

$\mathbb{Z}$ egész számok;

$\mathbb{Q}$ racionális számok;

$\mathbb{R}$ valós számok;

$\mathbb{R}^+$ pozitív valós számok;

$\mathbb{R}^-$ negatív valós számok (és hasonlóan: $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}^+$, stb.)

Első fejezet

Differenciálhatóság

A differenciálhatóság a függvény simaságát jelenti. A differenciálható függvény folytonos, és nincs rajta törés, csúcs. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Derivált fogalma és geometriai jelentése
- Elemi függvények deriváltjai
- Deriválási szabályok
- Monotonitás és szélsőérték
- Konvexitás és inflexió
- Függvényvizsgálat
- Középértéktételek
- Taylor-polinom
- L'Hospital-szabály

1.1. A derivált fogalma és geometriai jelentése

Vizsgáljunk meg két egyszerű függvényt: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(t) := t^2$, és $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(t) := |t|$. Rögzítsük az $a := 0$ pontot. Könnyen ellenőrizhető, hogy f_1 és f_2 is páros; alulról korlátos és felülről nem korlátos; a pozitív számok halmazán növekvő, a negatív számok halmazán fogyó; az $a = 0$ pontban minimuma van, és a minimum értéke 0; az $a = 0$ pontban folytonos.
Szembetűnő a sok hasonlóság ellenére, hogy az $a = 0$ pontban az f_1 függvény sima, az f_2 függvénynek pedig törése van.
Van-e olyan „műszer", amely kimutatja, hogy egy függvény valamely pontban sima, egy másik pedig nem?

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $a \in \mathcal{D}(f)$ egy rögzített pont. Az f függvény a-hoz tartozó *különbségi-hányados-függvénye* legyen a

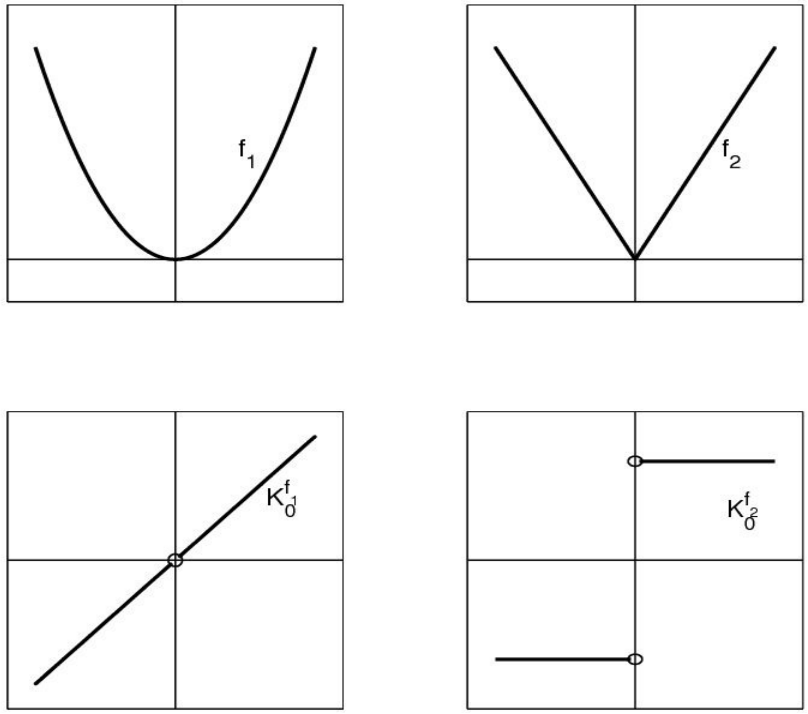
$$K_a^f : \mathcal{D}(f) \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \quad K_a^f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

függvény. Vizsgáljuk meg ezzel a „műszerrel" az f_1 és f_2 függvényt az $a := 0$ pont esetén (1.1. ábra)! Az f_1 függvény esetén

$$K_0^{f_1}(x) = \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = x.$$

Az f_2 függvény esetén

$$K_0^{f_2}(x) = \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$



1.1. ábra.

Látjuk, hogy a sima f_1 függvény esetén van határértéke (folytonossá tehető) a $K_0^{f_1}$ különbségihányados-függvénynek a 0-ban, míg a töréssel rendelkező f_2 függvény $K_0^{f_2}$ különbségihányados-függvényének nincs határértéke a 0 pontban. Ez a vizsgálat motiválja, hogy azokat a függvényeket, amelyek különbségihányados-függvényének van határértéke abban az a pontban, amelyhez tartozik (a példában $a = 0$), *differenciálható*nak fogjuk nevezni a-ban, és az a-beli *deriváltja* ezt a határértéket jelenti:

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Honnan került elő az a „műszer”, amely alkalmas egy függvény simaságát kimutatni? Először egy geometriai megközelítést mutatunk be. A koordináta-rendszer $(a, f(a))$ és a tőle különböző $(x, f(x))$ pontjain át fektessünk egy egyenest (szelőt). Az egyenes *meredeksége (iránytangense)*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

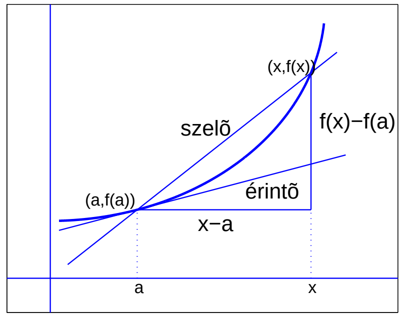
[Ezt jelöltük $K_a^f(x)$-szel.]

Ha x tart az a-hoz, akkor (sima függvény esetén) a szelők tartanak egy határhelyzethez, amit *érintő*nek neveznek, így a szelők meredeksége is tart az érintő meredekségéhez (1.2. ábra). [Ezt a határértéket neveztük el deriváltnak.]

A másik egy fizikai interpretáció legyen. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását a $t \mapsto s(t)$ út-idő függvény írja le. A $[t_0, t]$ időintervallumban az átlagsebesség a megtett $s(t) - s(t_0)$ út és a megtételéhez szükséges $t - t_0$ idő hányadosa, azaz

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

[Gyakran ezt a hányadost $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ jelöli.] Ha „minden határon túl” rövidítjük az időintervallumot, az átlagsebesség egy szám körül keveset ingadozik (feltéve, hogy sima volt az út-idő függvény), ezt a számot nevezik *pillanatnyi*



1.2. ábra.

sebességnek:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=:v(t_0)\quad\text{vagy}\quad\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v.$$

[Látható, hogy a pillanatnyi sebesség az átlagsebesség határértéke és az út-idő függvény differenciálhányadosa: $s'(t_0)=v(t_0)$.]

1.2. A derivált fogalma és kapcsolata a folytonossággal

1.1. Definíció. Legyen $A\subset\mathbb{R},\ a\in A$. Azt mondjuk, hogy *a belső pontja* az A halmaznak, ha a-nak létezik $K(a)$ környezete, hogy $K(a)\subset A$.
Az A halmaz belső pontjainak halmazát jelölje $\operatorname{int} A$.

1.2. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható* az a pontban, ha

$$\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R},$$

vagyis ha az f függvény a-hoz tartozó K_a^f *különbségihányados-függvényének*

$$K_a^f:\mathcal{D}(f)\setminus\{a\}\to\mathbb{R}\quad K_a^f(x):=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

létezik véges határértéke a-ban.
Ha f differenciálható az a pontban, akkor

$$f'(a):=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Az $f'(a)\in\mathbb{R}$ számot az f függvény a pontbeli *differenciálhányados*ának vagy *deriváltj*ának nevezzük.
Az $f'(a)$ helyett gyakran használják még az $\dot{f}(a),\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a),\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=a},\ Df(a)$ jelöléseket is.

A fenti 1.2. ábra alapján meggondoltak szerint az $f'(a)$ szám a függvény grafikonjának, $\operatorname{graph}(f)$-nek $(a,f(a))$ pontjához húzott érintőjének a meredeksége. Ennek megfelelően definiálhatjuk az $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban differenciálható f függvény a pontbeli érintőjét.

1.3. Definíció. Tegyük fel, hogy f differenciálható az $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f *függvény a pontbeli érintőjé*nek egyenlete az alábbi egyenes egyenlete:

$$y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a).\tag{1.2}$$

Az érintő tehát az $(a, f(a))$ ponton átmenő $f'(a)$ meredekségű egyenes. A következő fontos tétel arról szól, hogy a függvény érintője mennyire van „közel” a függvény grafikonjához.

1.4. Tétel (Főtétel)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$*. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) f *differenciálható az* a *pontban;*

(ii) $\exists F_a : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ *az* a *pontban folytonos függvény, hogy* $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ *esetén*

$$f(x) = f(a) + F_a(x) \cdot (x - a). \tag{1.3}$$

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen f differenciálható a-ban. Ekkor vezessük be az

$$F_a : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}, \quad F_a(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{ha } x \neq a\,; \\ f'(a), & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvényt. Az F_a folytonos a-ban, ugyanis $\forall x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ esetén

$$F_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

az f a-beli differenciálhatósága miatt pedig

$$\lim_{x \to a} F_a(x) = f'(a) = F_a(a).$$

Legyen ezután $x \in \mathcal{D}(f)$ tetszőleges. Ha $x \neq a$, akkor

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = F_a(x) \cdot (x - a);$$

ha $x = a$, akkor

$$f(a) - f(a) = F_a(a) \cdot (a - a)$$

nyilván igaz.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy $\exists F_a$ az a-ban folytonos függvény, hogy $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x - a)$.
Ha $x \neq a$, akkor

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = F_a(x).$$

Mivel a feltétel szerint F_a folytonos a-ban, ezért $\exists \lim_{x \to a} F_a(x) = F_a(a)$, de akkor

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = F_a(a) \in \mathbb{R}$$

is teljesül, azaz f differenciálható a-ban, sőt $F_a(a) = f'(a)$. □

1.5. *Megjegyzés.* A bizonyításból kiderült, hogy a tétel szerint létező F_a függvényre

$$F_a(a) = f'(a)$$

teljesül.
Vonjuk most ki az (1.3)-ból az érintő (1.2) egyenletét!

$$f(x) - y = (F_a(x) - f'(a)) \cdot (x - a) \Longrightarrow \frac{f(x) - y}{x - a} = F_a(x) - f'(a), \quad x \neq a.$$

Ez azt jelenti, hogy f érintője olyan közel van f-hez x-ben, mint egy a-ban 0 határértékkel rendelkező folytonos függvény, megszorozva $(x - a)$-val.

1.6. Tétel. *Ha* f *differenciálható* a*-ban, akkor* f *folytonos* a*-ban.*

Bizonyítás. Ha f differenciálható a-ban, akkor $\exists F_a$ olyan a-ban folytonos függvény, hogy $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x-a)$, azaz

$$f = f(a) + F_a \cdot (\mathrm{id} - a).$$

Mivel a-ban folytonos függvények összege, szorzata is folytonos, ezért f is folytonos az a pontban. □

1.7. *Megjegyzés.* Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ függvény folytonos az $a := 0$ pontban, de az (1.1)-ben láttuk, hogy a 0-hoz tartozó különbségihányados-függvényének nincs határértéke 0-ban, ezért f nem differenciálható a 0 pontban. A példa azt mutatja, hogy a tétel nem fordítható meg.

1.8. Definíció. Azt a függvényt, amely minden x pontban, ahol a függvény differenciálható, megadja az x-beli deriváltat, az f függvény *deriváltfüggvényé*nek nevezik, és f'-vel jelölik. Tehát

$$\mathcal{D}(f') := \{x : f \text{ differenciálható } x\text{-ben}\}$$
$$f'(x) := \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

1.9. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^2$ függvény nem csak az $x := 0$ pontban tűnik simának (ld. az előző fejezetet). Legyen $x \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám. Nézzük meg, hogy az f függvény x-hez tartozó különbségihányadosának van-e határértéke x-ben!

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^2 - x^2}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t-x)(t+x)}{t - x} = \lim_{t \to x} (t + x) = 2x.$$

Tehát f differenciálható x-ben és $f'(x) = 2x$, vagyis a deriváltfüggvénye $(\mathrm{id}^2)' = 2 \cdot \mathrm{id}$.

1.3. Műveletek differenciálható függvényekkel

1.10. Tétel. *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

□

1.11. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor λf differenciálható a-ban, és*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

Bizonyítás.

$$\lim_{x \to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \lambda \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \cdot f'(a).$$

□

1.12. Következmény. *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f - g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti tételeket f-re és g-re, valamint $\lambda = -1$-re. □

1.13. Tétel. *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. az 1.6. Tételt), így $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. □

1.14. Tétel. *Ha g differenciálható a-ban és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g}$ is differenciálható a-ban, és*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. Mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. az 1.6. Tételt), így a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(g)$ környezet, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $g(x) \neq 0$. Tehát $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}\left(\frac{1}{g}\right)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = \\ &= \lim_{x\to a} \left(-\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)}\right) \\ &= -g'(a) \cdot \frac{1}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

□

1.15. Tétel. *Ha f, g differenciálhatók a-ban és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ban és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. Mivel $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, és a feltételek szerint $\frac{1}{g}$ differenciálható a-ban, ezért a szorzatfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt $\frac{f}{g}$ differenciálható a-ban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

1.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy g differenciálható a-ban és f differenciálható $g(a)$-ban. Ekkor $f \circ g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Először gondoljuk meg, hogy a feltételekből következik:

$$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \circ g) = \operatorname{int} \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Mivel $g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, ezért $\exists \varepsilon > 0$, hogy $K_\varepsilon(g(a)) \subset \mathcal{D}(f)$. Másrészt g differenciálható a-ban, ezért folytonos is a-ban, így $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(g) \Longrightarrow g(x) \in K_\varepsilon(g(a)) \subset \mathcal{D}(f). \tag{1.4}$$

Tudjuk, hogy $\exists \rho > 0 : K_\rho(a) \subset \mathcal{D}(g)$. Jelölje $r := \min\{\delta, \rho\}$. Ekkor (1.4) alapján

$$x \in K_r(a) \Longrightarrow x \in \mathcal{D}(g),\ g(x) \in \mathcal{D}(f) \Longrightarrow x \in \mathcal{D}(f \circ g),$$

így $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \circ g)$ teljesül.
Mivel g differenciálható a-ban, ezért az 1.4. Főtétel miatt $\exists G_a$ az a-ban folytonos függvény, hogy $\forall x \in \mathcal{D}(g)$ esetén

$$g(x) - g(a) = G_a(x) \cdot (x - a).$$

Mivel f differenciálható $g(a)$-ban, ezért szintén az 1.4. Főtétel miatt $\exists F_{g(a)}$, a $g(a)$ pontban folytonos függvény, hogy $\forall y \in \mathcal{D}(f)$ esetén

$$f(y) - f(g(a)) = F_{g(a)}(y) \cdot (y - g(a)).$$

Legyen $x \in \mathcal{D}(f \circ g)$, ekkor az $y := g(x)$ jelöléssel a fenti két egyenlőségből következik:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) = f(g(x)) - f(g(a)) &= F_{g(a)}(g(x)) \cdot (g(x) - g(a)) \\ &= F_{g(a)}(g(x)) \cdot G_a(x) \cdot (x - a) \\ &= \left((F_{g(a)} \circ g) \cdot G_a\right)(x) \cdot (x - a). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. az 1.6. Tételt); $F_{g(a)}$ folytonos $g(a)$-ban, így a kompozíciófüggvény folytonosságára vonatkozó tétel szerint $F_{g(a)} \circ g$ folytonos a-ban. Mivel G_a folytonos a-ban, ezért a szorzatfüggvény folytonosságát felhasználva, az $\left(F_{g(a)} \circ g\right) \cdot G_a$ is folytonos az a pontban. Így az 1.4. Főtétel alapján (1.5) éppen azt jelenti, hogy $f \circ g$ differenciálható a-ban, sőt

$$(f \circ g)'(a) = \left((F_{g(a)} \circ g) \cdot G_a\right)(a) = F_{g(a)}(g(a)) \cdot G_a(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

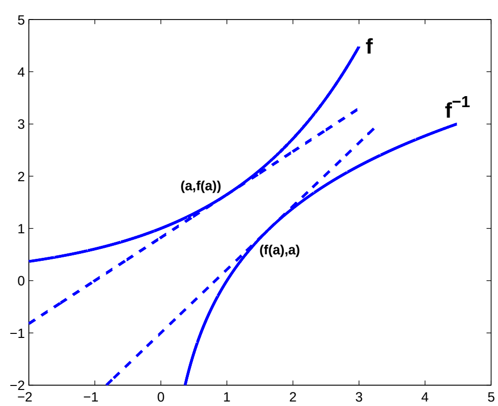
□

1.17. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Legyen $a \in I$, f differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$. Ekkor f^{-1} differenciálható a $b := f(a)$ pontban, és*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))},$$

másképp

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$



1.3. ábra.

Bizonyítás. A szigorú monotonitás miatt a folytonos f függvény injektív, így a folytonos függvény inverzéről szóló tétel miatt létezik az $f^{-1} : J \to I$ inverzfüggvény, ahol $\mathcal{D}(f^{-1}) = J$ is nyílt intervallum, tehát $b \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f^{-1})$. Az f^{-1} függvény b pontbeli differenciálhatóságához meg kell mutatni, hogy létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték (és ez valós szám).
Legyen $(y_n) \subset J,\ y_n \to b,\ y_n \neq b$ tetszőleges sorozat. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $x_n := f^{-1}(y_n)$. Az $(x_n) \subset I$ sorozat konvergens, és $\lim x_n = a$, mert az inverzfüggvény folytonosságáról szóló tétel és az átviteli elv szerint

$$y_n \to b \Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b), \text{ azaz } x_n \to a.$$

Továbbá $x_n \neq a$ is teljesül f^{-1} injektivitása miatt. Ezért

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \to \frac{1}{f'(a)},$$

hiszen $f'(a) \neq 0$. Mivel bármely $(y_n) \subset J,\ y_n \to b$ esetén az $\left(\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b}\right)$ konvergens, ezért a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték. Tehát f^{-1} differenciálható b-ben, és az is látható, hogy

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

1.4. Elemi függvények deriváltja

Nézzünk egy további példát. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3,\ x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^3 - x^3}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t - x)(t^2 + tx + x^2)}{t - x} = \lim_{t \to x} (t^2 + tx + x^2) = 3x^2,$$

tehát f differenciálható x-ben, és $f'(x) = 3x^2$, vagy röviden

$$(\mathrm{id}^3)' = 3 \cdot \mathrm{id}^2.$$

Az alábbiakban ezt 3 helyett általánosítjuk tetszőleges α kitevőre.

Nevezetes függvényderiváltak:

1. $(\mathrm{id}^\alpha)' = \alpha \cdot \mathrm{id}^{\alpha - 1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

   Bizonyítás. Mivel az id^α függvény csak a pozitív félegyenesen van értelmezve, ezért érvényes a következő átírás:

   $$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \cdot \ln x},$$

   ebből a kompozíciófüggvény deriválási szabálya alapján

   $$(x^\alpha)' = \mathrm{e}^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

   □

2. $\sin' = \cos$

   Bizonyítás.

$$\sin'(x) = \lim_{t\to x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{2\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x}\left(\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}}\cos\frac{t+x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

   Az átalakítás során a trigonometrikus függvények addíciós tételeinek egy következményét, valamint a cos függvény folytonosságát használtuk. Mivel $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$, ezért $t\to x$ esetén az $u := \frac{t-x}{2} \to 0$, így

$$\lim_{t\to x}\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = 1.$$

   □

3. $\cos' = -\sin$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

4. $\mathrm{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$

   Bizonyítás. A hányadosfüggvény deriválási szabályából:

$$\mathrm{tg}' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cdot\cos - \cos'\cdot\sin}{\cos^2} = \frac{\sin^2+\cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

   □

5. $\mathrm{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2}$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

6. $\exp_a' = \exp_a\cdot\ln a \quad (a>0)$, speciálisan: $\exp' = \exp$

   Bizonyítás. Előző félévben igazoltuk az alábbi nevezetes határértéket:

$$\exp_a'(x) = \lim_{t\to x}\frac{a^t - a^x}{t-x} = a^x\cdot\ln a = \exp_a(x)\cdot\ln a, \quad (a>0, a\neq 1).$$

   □

7. $\log_a' = \frac{1}{\mathrm{id}\cdot\ln a} \quad (a>0,\ a\neq 1)$, speciálisan: $\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}}$

   Bizonyítás. Előző félévben igazoltuk az alábbi nevezetes határértéket:

$$\log_a'(x) = \lim_{t\to x}\frac{\log_a t - \log_a x}{t-x} = \frac{1}{x\cdot\ln a} = \frac{1}{\mathrm{id}(x)\cdot\ln a}, \quad (a,c>0, a\neq 1).$$

   Vagy másképp: az inverz függvény deriválási szabálya alapján:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a x)} = \frac{1}{\exp_a(\log_a x)\cdot\ln a} = \frac{1}{x\cdot\ln a} = \frac{1}{\mathrm{id}(x)\cdot\ln a}.$$

   □

8. $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$

   Bizonyítás.
$$\mathrm{sh}'x = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)' - (\mathrm{e}^{-x})'}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x.$$
□

9. $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

10. $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$

   Bizonyítás. A hányadosfüggvény deriválási szabályából:
$$\mathrm{th}' = \left(\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\right)' = \frac{\mathrm{sh}' \cdot \mathrm{ch} - \mathrm{ch}' \cdot \mathrm{sh}}{\mathrm{ch}^2} = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}.$$
□

11. $\mathrm{cth}' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2}$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

12. $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1{,}1)$

   Bizonyítás. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$
   mivel $\cos|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} > 0$. □

13. $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1{,}1)$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

14. $\mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

   Bizonyítás. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:
$$\mathrm{arctg}' x = \frac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}\ x)} = \cos^2(\mathrm{arctg}\ x) = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\ x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$
□

15. $\mathrm{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

   Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

16. $\mathrm{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Bizonyítás. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

□

17. $\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$

    Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

18. $\operatorname{arth}' x = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1$

    Bizonyítás. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:

$$\operatorname{arth}' x = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{arth} x)} = \operatorname{ch}^2(\operatorname{arth} x) = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{arth} x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

□

19. $\operatorname{arcth}' x = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$

    Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent – HF. □

1.5. Lokális növekedés, fogyás és lokális szélsőérték

1.18. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan növő (fogyó) az a pontban*, ha $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy $\forall x_1 \in K(a),\ x_1 < a$ esetén $f(x_1) \le f(a)$ $(f(x_1) \ge f(a))$ és $\forall x_2 \in K(a),\ x_2 > a$ esetén $f(x_2) \ge f(a)$ $(f(x_2) \le f(a))$

1.19. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, és f az a pontban lokálisan növő (fogyó), akkor $f'(a) \ge 0$ $(f'(a) \le 0)$.*

Bizonyítás. A bizonyítást lokálisan növő esetre végezzük - a lokálisan fogyó eset hasonlóan meggondolható. Mivel f lokálisan nő az a-ban, ezért $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy $\forall x \in K(a),\ x \ne a$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$$

(ha $x < a$, akkor $x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \le 0$, míg $x > a$ esetén $x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \ge 0$).
Az f differenciálható a-ban, ezért

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0, \text{ azaz } f'(a) \ge 0.$$

□

1.20. Definíció. Az f függvény *szigorúan lokálisan növő (fogyó) a-ban*, ha $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy $\forall x_1, x_2 \in K(a),\ x_1 < a < x_2$ esetén $f(x_1) < f(a) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(a) > f(x_2))$.

Ha f differenciálható a-ban és szigorúan lokálisan nő az a-ban, akkor ugyan $\forall x \in K(a),\ x \ne a$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0,$$

de a határértékre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$$

mondható, így $f'(a) \ge 0$. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3$ a 0-ban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = (t^3)'_{|t=0} = 3t^2_{|t=0} = 0$.

1.21. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, és $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), akkor f szigorúan lokálisan növő (fogyó) az a pontban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f'(a) > 0$. Mivel f differenciálható a-ban, ezért az 1.4. Főtétel miatt $\exists F_a$ az a-ban folytonos függvény, hogy $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x - a)$.
$F_a(a) = f'(a) > 0$, ezért a folytonos függvény jeltartásáról szóló tétel miatt $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$ olyan, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $F_a(x) > 0$. Ezért $\forall x_1 \in K(a),\ x_1 < a$ esetén

$$f(x_1) - f(a) = F_a(x_1) \cdot (x_1 - a) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(a),$$

míg $\forall x_2 \in K(a),\ x_2 > a$ esetén

$$f(x_2) - f(a) = F_a(x_2) \cdot (x_2 - a) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(a).$$

Az $f'(a) < 0$ eset hasonlóan meggondolható. □

1.22. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban *lokális minimuma* van (vagy *a lokális minimumhelye f-nek*), ha $\exists K(a)$, hogy $\forall x \in K(a) \cap \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x) \geq f(a)$.
Szigorú lokális minimum akkor van, ha $\forall x \in K(a) \cap \mathcal{D}(f),\ x \neq a$ esetén $f(x) > f(a)$.
Értelemszerű változtatással kapjuk a *lokális maximum* (vagy *lokális maximumhely*) és a *szigorú lokális maximum* fogalmát.
A minimum és a maximum közös elnevezése a *szélsőérték*.

1.23. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, és az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $f'(a) \neq 0$ lenne (például $f'(a) > 0$), akkor f az a-ban szigorúan lokálisan növekedne, így nem lehetne lokális szélsőértéke a-ban. □

Vigyázat! A fenti tétel csak szükséges feltételt ad lokális szélsőérték létezésére, és nem megfordítható!

1.24. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvényt. Mivel $f'(x) = 3x^2$, ezért $f'(0) = 0$, de f-nek nincs lokális szélsőértéke a 0-ban.

1.6. Középértéktételek

1.25. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az $A \subset \mathcal{D}(f)$ halmazon* (jele $f \in D(A)$), ha $\forall a \in A$ esetén f differenciálható a-ban.

A fenti jelöléssel analóg módon jelentse $f \in C(A)$, hogy f folytonos a-ban minden $a \in A$ esetén.

1.26. Tétel (Rolle-tétel)**.** *Ha $f \in C[a, b],\ f \in D(a, b)$, és $f(a) = f(b)$, akkor $\exists c \in (a, b)$ olyan, hogy $f'(c) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $\forall x \in [a, b]$ esetén $f(x) = f(a) = f(b)$, azaz f konstansfüggvény, akkor például a $c := \frac{a+b}{2} \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$. (A c másként is választható!)
Ha $\exists x_0 \in (a, b)$, hogy $f(x_0) \neq f(a)$, akkor az $f \in C[a, b]$ miatt a Weierstrass-tétel szerint van minimuma és van maximuma is az f-nek, és legalább az egyiket nem az $[a, b]$ intervallum végpontjában veszi fel, hanem az intervallum belsejében. Legyen ez a pont c. Ekkor az 1.23. Tétel szerint $f'(c) = 0$. □

1.27. Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)**.** *Legyen $f, g \in C[a, b],\ \ f, g \in D(a, b)$, és tegyük fel, hogy $\forall x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists c \in (a, b)$ olyan, hogy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás. Ha $g(b) = g(a)$ lenne, akkor Rolle tétele miatt g' az (a, b) intervallum valamelyik pontjában 0 lenne, de ezt kizártuk. Így beszélhetünk az $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ hányadosról.
Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, és tekintsük a $\phi : [a, b] \to \mathbb{R},\ \phi(t) := f(t) - \lambda g(t)$ függvényt. Könnyű ellenőrizni, hogy $\lambda := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

esetén $\phi(a) = \phi(b)$. Továbbá $\phi \in C[a,b]$ és $\phi \in D(a,b)$. Így a Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy $\phi'(c) = 0$. Mivel $\phi'(t) := f'(t) - \lambda g'(t)$ $(t \in (a,b))$, ezért

$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

amelyből $g'(c) \neq 0$ miatt

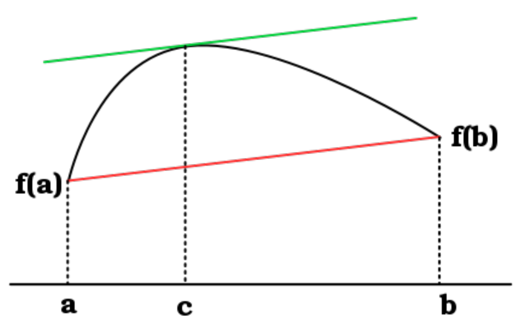
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

következik. □

1.28. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen* $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$. *Ekkor* $\exists c \in (a,b)$ *olyan, hogy*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt a $g(t) := t$ függvényre. □



1.4. ábra. Lagrange-féle középértéktétel

1.29. Tétel (Darboux-tétel)**.** *Legyen* I *nyílt intervallum,* $f \in D(I)$. *Ekkor az* f' *deriválfüggvény* Darboux-tulajdonságú*, vagyis bármely* $a, b \in I$, $a < b$ *esetén ha*

$$f'(a) < u < f'(b) \quad (\textit{vagy } f'(b) < u < f'(a)),$$

akkor létezik $c \in (a,b)$, *melyre* $f'(c) = u$.

Bizonyítás. Legyen $[a,b] \subset I$. Tegyük fel, hogy $f'(a) < u < f'(b)$. Tekintsük a

$$g : I \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - u \cdot x$$

függvényt! Nyilván $g \in C[a,b]$, ezért a Weierstrass-tétel szerint a g-nek van minimuma és van maximuma is az $[a,b]$ intervallumon. Megmutatjuk, hogy g-nek sem az a-ban, sem b-ben nincs minimuma. Ugyanis $g'(x) = f'(x) - u$, és

$$g'(a) = f'(a) - u < 0, \text{ ezért } g \text{ } a\text{-ban szigorúan lokálisan fogyó,}$$
$$g'(b) = f'(b) - u > 0, \text{ ezért } g \text{ } b\text{-ben szigorúan lokálisan nő.}$$

Ez azt jelenti, hogy g-nek az $[a,b]$ intervallum belsejében van a minimuma, azaz $\exists c \in (a,b)$, hogy g-nek c-ben lokális szélsőértéke van. Ekkor az 1.23. Tétel szerint $g'(c) = f'(c) - u = 0$, azaz $f'(c) = u$. □

1.7. A globális monotonitás szükséges és elégséges feltételei

1.30. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Ekkor f szigorúan monoton növő (fogyó) az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. Az 1.28. Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Ha $f'(c) > 0$, akkor $x_2 - x_1 > 0$ miatt $f(x_2) - f(x_1) > 0$, azaz $f(x_1) < f(x_2)$. Ha $f'(c) < 0$, akkor $x_2 - x_1 > 0$ miatt $f(x_2) - f(x_1) < 0$, azaz $f(x_1) > f(x_2)$. □

A fenti tétel csak elégséges feltételt ad differenciálható függvény szigorú monotonitására.

1.31. Példa. Tekintsük ismét az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvényt! Világos, hogy f szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, mégis $f'(0) = 0$.

Függvény (nem feltétlenül szigorú) monotonitásra adható szükséges és elégséges feltétel.

1.32. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) f monoton növő (fogyó) I-n;

(ii) minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha f monoton növő I-n, akkor tetszőleges $t, x \in I$, $t \neq x$ esetén

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Ezért bármely $x \in I$ pontra

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

A monoton fogyó eset hasonlóan látható.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Az előző tétel bizonyításával analóg módon igazolható az 1.28. Lagrange-féle középértéktétel segítségével. □

1.33. Definíció. Legyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(g)$. Ha létezik $\delta > 0$, hogy $g(a) = 0$, $g|_{(a-\delta,a)} \geq 0$ és $g|_{(a,a+\delta)} \leq 0$ vagy fordítva, akkor azt mondjuk, hogy g *előjelet vált a-ban.* Másképpen: g előjelet vált a-ban, ha $g(a) = 0$ és g lokálisan növő vagy fogyó a 0-ban.

1.34. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$ és $a \in I$. Ha f' előjelet vált a-ban, akkor f-nek lokális szélsőértéke van a-ban. Mégpedig, ha létezik $\delta > 0$, hogy $f'|_{(a-\delta,a)} \geq 0$ és $f'|_{(a,a+\delta)} \leq 0$, akkor a lokális maximumhely, ha $f'|_{(a-\delta,a)} \leq 0$ és $f'|_{(a,a+\delta)} \geq 0$, akkor a lokális minimumhely.*

Bizonyítás. Az előző tételből adódik. □

Az utóbbi állításhoz hasonló módon fogalmazható meg intervallumon differenciálható függvény szigorú lokális szélsőértékhelyére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel – ezt az olvasóra bízzuk.
A középértéktételek következménye az is, hogy intervallumon differenciálható függvény pontosan akkor konstans, ha deriválja 0.

1.35. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor ekvivalenesek:*

(i) Létezik $c^* \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = c^*$ azaz f konstans az I intervallumon.

(ii) Minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Triviális. $(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. Az 1.28. Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0,$$

azaz $f(x_1) = f(x_2)$.

□

1.36. *Megjegyzés.* A tétel intervallumon differenciálható függvényről szól. Például az $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 2, & \text{ha } 2 < x < 3 \end{cases}$$

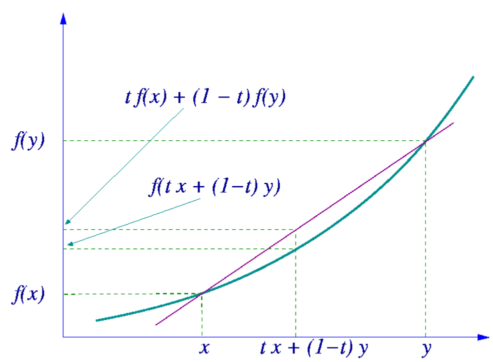
függvényre $\forall x \in (0,1) \cup (2,3)$ esetén $f'(x) = 0$, de a függvény mégsem konstansfüggvény.

1.8. Konvex és konkáv függvények

1.37. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *konvex függvény*, ha $\forall x, y \in I$ és $\forall t \in [0,1]$ esetén

$$f(tx + (1-t)y) \le t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$$

(ld. az 1.5. ábrát). Az f *konkáv függvény*, ha a $(-f)$ konvex, azaz az egyenlőtlenségben $\ge$ áll.



1.5. ábra. Konvex függvény

1.38. Feladat. Azt mondjuk, hogy f kielégíti a *Jensen-egyenlőtlenséget* I-n, ha

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Igazoljuk, hogy ha f kielégíti a Jensen-egyenlőtlenséget és folytonos I-n, akkor konvex I-n!

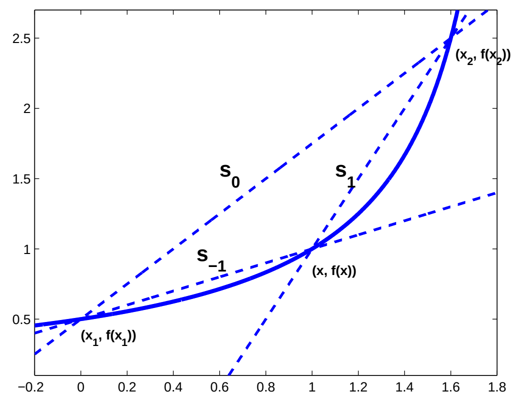
1.39. Definíció. Tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $x_1 < x_2$ esetén jelölje

$$\ell_{x_1,x_2}(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Az ℓ_{x_1,x_2} függvény grafikonja éppen az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon átmenő egyenes (az f egy *szelője*).

Az (1.6) jelöléssel világos, hogy f konvexitása éppen azt jelenti, hogy tetszőleges $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén

$$f(x) \le \ell_{x_1,x_2}(x), \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \tag{1.7}$$



1.6. ábra. Konvex függvény s_{-1}, s_0, s_1 meredekségű szelői

1.40. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) f konvex (konkáv) I-n;

(ii) f' monoton növő (fogyó) I-n.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ tetszőleges.
A megfelelő szelők meredekségeiről könnyen látható (ld. az 1.6. ábrát), hogy

$$s_{-1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le s_0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le s_1 = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Ebből $x \to x_1$ ill. $x \to x_2$ határátmenetet véve kapjuk, hogy

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2) \Longrightarrow f'(x_1) \le f'(x_2),$$

tehát f' monoton növő.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy f' monoton növő, és legyenek adva $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A fenti (1.6) definícióból jelölje az egyszerűség kedvéért

$$\ell := \ell_{x_1,x_2}.$$

Vezessük be az $r : I \to \mathbb{R}$,

$$r := f - \ell$$

függvényt! Az (1.7) alapján azt kell megmutatni, hogy

$$r(x) \le 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2] \tag{1.8}$$

Nyilván $r \in D(I)$,

$$r(x_1) = f(x_1) - \ell(x_1) = 0 \text{ és } r(x_2) = f(x_2) - \ell(x_2) = 0,$$

ezért az 1.26. Rolle-tétel szerint

$$\exists c \in (x_1, x_2) : r'(c) = 0.$$

Mivel $\forall x \in I$ esetén

$$r'(x) = f'(x) - \ell'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ezért f' monoton növekedéséből következik, hogy a tőle egy konstansban különböző r' is monoton növő. Mivel $r'(c) = 0$, ezért

$\forall x \in (x_1, c)$ esetén $r'(x) \le 0$

$\forall x \in (c, x_2)$ esetén $r'(x) \geq 0$.

Ez azt jelenti, hogy az r függvény az (x_1, c) intervallumon fogyó, a (c, x_2) intervallumon pedig növő. Figyelembe véve, hogy $r(x_1) = r(x_2) = 0$, kapjuk, hogy $\forall x \in [x_1, x_2]$ esetén $r(x) \leq 0$. Ez éppen (1.8), tehát az f konvex az I intervallumon. □

Meggondolható, hogy a fenti feltételek bármelyike ekvivalens azzal, hogy az f függvény érintője minden pontban a függvény grafikonján vagy alatta helyezkedik el (ld. az 1.5. ábrát).

1.41. Feladat. Igazoljuk, hogy ha f konvex az I *nyílt* intervallumon, akkor folytonos is I-n, továbbá megszámlálható sok pont kivételével differenciálható I-ben!

1.42. Definíció. Legyen I nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az $a \in I$ pontban, ha f differenciálható az a egy környezetében és az ott létező f' differenciálható a-ban – vagyis $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f')$ és f' differenciálható a-ban. f *kétszer differenciálható* az I intervallumon, ha $f \in D(I)$ és $f' \in D(I)$. Jele: $f \in D^2(I)$.

1.43. Tétel. *Legyen $f \in D^2(I)$. Ekkor ekvivalensek:*

1. *f konvex (konkáv) I-n;*
2. *$\forall x \in I$ esetén $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$).*

Bizonyítás. Az 1.32. és az 1.40. Tételből következik. □

1.44. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy f differenciálható a-ban. Azt mondjuk, hogy az a pont az f függvénynek *inflexiós pontja* (vagy f-nek *inflexiója* van a-ban), ha létezik $\delta > 0$ olyan, hogy $f|_{(a-\delta,a]}$ konvex és $f|_{[a,a+\delta)}$ konkáv, vagy fordítva. Vagyis röviden, ha f differenciálható a-ban és f az a-ban *konvexitást vált.*

1.45. *Megjegyzés.* Sok tankönyvben a fenti definíció helyett az áll, hogy az a pont inflexiós pontja f-nek, ha f differenciálható a-ban, és a függvény grafikonja az a pont előtt és után a pontbeli érintő ellentétes oldalán helyezkedik el. Könnyen meggondolható, hogy az általunk kimondott definíció ennek egy speciális esete.

1.46. Tétel. *Legyen $f \in D(I)$ és f kétszer differenciálható az $a \in I$ pontban. Ha az a az f függvénynek inflexiós pontja, akkor $f''(a) = 0$.*

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy $f''(a) \neq 0$, például $f''(a) > 0$. Ekkor az 1.21. Tétel szerint f' szigorúan lokálisan növő a-ban. Ebből következik, hogy nem lehet, hogy f' az a pont egyik oldali környezetében monoton nő, a másikban monoton fogy, vagyis az 1.40. Tétel miatt f-nek nem lehet inflexiója a-ban. Ez ellentmondás, tehát $f''(a) = 0$. □

1.47. Tétel. *Legyen $f \in D^2(I)$, $a \in I$. Ekkor ekvivalensek:*

(i) f-nek az a pont inflexiós pontja;

(ii) f'' előjelet vált a-ban.

Bizonyítás. A definíciók, valamit az előző és az 1.43. Tétel következménye. □

Megjegyezzük, hogy ha az f függvény egy I intervallumon elsőfokú polinom, azaz $\exists A, B \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = Ax + B$, akkor f konvex és konkáv is az I bármely részintervallumán, ezért az I intervallum minden pontjában inflexiója van az f függvénynek.
A második derivált előjele a szélsőértékhely létezésére ad szükséges és elégséges feltételt.

1.48. Tétel. *Legyen $f \in D(I)$ és f kétszer differenciálható az $a \in I$ pontban. Tegyük fel, hogy $f'(a) = 0$. Ha $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), akkor f-nek lokális minimuma (maximuma) van a-ban.*

Bizonyítás. Legyen $f''(a) > 0$. Az 1.21. Tétel szerint f' szigorúan lokálisan növő a-ban. Mivel $f'(a) = 0$, ezért

$$\exists \delta > 0, \text{ hogy } f'|_{(a-\delta,a)} < 0 \text{ és } f'|_{(a,a+\delta)} > 0.$$

Tehát az 1.30. Tétel miatt f az a ponttól balra szigorúan monoton fogyó, jobbra szigorúan monoton növő – így lokális minimuma van a-ban. Az $f''(a) < 0$ eset hasonlóan meggondolható. □

Hogyan használhatjuk az eddigi eredményeket differenciálható függvények menetének vizsgálatához? Érdemes a gyakorlatokon konkrét feladatok megoldásában végigkövetni az alábbi lépéseket!

1. Elkészítjük az f' deriváltfüggvényt.
2. Megkeressük az f' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f' előjelet válthat).
3. Kiszámítjuk az f'' második deriváltat.
4. Megkeressük az f'' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f'' előjelet válthat).
5. A függvény értelmezési tartományát az f', az f'' zérushelyei (illetve lehetséges előjelváltási helyei) nyílt intervallumokra szabdalják. Ezeken az intervallumokon megállapítjuk a deriváltak előjelét, amiből a monotonitási és alaki viszonyokra következtetünk (kétszer folytonosan differenciálható függvény esetén). Áttekinthetővé válik a vizsgálat egy táblázat elkészítésével.
6. Néhány támpontot kiszámolunk. Ha vannak, kiszámoljuk a lokális maximum és minimum értékeit, a függvény határértékét (esetleg jobb oldali és bal oldali határértékét) minden olyan pontban, amely az értelmezési tartomány olyan torlódási pontja, amelyben nincs értelmezve a függvény.
7. Vázoljuk a függvény menetét.

1.9. Taylor-polinom, Taylor-formula

1.9.1. Motiváció

Láttuk egy függvény első és második deriváltjának szerepét. Ezek általánosításaként vezessük be a magasabb rendű deriváltakat.

1.49. Definíció. Ha f' differenciálható a-ban, akkor $f''(a) := (f')'(a)$.
Ha f'' differenciálható a-ban, akkor $f''' := (f'')'(a)$.
$\vdots$
Ha $f^{(k)}$ differenciálható a-ban, akkor $f^{(k+1)}(a) := (f^{(k)})'(a),\ k = 1,2,\ldots$. Ily módon definiálhatók a megfelelő $f^{(k)}$ deriváltfüggvények is, $k = 1,2,\ldots$
Megjegyezzük, hogy vesszőkkel csak az első három deriváltat szoktuk jelölni, tehát $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := = f'''$. Néha az $f^{(0)} := f$ megállapodás is hasznos.
Azt mondjuk, hogy f *akárhányszor differenciálható a-ban* (vagy *végtelen sokszor differenciálható* a-ban), ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik $f^{(k)}(a)$.

Az „elég sima” függvényeket jól közelíthetjük polinomokkal. Azt már láttuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor az (1.2) egyenletű

$$e_a(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

érintőre

$$e_a(a) = f(a);$$

továbbá $e'_a(x) = f'(a)$, így $e'_a(a) = f'(a)$, azaz az e_a-nak és az f-nek az a-beli deriváltja is megegyezik.
Látható az is, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - e_a(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a) \cdot (x - a))}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0,$$

ami azt fejezi ki, hogy az e_a érintőfüggvény olyan közelítése az f függvénynek, hogy ha az $f(x) - e_a(x)$ különbséget $(x - a)$-val elosztjuk, még ez a hányados is 0-hoz közeli, ha x közel van az a-hoz.

Az e_a érintőfüggvény csak egy legfeljebb elsőfokú polinom (egyenes egyenlete). Milyen legyen az a magasabb fokú polinom, amely a még pontosabb közelítést lehetővé teszi?

Legyen $P(x) := 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3$. Ekkor $P(0) = 3$.

$$\begin{aligned} P'(x) &= -2 + 8x - 15x^2, & P'(0) &= -2, \\ P''(x) &= 8 - 30x, & P''(0) &= 8, \\ P'''(x) &= -30, & P'''(0) &= -30. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3,$$

azaz egy polinomot igen jól közelítettünk (ebben az esetben pontosan előállítottunk) egy olyan polinommal, amelynek együtthatói a függvény magasabbrendű deriváltjai egy pontban (most ez a pont a 0 volt), elosztva a derivált rendjének faktoriálisaival.

1.9.2. Taylor-polinom és Taylor-formula

1.50. Definíció. Legyen f az a pontban n-szer differenciálható függvény. Definiálja $T_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T^f_{n,a}(x) = T_{n,a}(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \tag{1.9}$$

az f *függvény a ponthoz tartozó n. Taylor-polinomját*. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$T_{n,a}(a) = f(a),\ T'_{n,a}(a) = f'(a),\ T''_{n,a}(a) = f''(a), \ldots, T^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a). \tag{1.10}$$

Továbbá, $T_{1,a} = e_a$.

1.51. Feladat. Tegyük fel, hogy egy legfeljebb n-edfokú p polinomra

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ p''(a) = f''(a), \ldots, p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor $p = T_{n,a}$!

A következő tétel segítségével meg lehet becsülni, hogy az n-ed fokú Taylor-polinom mennyire jól közelíti a függvényt.

1.52. Tétel (Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \subset \mathcal{D}(f)$, hogy f $n+1$-szer differenciálható $K(a)$-ban. Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $c = c(x)$ az a és az x között, hogy*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}. \tag{1.11}$$

Bizonyítás. Legyenek $r, p : K(a) \to \mathbb{R}$ az alábbi módon definiálva:

$$\begin{aligned} r(t) &:= f(t) - T_{n,a}(t), \\ p(t) &:= (t - a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Az (1.10)-ből, valamint egyszerű számolással következik, hogy

$$\begin{aligned} r(a) = r'(a) = r''(a) = \cdots = r^{(n)}(a) = 0, \\ p(a) = p'(a) = p''(a) = \cdots = p^{(n)}(a) = 0. \end{aligned}$$

Másrészt $t \neq a$ esetén $p(t) \neq 0$,

$$\begin{aligned} p'(t) &= (n+1) \cdot (t - a)^n \neq 0, \\ p''(t) &= (n+1) \cdot n \cdot (t - a)^{n-1} \neq 0, \\ &\vdots \\ p^{(n)}(t) &= (n+1)! \cdot (t - a) \neq 0, \\ p^{(n+1)}(t) &= (n+1)!\,. \end{aligned}$$

Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $x > a$. Alkalmazzuk az 1.27. Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumon az r és p függvényekre! Mivel $t \in (a, x)$ esetén $p'(t) \neq 0$, azért $\exists c_1 \in (a, x)$ olyan, hogy

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{r(x) - r(a)}{p(x) - p(a)} = \frac{r'(c_1)}{p'(c_1)}. \tag{1.12}$$

Ismét az 1.27. Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva az $[a, c_1]$ intervallumon az r' és p' függvényekre azt kapjuk, hogy $\exists c_2 \in (a, c_1)$ olyan, hogy

$$\frac{r'(c_1)}{p'(c_1)} = \frac{r'(c_1) - r'(a)}{p'(c_1) - p'(a)} = \frac{r''(c_2)}{p''(c_2)}. \tag{1.13}$$

Ezt a lépést még $(n-1)$-szer alkalmazva, az utolsó esetben $\exists c_{n+1} \in (a, c_n)$ olyan, hogy

$$\frac{r^{(n)}(c_n)}{p^{(n)}(c_n)} = \frac{r^{(n)}(c_n) - r^{(n)}(a)}{p^{(n)}(c_n) - p^{(n)}(a)} = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}. \tag{1.14}$$

(Nyilván $T_{n,a}$ legfeljebb n-edfokú polinom, ezért $T_{n,a}^{(n+1)}$ már azonosan 0.)
Összefoglalva az (1.12)–(1.14) lépéseket:

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{r'(c_1)}{p'(c_1)} = \ldots = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

ezért a $c := c_{n+1} \in (a, x)$ választással

$$f(x) - T_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ami éppen (1.11). □

1.53. Következmény. *Ha a fenti tétel feltételei mellett még azt is feltesszük, hogy $f^{(n+1)}$ korlátos $K(a)$-n, akkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Bizonyítás. A tétel szerint létezik $c = c(x)$, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) \to 0,\ x \to a,$$

felhasználva $f^{(n+1)}$ korlátosságát. □

1.54. *Megjegyzés.* Az előbbi következmény akkor is igaz, ha f-ről csak annyit teszünk fel, hogy n-szer differenciálható a-ban. Ekkor a bizonyítás nehezebb.

1.55. Következmény. *Legyen $\mathcal{D}(f) = I$ intervallum, f akárhányszor differenciálható az I intervallum belsejében, valamint legyen $a, x \in \operatorname{int} I$ rögzítve. Ha található $K = K(x) \geq 0$, hogy minden y számra a és x között*

$$\left| f^{(n)}(y) \right| \leq K(x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

akkor

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_{n,a}(x) = \lim_{n \to \infty} \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bizonyítás. A feltétel szerint az (1.11) Taylor-formula maradéktagjára minden rögzített x esetén

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \to 0,\ n \to \infty$$

teljesül, felhasználva, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből az állítás adódik. □

1.56. Definíció. A fenti tételben kapott
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.15}$$
végtelen sort az adott f függvény *a pont körüli Taylor-sor*ának nevezzük.

A következőkben megadjuk a legfontosabb elemi függvények Taylor-sorát.

1.57. Tétel. *A következő sorfejtések érvényesek az $a = 0$ pont körül:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n && -1 < x < 1,\\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && x \in \mathbb{R},\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && x \in \mathbb{R},\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} && x \in \mathbb{R},\\
\mathrm{sh}\ x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && x \in \mathbb{R},\\
\mathrm{ch}\ x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Az $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenlőség $|x| < 1$ esetén a tanult mértani sorösszegből következik. Másrészt könnyen látható, hogy
$$\left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-\mathrm{id})^{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)}(0) = n!\,,$$
tehát a sor valóban egy (1.15) alakú Taylor-sor.
Ellenőrizzük most az együtthatók helyességét a többi függvény esetén!

$$\begin{aligned}
\exp^{(n)}(0) &= e^0 = 1,\\
\sin^{(n)}(0) &= \begin{cases} \sin 0 = 0, & n = 4k;\\ \cos 0 = 1, & n = 4k+1;\\ -\sin 0 = 0, & n = 4k+2;\\ -\cos 0 = -1, & n = 4k+3, \end{cases}\\
\cos^{(n)}(0) &= \begin{cases} \cos 0 = 1, & n = 4k;\\ -\sin 0 = 0, & n = 4k+1;\\ -\cos 0 = -1, & n = 4k+2;\\ \sin 0 = 0, & n = 4k+3, \end{cases}\\
\mathrm{sh}^{(n)}(0) &= \begin{cases} \mathrm{sh}\ 0 = 0, & n = 2k;\\ \mathrm{ch}\ 0 = 1, & n = 2k+1, \end{cases}\\
\mathrm{ch}^{(n)}(0) &= \begin{cases} \mathrm{ch}\ 0 = 1, & n = 2k;\\ \mathrm{sh}\ 0 = 0, & n = 2k+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ebből a Taylor-sorok alakja adódik - csak a konvergencia maradt kérdéses. Ennek igazolására az 1.55. Következmény teljesülését fogjuk megmutatni a fenti függvényekre. Legyen $a = 0$ és x rögzítve az adott függvények értelmezési tartományából. Ekkor a 0 és x közé eső minden y esetén

$$\begin{aligned} |\exp^{(n)}(y)| &= \mathrm{e}^y \le \mathrm{e}^{|x|} =: K, \\ |\sin^{(n)}(y)| &\le 1 =: K, \\ |\cos^{(n)}(y)| &\le 1 =: K, \\ |\mathrm{sh}^{(n)}(y)| &\le \mathrm{ch}(x) =: K, \\ |\mathrm{ch}^{(n)}(y)| &\le \mathrm{ch}(x) =: K. \end{aligned}$$

□

1.10. L'Hospital-szabály

A L'Hospital-szabály a „$\frac{0}{0}$" és a „$\frac{\infty}{\infty}$" alakú függvényhatárértékek kiszámításához ad segítséget.

1.58. Tétel (L'Hospital-szabály)**.** *Legyen $f, g \in D(\alpha, \beta)$ (ahol $\alpha, \beta = \pm\infty$ is lehet). Legyen $a \in [\alpha, \beta]$. Tegyük fel, hogy*

$$\lim_a f = \lim_a g = 0$$

vagy

$$\lim_a g = +\infty \text{ vagy } -\infty.$$

Ekkor ha létezik $\lim_a \frac{f'}{g'}$, akkor létezik $\lim_a \frac{f}{g}$ is, és

$$\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Abban a speciális esetben végezzük el a bizonyítást, amikor $a \in (\alpha, \beta),\ f(a) = g(a) = 0$. Jelölje

$$\lim_a \frac{f'}{g'} =: L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a határérték definíciója szerint $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in K_\delta(a) \subset (\alpha, \beta),\ x \neq a$ esetén

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in K_\varepsilon(L).$$

Legyen $x \in K_\delta(a)$ tetszőleges, $x \neq a$. Az f és g függvényekre az 1.27. Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva $[a, x]$-en (vagy $[x, a]$-n) kapjuk, hogy $\exists c \in K_\delta(a)$ az a és x között, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Így

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in K_\varepsilon(L)$$

is teljesül, amiből a határérték definíciója alapján következik, hogy

$$\lim_a \frac{f}{g} = L.$$

□

1.59. Példa. A L'Hospital-szabállyal számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$$

határértéket. Mind a számláló, mind a nevező 0-ban 0, ezért a deriváltak hányadosának a határértékét elég kiszámítani.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 3x)'}{(x^2)'}&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\\&=-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4.\end{aligned}$$

Így

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4.$$

A deriváltak hányadosának határértékét szintén számolhattuk volna a L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+9\cos 3x}{2}=\frac{-1+9}{2}=4.$$

Ez az okoskodás azonban „farkába harapó kígyó"-jellegű, hiszen a sin deriváltjának meghatározásakor (ld. a 9. oldalt) éppen a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ nevezetes határértéket használtuk fel (amit az előző félévben igazoltunk)...

Sajnos, még a L'Hospital szabályok sem tudnak minden „kritikus" határérték-feladatra könnyű választ adni.

1.60. Példa. Mennyi a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(x+2)}{\operatorname{sh}(x-2)}$$

határérték?

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x-2)=+\infty.$$

Ha a deriváltakat nézzük, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{ch}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{ch}(x-2)=+\infty,$$

ha ezek deriváltjait vizsgáljuk, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{sh}(x-2)=+\infty,$$

és így tovább. Tehát nem kapjuk meg a határértéket a L'Hospital szabály alkalmazásával.
Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(x+2)}{\operatorname{sh}(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x+2}-\mathrm{e}^{-(x+2)}}{\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}^{-(x-2)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{2}-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^{-2}-\frac{\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}^{2x}}}=\mathrm{e}^4,$$

amit akár a deriváltak hányadosainak határértékéből is kiszámíthattuk volna...

Második fejezet

Integrálszámítás

2.1. Riemann-integrál

2.1.1. A Riemann-integrál definíciója

A Riemann-integrál lényege: „a függvény grafikonja és a vízszintes tengely által határolt síkidom területe”.

A terület matematikai fogalma: olyan $T : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ függvény, ahol $\mathcal{M}$ a sík mérhető részhalmazait jelöli, és a következő axiómák teljesülnek:

Terület-axiómák.

1. Ha H téglalap, oldalhosszai a és b, akkor $H \in \mathcal{M}$ és $T(H) = a \cdot b$;

2. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$ és $H_1 \subseteq H_2$, akkor $T(H_1) \leq T(H_2)$ (monotonitás);

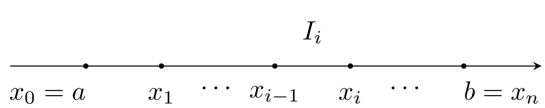
3. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$, és van olyan e egyenes, hogy az e által határolt félsíkok egyike tartalmazza H_1-et, másika H_2-t, akkor $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{M}$ és $T(H_1 \cup H_2) = T(H_1) + T(H_2)$;

4. Ha a sík egy B részhalmaza teljesíti a következő feltételt: minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $A, C \in \mathcal{M}$ halmazok, hogy $A \subseteq B \subseteq C$ és $T(C) - T(A) < \varepsilon$, akkor $B \in \mathcal{M}$.

2.1. Definíció. Legyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum, és válasszunk valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén x_i, $i = 0, \ldots, n$ *osztópontok*at az alábbi módon:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b.$$

Az $[a, b]$ intervallum egy *felosztása* a $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ véges intervallumrendszer, ahol $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}[a, b]$.



2.1. ábra. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztása

2.2. Definíció. Legyen a $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$ és $\Psi \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztások *egyesítése* (vagy *közös finomítása*) az a $\Phi \vee \Psi$-vel jelölt felosztás, melyet úgy kapunk, hogy Φ osztópontjaihoz hozzávesszük a Ψ osztópontjait (vagy fordítva), és az így kapott új osztóponthalmazhoz tartozó intervallumrendszert tekintjük.

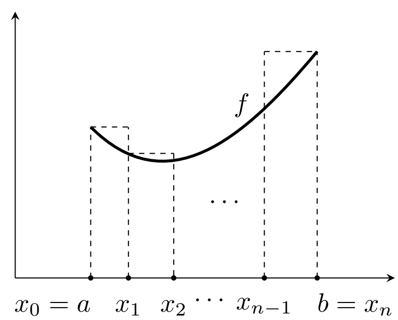
2.3. Definíció. Adott $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás esetén definiálja a Φ felosztáshoz tartozó *alsó közelítőösszeget*

$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

felső közelítőösszeget

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

ahol $|I_i| := x_i - x_{i-1}$ az I_i intervallum hossza.



2.2. ábra. Egy felső közelítőösszeg

2.4. Állítás. *Tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén*

$$S_f(\Phi) = -s_{-f}(\Phi).$$

Bizonyítás. $\sup_{I_i} f = -\inf_{I_i}(-f)$. □

2.5. *Megjegyzés.* Világos, hogy tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Phi).$$

Bizonyítás. Minden i esetén $\inf_{I_i} f \le \sup_{I_i} f$. □

2.6. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor bármely $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztások esetén*

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Psi). \tag{2.1}$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bármely $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztások esetén

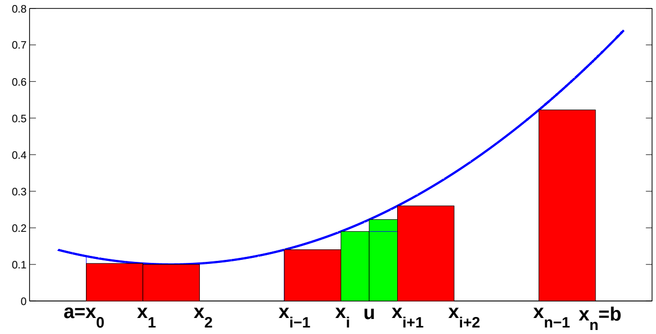
$$s_f(\Phi) \le s_f(\Phi \vee \Psi) \le S_f(\Phi \vee \Psi) \le S_f(\Psi), \tag{2.2}$$

amiből (2.1) nyilván következik. A 2. egyenlőtlenség a 2.5. Megjegyzés alapján nyilvánvaló. A következőkben azt bizonyítjuk, hogy ha $\Theta \in \mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy EGY új osztópontot hozzáveszünk, akkor

$$s_f(\Phi) \le s_f(\Theta). \tag{2.3}$$

Ebből az osztópontok számára vonatkozó teljes indukcióval következik az első egyenlőtlenség (2.2)-ben. A 3. egyenlőtlenség bizonyításához pedig alkalmazzuk ezt f helyett a $-f$ függvényre, és használjuk fel a 2.4. Állítást, amiből

$$S_f(\Phi \vee \Psi) \le S_f(\Psi) \Longleftrightarrow s_{-f}(\Phi \vee \Psi) \ge s_{-f}(\Psi).$$



2.3. ábra. Az u osztópont hozzávételével változó alsó közelítőösszeg

Legyen tehát $\Theta \in \mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy annak x_i és x_{i+1} osztópontjai közé felveszünk még egy u osztópontot, vagyis Θ osztópontjai

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < u < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

A (2.3) egyenlőtlenség két oldaláról az azonos tagokat elhagyva azt kell belátnunk, hogy

$$\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \le \left(\inf_{[x_i,u]} f\right) \cdot (u - x_i) + \left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - u).$$

Mivel $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \le \inf_{[x_i,u]} f$ és $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \le \inf_{[u,x_{i+1}]} f$ (kisebb halmazon vett infimum nagyobb vagy egyenlő, mint a nagyobb halmazon vett), ezért

$$\begin{aligned}\left(\inf_{[x_i,u]} f\right) \cdot (u - x_i) + \left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - u) &\ge \left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right) \cdot ((u - x_i) + (x_{i+1} - u)) \\ &= \left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - x_i),\end{aligned}$$

így az állítást beláttuk. □

2.7. Következmény. *A*

$$\{s_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b]\} \;\; \textit{és} \;\; \{S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b]\}$$

halmazok közül a bal oldali halmaz minden eleme *kisebb vagy egyenlő a jobb oldali halmaz* minden eleménél. *Ebből az is következik, hogy az első halmaz felülről, a második alulról korlátos.*

2.8. Definíció. Definiálja az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény *Darboux-féle alsó integrálját*

$$\int_{*a}^{b} f := \sup\{s_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b]\}, \tag{2.4}$$

és *Darboux-féle felső integrálját*

$$\int_{a}^{*b} f := \inf\{S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b]\}. \tag{2.5}$$

A 2.7. Következmény alapján

$$\int_{*a}^{b} f \le \int_{a}^{*b} f. \tag{2.6}$$

2.9. Definíció. Egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt *Riemann-integrálható*nak mondunk, ha

$$\int_{*a}^{b} f = \int_{a}^{*b} f.$$

Ha f Riemann-integrálható, akkor az alsó és felső Darboux-integrálok közös értékét f *Riemann-integráljának* nevezzük, és az alábbi módon jelöljük:

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x)\,dx.$$

2.10. Példa. A Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható [0,1]-en.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy bármely $\Phi \in \mathcal{F}[0,1]$ esetén

$$s_D(\Phi) = 0 \text{ és } S_D(\Phi) = 1,$$

tehát

$$\int_{*0}^{1} D = 0 < \int_{0}^{*1} D = 1.$$

□

2.11. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény Riemann-integrálható [0,1]-en és

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Bizonyítás. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen a Φ_n felosztás az az intervallumrendszer, amit a

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

osztópontok határoznak meg. Ekkor

$$s_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3},$$

$$S_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3},$$

tehát $s_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$ és $S_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$, ha $n \to \infty$. Ebből könnyen látható, hogy $f(x) = x^2$ Riemann-integrálható [0,1]-en, és Riemann-integrálja $\frac{1}{3}$. □

2.12. Példa. A c-vel jelöl konstans c függvény Riemann-integrálható tetszőleges $[a,b]$-n, és

$$\int_a^b c = c\cdot(b-a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén $s_c(\Phi) = S_c(\Phi) = c\cdot(b-a)$, amiből az állítás adódik. □

Világos, hogy kevés, csak nagyon speciális függvénynek tudjuk a fenti módon kiszámítani a Riemann-integrálját. Ezért szükségünk lesz a Riemann-integrálhatóság egy jól használható kritériumára.
A továbbiakban jelölje

$$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ Riemann-integrálható}\}.$$

A kritérium megfogalmazásához vezessük be egy függvény adott felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének fogalmát!

2.13. Definíció. Ha $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, akkor az

$$\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f \right) \cdot |I_i|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_i\}) \cdot |I_i| = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|$$

számot az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összeg*ének nevezzük. Az

$$\omega_f(I_i) = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f = \sup \{f(x) - f(y) : x, y \in I_i\}$$

az f függvény *oszcillációja* az I_i intervallumon.

2.14. Állítás. *Ha $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges felosztások, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\Omega_f(\Phi \vee \Psi) \leq \Omega_f(\Phi).$$

Bizonyítás. A (2.2) egyelőtlenségből következik. □

2.15. Tétel (Leghasznosabb kritérium Riemann-integrálhatóságra)**.** *Egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, vagyis $f \in R[a,b]$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\Phi = \Phi(\varepsilon) \in$ $\in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. 1. irány: Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható, és legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 2.9. Definíció szerint tudjuk, hogy

$$\int_{*a}^{b} f = \int_{a}^{*b} f = \int_a^b f.$$

A 2.8. Definíció alapján létezik olyan $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$s_f(\Phi_1) > \int_{*a}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2},$$

és létezik $\Phi_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$S_f(\Phi_2) < \int_{a}^{*b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezekből, a (2.2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_{*a}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2} < s_f(\Phi_1) \leq s_f(\Phi_1 \vee \Phi_2) \leq S_f(\Phi_1 \vee \Phi_2)$$
$$\leq S_f(\Phi_2) < \int_{a}^{*b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből $\Phi := \Phi_1 \vee \Phi_2$ választással

$$\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \int\limits_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\int\limits_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

2. irány: Tegyük fel indirekt, hogy a tétel állításában szereplő feltétel teljesül minden pozitív ε-ra, de

$$\int\limits_{*a}^{b} f < \int\limits_a^{b*} f.$$

Legyen

$$\varepsilon := \int\limits_a^{b*} f - \int\limits_{*a}^{b} f > 0,$$

és válasszunk ε-hoz $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást úgy, hogy $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Ekkor

$$s_f(\Phi) \le \int\limits_{*a}^{b} f < \int\limits_a^{b*} f \le S_f(\Phi) = s_f(\Phi) + \Omega_f(\Phi) < s_f(\Phi) + \varepsilon.$$

Ebből viszont

$$\varepsilon = s_f(\Phi) + \varepsilon - s_f(\Phi) > \int\limits_a^{b*} f - \int\limits_{*a}^{b} f,$$

ami ellentmondás. □

Most nézzük meg, mi volt Riemann eredeti definíciója a fenti integrálfogalomra! A definíció bizonyos értelemben hasonlítani fog a mi „leghasznosabb kritériumunkhoz”.

Mese: Az integrálhatóság Riemann-féle eredeti definíciója

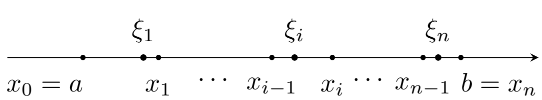
2.16. Definíció. Ha $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$ egy felosztás, akkor definiálja Φ *finomságát*

$$|\Phi| := \max\{|I_i| : i = 1, \ldots, n\}.$$

2.17. Definíció. Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ felosztás, és $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, a Φ *felosztásra illeszkedő vektor*, vagyis

$$\xi_i \in I_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

jelölésben: $\xi \propto \Phi$.



2.4. ábra. Felosztásra illeszkedő vektor

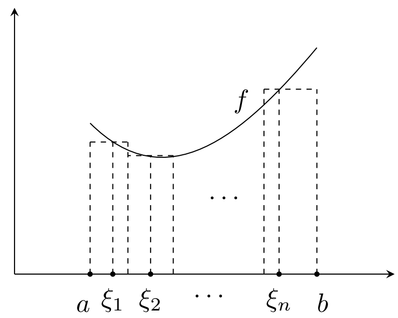
Ekkor a

$$\sigma_f(\Phi, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

számot az f függvény (Φ, ξ) párhoz tartozó *Riemann-összegé*nek nevezzük.

2.18. *Megjegyzés.* Tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ és $\xi \propto \Phi$ vektor esetén

$$s_f(\Phi) \le \sigma_f(\Phi, \xi) \le S_f(\Phi).$$



2.5. ábra. Egy Riemann-összeg

2.19. Definíció (Az integrálhatóság Riemann-féle kritériuma)**.** Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-n* és $\int_a^b f = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$, $|\Phi| < \delta$ felosztás, és minden $\xi \propto \Phi$ esetén

$$|\sigma_f(\Phi, \xi) - A| < \varepsilon.$$

2.20. *Megjegyzés.* A definícióból következik f korlátossága. $[a, b]$-n.

A Heine-tétel felhasználásával látható be, hogy minden folytonos függvény Riemann-integrálható.

2.21. Tétel. *$C[a, b] \subset R[a, b]$, vagyis minden, az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C[a, b]$. A 2.15. Tétel integrálhatósági feltételét fogjuk használni, tehát legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és keresünk hozzá olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztást, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. A Heine-tétel alapján f egyenletesen is folytonos $[a, b]$-n, tehát az $\varepsilon/(b - a)$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $t, s \in [a, b]$, $|t - s| < \delta$, akkor $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/(2(b - a))$. Válasszunk egy olyan Φ felosztást, melynek finomsága kisebb, mint δ, vagyis $|\Phi| < \delta$. Például, legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\frac{b-a}{n} < \delta$ és a Φ felosztás osztópontjait definiálja

$$x_i := a + i \cdot \frac{b - a}{n},\ i = 0, \dots, n.$$

Ekkor az $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ intervallumban bármely két szám különbsége legfeljebb $\frac{b-a}{n} < \delta$, így itt a függvény oszcillációja

$$\omega_f(I_i) = \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in I_i\} \le \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b - a)}.$$

Erre a felosztásra tehát

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i| \le \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b - a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

2.22. *Megjegyzés.* A fenti tétel megfordítása nem igaz! Tehát nem minden Riemann-integrálható függvény folytonos. Könnyen meggondolható, hogy ha egy $[a, b]$-n folytonos függvényt egy pontban „elrontunk” úgy, hogy ott ne legyen folytonos, akkor Riemann-integrálható marad (pl.a 2.15. Leghasznosabb kritérium segítségével meggondolható). Hasonlóan, ha véges sok pontban szakad egy függvény, akkor is Riemann-integrálható.

2.23. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, mely megszámlálhatóan végtelen sok pont kivételével folytonos, akkor f Riemann-integrálható $[a, b]$-n!

2.24. Tétel. *Ha $f \in R[a, b]$, akkor $|f| \in R[a, b]$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in R[a,b]$ és $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 2.15. Tétel alapján ε-hoz létezik olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\Omega_{|f|}(\Phi) \le \Omega_f(\Phi) < \varepsilon$ is teljesül. Mivel adott Φ felosztás esetén

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|,$$

ezért elég belátni, hogy minden i-re

$$\omega_{|f|}(I_i) \le \omega_f(I_i).$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $x, y \in I_i$ esetén

$$|f(x)| - |f(y)| \le |f(x) - f(y)| \le \omega_f(I_i),$$

amiből

$$\omega_{|f|}(I_i) = \sup\{|f(x)| - |f(y)| : x, y \in I_i\} \le \omega_f(I_i).$$

□

2.25. Állítás. *Legyen $f \in R[a,b]$, $a \le \alpha < \beta \le b$. Ekkor $f|_{[\alpha,\beta]} \in R[\alpha,\beta]$.*

Bizonyítás. A 2.15. Tétel szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Véve ezen felosztás $[\alpha,\beta]$ intervallumba eső osztópontjait és az így kapott $\Psi \in \mathcal{F}[\alpha,\beta]$ felosztást kapjuk, hogy

$$\Omega_{f|_{[\alpha,\beta]}}(\Psi) \le \Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

□

2.26. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f \cdot g \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve, és a 2.15. Tétel alapján keresünk hozzá $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást. Definiáljuk

$$K := \max\{\sup_{[a,b]} |f|, \sup_{[a,b]} |g|\},$$

és válasszunk $\frac{\varepsilon}{2K}$-hoz $\Phi_f, \Phi_g \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokat, melyekre

$$\Omega_f(\Phi_f) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi_g) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

(Ha $K = 0$, az érdektelen eset.) Tekintsük ezen felosztások egyesítését:

$$\Phi := \Phi_f \vee \Phi_g.$$

Ekkor a 2.14. Állítás alapján

$$\Omega_f(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K}$$

is teljesül. Legyen $I_i \in \Phi$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $x, y \in I_i$ esetén

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\le |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \\ &\le K \cdot \omega_g(I_i) + \omega_f(I_i) \cdot K = K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)).\end{aligned}$$

Ebből

$$\omega_{f \cdot g}(I_i) = \sup\{|f(x)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in I_i\} \le K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)).$$

Összegezve $i = 1, \ldots, n$-re kapjuk

$$\begin{aligned}\Omega_{f \cdot g}(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_{f \cdot g}(I_i) \cdot |I_i| \le \sum_{i=1}^{n} K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) \cdot |I_i| \\ &= K \cdot \Omega_g(\Phi) + K \cdot \Omega_f(\Phi) < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

2.1.2. A Riemann-integrál tulajdonságai

2.27. Állítás. *$R[a,b]$ vektortér $\mathbb{R}$ felett a szokásos függvényműveletekre nézve.*

Bizonyítás. Legyen $f, g \in R[a,b]$. Megmutatjuk, hogy ekkor $(f+g) \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{2.7}$$

Mivel bármely $I_i \subset [a,b]$ esetén

$$\inf_{I_i} f + \inf_{I_i} g \leq \inf_{I_i}(f+g) \text{ és } \sup_{I_i}(f+g) \leq \sup_{I_i} f + \sup_{I_i} g,$$

ezért tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra

$$s_f(\Phi) + s_g(\Phi) \leq s_{f+g}(\Phi) \text{ és } S_{f+g}(\Phi) \leq S_f(\Phi) + S_g(\Phi).$$

Legyenek most $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges felosztások. A fentiekből és a (2.2) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s_f(\Phi) + s_g(\Psi) \leq s_f(\Phi \vee \Psi) + s_g(\Phi \vee \Psi) \leq s_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \leq \\ \leq S_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi \vee \Psi) + S_g(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi) + S_g(\Psi). \end{aligned}$$

A bal oldalon véve először Φ-ben, majd Ψ-ben supremumot, a jobb oldalon pedig infimumot, kapjuk, hogy

$$\int_{*a}^b f + \int_{*a}^b g \leq \int_{*a}^b (f+g) \leq \int_a^{*b} (f+g) \leq \int_a^{*b} f + \int_a^{*b} g.$$

Mivel az egyenlőtlenségsorozat két vége megegyezik, ezért következik, hogy $(f+g) \in R[a,b]$ és (2.7) teljesül.
Legyen most $f \in R[a,b]$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy ekkor $(c \cdot f) \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \int_a^b f. \tag{2.8}$$

Könnyen látható, hogy tetszőleges $c > 0$, $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot s_f(\Phi) \text{ és } S_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot S_f(\Phi),$$

amiből az állítás mindkét része adódik. Negatív c esetén

$$s_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot S_f(\Phi) \text{ és } S_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot s_f(\Phi),$$

amiből

$$\int_{*a}^b (c \cdot f) = \sup\{s_{c \cdot f}(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b]\} = \sup\{c \cdot S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b]\} = c \cdot \inf\{S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b]\} = c \cdot \int_a^b f,$$

és ugyanígy

$$\int_a^{*b} (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f.$$

Tehát az állítás ekkor is következik. □

2.28. Állítás (Intervallum szerinti additivitás)**.** *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény,* $a < c < b$*. Tegyük fel, hogy* $f|_{[a,c]} \in R[a,c]$ *és* $f|_{[c,b]} \in R[c,b]$*. Ekkor* $f \in R[a,b]$*, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{2.9}$$

Bizonyítás. Mivel f korlátos $[a,c]$-n és $[c,b]$-n, ezért korlátos $[a,b]$-n is. Véve tetszőleges $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ és $\Phi_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ felosztásokat, az ezekhez tartozó részintervallumok rendszereinek egyesítéséből kapunk egy $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást. Könnyen látható, hogy

$$s_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + s_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2) = s_f(\Phi) \leq \int_{*a}^b f \text{ és } \int_a^{*b} f \leq S_f(\Phi) = S_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + S_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2).$$

Az összes $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ ill. $\Phi_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ felosztásra vett supremumra ill. infimumra kapjuk, hogy

$$\int_{*a}^c f + \int_{*c}^b f \leq \int_{*a}^b f \leq \int_a^{*b} f \leq \int_a^{*c} f + \int_c^{*b} f.$$

A feltétel szerint az egyenlőtlenségsorozat két vége megegyezik, amiből $f \in R[a,b]$ és (2.9) adódik. □

2.29. Állítás (Integrandus szerinti monotonitás)**.** *Legyenek* $f, g \in R[a,b]$ *függvények, és tegyük fel, hogy minden* $x \in [a,b]$ *esetén* $f(x) \leq g(x)$*. Ekkor*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \leq s_g(\Phi),$$

amiből

$$\int_a^b f = \int_{*a}^b f \leq \int_{*a}^b g = \int_a^b g.$$

□

2.30. Következmény. *Bármely* $f \in R[a,b]$ *függvényre fennáll:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Minden $x \in [a,b]$ esetén

$$(-|f|)(x) = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = |f|(x),$$

amiből az állítás a 2.29. Állítás szerint következik. □

2.31. Állítás (Integrál triviális becslése)**.** *Legyen* $f \in R[a,b]$*. Ekkor*

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás azonnal adódik a 2.29. Állításnak az $\inf f$ konstans függvény és f ill. f és a $\sup f$ konstans függvényre való alkalmazásából. Másképp meggondolva: a $\Phi = \{I_1\}$ felosztásra, ahol $I_1 = [a, b]$

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b - a) = s_f(\Phi), \quad (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b - a) = S_f(\Phi)$$

– az állítás ebből is következik. □

2.32. Következmény. *Legyen $f \in R[a, b]$. Ekkor*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \cdot (b - a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható a 2.30. Következmény és a 2.31. Állítás alapján. □

Ezen becslések segítségével (folytonos függvényekre) bizonyítható a differenciálszámításban megismert középérték-tétel analógja Riemann-integrálra.

2.33. Tétel (Integrálszámítás középértéktétele)**.** *Legyen $f \in C[a, b]$. Ekkor létezik olyan $c \in [a, b]$, melyre*

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b - a).$$

Bizonyítás. A 2.31. Állítás alapján és a Weierstrass-tételből kapjuk

$$\min_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f \leq \frac{\int_a^b f}{b - a} \leq \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f.$$

A Bolzano-tétel miatt van olyan $c \in [a, b]$, melyre

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b - a},$$

amivel az állítást beláttuk. □

2.2. Primitív függvény

Ebben a fejezetben legyen I nyílt intervallum. Jelölje $C(I)$ az I intervallumon értelmezett folytonos függvények halmazát és $D(I)$ az I intervallumon differenciálható függvények halmazát. Ezek $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. Jelölje $D'(I)$ az $D(I)$-beli függvények deriváltjainak halmazát:

$$D'(I) := \{F' : F \in D(I)\}.$$

2.34. Állítás. *$D'(I)$ is vektortér.*

Bizonyítás. Házi feladat. □

2.35. *Megjegyzés.* $C(I)$ és $D(I)$ nem csak vektortér, hanem gyűrű, sőt algebra is (a szokásos műveletekkel). $D'(I)$ nem alkot sem gyűrűt sem algebrát.

2.36. Definíció. Legyen $f \in D'(I)$ adott függvény, azaz létezik olyan $F \in D(I)$, hogy $F' = f$. Ekkor minden ilyen $F \in D(I)$ függvényt az f függvény *primitív* (elsődleges vagy eredeti) *függvényé*nek vagy *határozatlan integrálj*ának nevezünk.

2.37. Állítás. *Ha $f \in D'(I)$ és $F \in D(I)$ egy primitív függvénye, akkor bármely c konstansfüggvény esetén*

$$(F + c)' = f,$$

így f-nek végtelen sok primitív függvénye van.

Bizonyítás. Triviális. □

2.38. Állítás. *Ha F az f egy primitív függvénye, akkor f-nek minden más G primitív függvénye előáll $G = F + c$ alakban valamely c konstansfüggvényre.*

Bizonyítás. Az állítás feltételeiből következik, hogy

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0,$$

vagyis $(F - G)' = 0$ az egész I intervallumon. Ekkor az 1.35. Állítás alapján $F - G$ konstansfüggvény, és ezt akartuk belátni. □

2.39. Definíció. Adott f függvény esetén jelölje

$$\int f$$

(„integrál" f) az f függvény primitív függvényeinek halmazát I-n. Ha $f \notin D'(I)$, akkor $\int f = \emptyset$. Ha $f \in D'(I)$, akkor láttuk, hogy $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$. Ha nem okoz félreértést, akkor $\int f$ minden elemét is az egyszerűség kedvéért $\int f$-fel jelöljük, tehát

$$\left(\int f\right)' = f.$$

Szokásosak még az $\int f(x)$ és $\int f(x)\,dx$ jelölések is a primitív függvény x pontbeli helyettesítési értékére.

2.40. Példa. Legyen $I = \mathbb{R}$. Ekkor $\int \cos x\,dx = \{\sin x + c : c \in \mathbb{R}\}$.

Alapintegrálok: ld. gyakorlatokon.

Probléma. Hogyan lehet felismerni egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényről, hogy van-e primitív függvénye I-ben, vagyis $f \in$ $\in D'(I)$?

Válasz. Sehogy! De adható szükséges és adható elégséges feltétel.

2.41. Tétel (Szükséges feltétel primitív függvény létezésére)**.** *Ha $f \in D'(I)$, akkor f Darboux-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Ld. az 1.29. Tételt: egy függvény deriváltfüggvénye Darboux-tulajdonságú. □

2.42. Tétel (Elegendő feltétel primitív függvény létezésére)**.** *$C(I) \subset D'(I)$, azaz ha f folytonos I-n, akkor f-nek létezik I-ben primitív függvénye.*

2.43. *Megjegyzés.* Attól, hogy van, nem biztos, hogy számolással megadható...

Bizonyítás. Később. □

2.44. Példa. $\frac{1}{\ln x}$ az $I = (1, +\infty)$-en, e^{-x^2} az $I = \mathbb{R}$-en. Belátható, hogy nincs elemi primitív függvényük.

A primitív függvény-keresés vagy határozatlan integrálás tulajdonképpen egy számolási technika (kalkulusnak is hívják), lényegében a differenciálás műveletének megfordítása.

2.45. Állítás (Vektortér-tulajdonság)**.**

1. *Ha $f, g \in D'(I)$, akkor $f + g \in D'(I)$, emellett*

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

2. Ha $f \in D'(I)$, $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandó, akkor $c \cdot f \in D'(I)$ (vektortér-tulajdonság), emellett

$$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f.$$

Bizonyítás. Házi feladat. □

2.46. Tétel (Parciális integrálás elve)**.** *Legyenek f és g differenciálhatók az I intervallumban, azaz $f, g \in D(I)$, és tegyük fel, hogy $f \cdot g' \in D'(I)$. Ekkor $f' \cdot g \in D'(I)$, és ez utóbbi (egy) primitív függvénye:*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás. Kell: $(f \cdot g - \int f \cdot g') \in D(I)$ – ez triviális, és $(f \cdot g - \int f \cdot g')' = f' \cdot g$, mivel

$$\left(f \cdot g - \int f \cdot g' \right)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f \cdot g' = f' \cdot g.$$

□

2.47. Példa.

$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x.$$

2.48. Tétel (Helyettesítéses integrálás elve)**.** *Legyenek I és I^* tetszőleges (nyílt) intervallumok, $f \in D'(I)$, $g \in$ $\in D(I^*)$ adott függvények, úgy, hogy $\mathcal{R}(g) \subset I$. Ekkor $(f \circ g) \cdot g' \in D'(I^*)$, és*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f \right) \circ g.$$

Bizonyítás. Legyen $F := \int f$, tehát $F \in D(I)$ és $F' = f$. Ismeretes, hogy ekkor $F \circ g$ is differenciálható I^*-ban, és

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Így $F \circ g = \left(\int f\right) \circ g = \int (f \circ g) \cdot g'$. □

2.49. *Megjegyzés.* A gyakorlatban $g : I^* \to I$ bijektív függvényt érdemes választani, mert ekkor

$$\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1},$$

vagyis az eredeti primitív függvény meghatározható.
Klasszikus formalizmus.

$$\int f(x) \, dx \mid_{x=g(t)} = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt, \quad \frac{dx}{dt} = g'(t)$$

2.50. Példa. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$ kiszámítása az $I = (-1,1)$ intervallumon. Helyettesítsünk $x := \sin t$-t, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =: I^*$. Ekkor $\frac{dx}{dt} = \sin' t = \cos t$. Így

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} \, dx \mid_{x=\sin t} &= \int \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 t}}_{f(g(t)) = \sqrt{\cos^2 t}} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'(t)} \, dt = \int |\cos t| \cdot \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt \\ &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{1}{2} \int 1 \, dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t \, dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} (t + \sin t \cdot \cos t) \, . \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2} (t + \sin t \cdot \cos t) \mid_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2} \left(t + \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) \mid_{t=\arcsin x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1 - x^2} \right). \end{aligned}$$

2.3. Primitív függvény és Riemann-integrál kapcsolata

2.3.1. A Newton-Leibniz tétel

A következőkben kiderül, hogy mi a primitív függvény és a Riemann-integrál kapcsolata. Ez a XVII-XVIII. században élt Newton és Leibniz munkásságának, egyben a differenciál- és integrálszámításnak legfontosabb eredménye.

2.51. Tétel (Newton-Leibniz tétel)**.** *Legyen I nyílt intervallum, $f \in D'(I)$, $[a,b] \subset I$ és $f \in R[a,b]$. Ekkor f minden F primitív függvényére*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F]_a^b = F|_a^b.$$

Bizonyítás. Mivel f két primitív függvénye csak konstansfüggvényben térhet el, a jobb oldal független F választásától. Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. Ha Φ osztópontjainak halmaza $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, akkor $F|_{[x_{i-1},x_i]}$-re alkalmazva az 1.28. Lagrange-középértéktételt létezik olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, melyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Összegezve $i = 1, \ldots, n$-re

$$\sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Nyilvánvalóan

$$s_f(\Phi) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) \leq S_f(\Phi),$$

(hol középen egy Riemann-összeg áll, ld. a 2.17. Definíciót). Mivel $f \in R[a,b]$, ezért a fentiekből kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = \int_{*a}^{b} f \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^{b*} f = \int_a^b f,$$

amiből

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

és ezt akartuk belátni. □

A Newton-Leibniz tétel feltételeit teljesítő függvényekre bizonyíthatók a primitív függvényeknél megismert parciális és helyetettesítéses integrálás szabályai.

2.52. Tétel (Parciális integrálás Riemann-integrálra)**.** *Tegyük fel, hogy az f és g függvények kielégítik a Newton-Leibniz tétel feltételeit $[a,b]$-n, és legyen (egy) primitív függvényük F ill. G. Ekkor $f \cdot G$, $F \cdot g \in R[a,b]$, és*

$$\int_a^b f \cdot G = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b F \cdot g.$$

Bizonyítás. Mivel F és G differenciálhatók, így folytonosak, tehát Riemann-integrálhatók is $[a,b]$-n, ld. 2.21. Tétel. A 2.26. Tétel alapján pedig a szorzatok Riemann-integráljai is léteznek. Mivel

$$(F \cdot G)' = f \cdot G + F \cdot g,$$

ezért a 2.51. Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_a^b (f \cdot G + F \cdot g) = [F \cdot G]_a^b.$$

A 2.27. Állítás szerint a fenti egyenlőség bal oldalára

$$\int_a^b (f \cdot G + F \cdot g) = \int_a^b f \cdot G + \int_a^b F \cdot g,$$

amivel a bizonyítás teljes. □

Jelölés. $f \in R[a,b]$ esetén jelölje

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

2.53. Tétel (Helyettesítéses integrálás Riemann-integrálra)**.** *Tegyük fel, hogy f kielégíti a Newton-Leibniz tétel feltételeit $[a,b]$-n. Legyen továbbá $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ (az $[\alpha,\beta]$-nál egy kicsit bővebb intervallumon) differenciálható bijekció, melyre $(f \circ g) \cdot g' \in R[\alpha,\beta]$. Ekkor*

$$\int_a^b f = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f \circ g) \cdot g'.$$

Bizonyítás. A feltételekből azonnal következik, hogy g vagy szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton fogyó, tehát $g^{-1}(a) = \alpha$, $g^{-1}(b) = \beta$, vagy fordítva. Mivel a f tetszőleges F primitív függvényére

$$(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g',$$

ezért a 2.51. Newton-Leibniz tétel szerint

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g) \cdot g' = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \begin{cases} F(b) - F(a), & \text{ha } g \text{ monoton növő;} \\ F(a) - F(b), & \text{ha } g \text{ monoton fogyó.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Másrészt, szintén a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Ha g monoton növő, a tétel azonnal következik; ha monoton fogyó, a (2.10) egyenlőség mindkét oldalának ellentettjét véve kész a bizonyítás. □

2.3.2. Integrálfüggvények

2.54. Definíció. Legyen I tetszőleges intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan integrálható I-n*, ha

$$f|_{[a,b]} \in R[a,b]$$

minden $[a,b] \subset I$ esetén. Az I-n lokálisan integrálható függvények halmazát jelölje $R^{loc}(I)$.

2.55. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy ha $I = [a,b]$, akkor $R^{loc}[a,b] = R[a,b]$.

Egy lokálisan integrálható függvénynek definiálhatjuk az I-n értelmezett ún. integrálfüggvényeit.

2.56. Definíció. Ha $f \in R^{loc}(I)$,akkor f *integrálfüggvényei* az I-n értelmezett

$$I \ni x \mapsto c + \int_a^x f$$

alakú függvények, ahol $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$.

2.57. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy egy adott f függvény bármely két integrálfüggvénye csak konstansfüggvényben különbözik egymástól. Ugyanis, ha

$$F_1(x) = c_1 + \int_a^x f, \quad F_2(x) = c_2 + \int_b^x f, \quad x \in I$$

valamely $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ és $a, b \in I$ számokra, akkor

$$(F_2 - F_1)(x) = c_2 - c_1 + \int_b^a f, \quad x \in I$$

konstansfüggvény.

2.58. Tétel. *Legyen I nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in R^{loc}(I) \cap D'(I)$ – vagyis f kielégíti a Newton-Leibniz-tétel feltételeit tetszőleges $[a, b] \subset I$ esetén. Ekkor f primitív függvényeinek $\int f$ halmaza megegyezik f integrálfüggvényeinek halmazával. Ez azt is jelenti, hogy ekkor f integrálfüggvényei differenciálhatók, és deriváltjuk éppen f.*

Bizonyítás. Legyen F a f egy primitív függvénye I-n, vagyis $F' = f$. Ekkor a 2.51. Newton-Leibniz tétel szerint bármely $a, x \in I$ esetén

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)$$

(a képlet igaz $x < a$ esetén is!), tehát F az f egy integrálfüggvénye $c := F(a)$ választással.
Fordítva, legyen

$$F(x) := c + \int_a^x f, \quad x \in I$$

a f egy integrálfüggvénye. Rögzítsük f egy F_0 primitív függvényét – ez a feltétel alapján létezik. A 2.51. Newton-Leibniz tétel alapján

$$F(x) - c = \int_a^x f = F_0(x) - F_0(a),$$

amiből $F(x) = F_0(x) + d$, $d = c - F_0(a)$, tehát F is primitív függvénye f-nek. □

Annak idején a 2.42. Tételt, vagyis hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, bizonyítás nélkül mondtuk ki. Most elérkeztünk oda, hogy ezt a tételt igazoljuk. Mivel egy I nyílt intervallumon folytonos függvény lokálisan integrálható is (ld. a 2.21. Tételt), a most belátott tétel alapján primitív függvénye csak integrálfüggvénye lehet, és innen a bizonyítás könnyen adódik.

2.59. Tétel. *Legyen I nyílt intervallum, $f \in R^{loc}(I)$. Ha f folytonos az $u \in I$ helyen, akkor f bármely F integrálfüggvénye differenciálható u-ban, és deriváltja*

$$F'(u) = f(u).$$

Bizonyítás. Legyen

$$F(x) = c + \int_a^x f, \quad x \in I$$

az f egy integrálfüggvénye valamely $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$ esetén. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in I$, $|x-u| < \delta$, $x \neq u$, akkor

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x - u} - f(u) \right| \leq \varepsilon.$$

Ebből már következik, hogy

$$\lim_{x \to u} \frac{F(x) - F(u)}{x - u} = F'(u) = f(u).$$

Mivel f folytonos u-ban, ezért ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in I$, $|x-u| < \delta$, akkor $|f(x) - f(u)| < < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ez a δ jó lesz. Legyen $x \in I$, $|x-u| < \delta$, $x \neq u$ rögzítve. A F függvény definíciója és a 2.28. Állítás szerint

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x - u} - f(u) \right| = \left| \frac{1}{x-u} \int_u^x f(t)\,dt - \frac{1}{x-u} \int_u^x f(u)\,dt \right| = \left| \frac{1}{x-u} \int_u^x (f(t) - f(u))\,dt \right|$$

A 2.32. Következményből kapjuk, hogy

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x - u} - f(u) \right| \leq \sup\{|f(t) - f(u)| : t \in [u, x]\} \leq \varepsilon.$$

□

2.60. Következmény. *Ha $f \in C(I)$, akkor f-nek van primitív függvénye I-n, éspedig bármely integrálfüggvénye az.*

Bizonyítás. Ha $f \in C(I)$, akkor $f \in R^{loc}(I)$, ld. a 2.21. Tételt. Így az előző tétel alapján tetszőleges F integrálfüggvényére $F' = f$ adódik I-n. □

2.61. Alkalmazás. Riemann-integrálás alkalmazásával igazolható az ún. *Wallis-formula*:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right]^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Bizonyítás. Laczkovich-T. Sós: Analízis II. 13.11. és 13.12. Tételek. □

A kövekező tételek pontos bizonyítása megtalálható a Laczkovich-T. Sós: Analízis II. 14. fejezetében, de vizsgára csak kimondani kell tudni őket, a bizonyítást nem kérem.

2.62. Tétel. *Ha $f \geq 0$ és $f \in R[a,b]$, akkor az*

$$A_f := \{(x,y) : x \in [a,b],\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területe (a 2.1.1. pontban bevezetett Terület-axiómák alapján) $T(A_f) = \int_a^b f$.

2.63. Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazt *normáltartomány*nak nevezzük, ha

$$A = \{(x,y) : x \in [a,b], f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

ahol $f, g \in R[a,b]$ és $f \leq g$ az $[a,b]$-n.

2.64. Tétel. *Az előbbiekben definiált normáltartomány területe*

$$T(A) = \int_a^b (g - f).$$

2.65. Tétel. *Ha $f \geq 0$ és $f \in R[a,b]$, akkor az f*

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$$

grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott A forgástest térfogata

$$V(A) = \pi \int_a^b f^2.$$

2.66. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor az f grafikonjának ívhossza*

$$|\Gamma(f)| = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

2.4. Improprius integrál

Ki szeretnénk terjeszteni a Riemann-integrál fogalmát nyílt, félig nyílt és nem korlátos intervallumokra. Ehhez szükségünk lesz a 2.54. és a 2.56. Definíciókra.

2.67. Definíció. Legyen I tetszőleges nemelfajuló intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *impropriusan integrálható I-n,* ha $f \in R^{loc}(I)$ és f-nek létezik olyan F integrálfüggvénye I-n, melyre

$$\exists \lim_{\inf I + 0} F \in \overline{\mathbb{R}} \text{ és } \exists \lim_{\sup I - 0} F \in \overline{\mathbb{R}},$$

és a két határérték nem azonos előjelű végtelen(!). Ekkor f *improprius integrálja* I-n:

$$\int_I f := \int_{\inf I}^{\sup I} f = \lim_{\sup I - 0} F - \lim_{\inf I + 0} F.$$

Ha f impropriusan integrálható és improprius integrálja véges, akkor azt is szokták mondani, hogy f *improprius integrálja konvergens,* minden más esetben pedig *divergens.*

2.68. *Megjegyzés.* A fenti definíció a 2.57. Megjegyzés alapján független F választásától.

2.69. *Megjegyzés.* Legyen $I = [a,b)$ alakú, ahol $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ha $f \in R^{loc}(I)$, akkor

$$F(x) := \int_a^x f$$

választással meggondolható, hogy f pontosan akkor impropriusan integrálható I-n, ha a

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f$$

határérték létezik.
Hasonlóan, ha $I = (a,b]$ alakú valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f pontosan akkor impropriusan integrálható I-n, ha a

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f$$

határérték létezik.

2.70. Példa.

$I := [0, +\infty),\ f : I \to \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{e}^{-t}$

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = \lim_{x\to\infty} \left(-\mathrm{e}^{-x} + 1\right) = 1.$$

2.71. Példa. $I := [1, +\infty),\ f : I \to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{t^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right) = +\infty, \quad 0 < \alpha < 1$$

2.72. Példa. $I := (0,1],\ f : I \to \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{t^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+} [\ln t]_x^1 = \lim_{x\to 0+} (-\ln x) = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = +\infty, \quad \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Könnyen meggondolható az alábbi.

2.73. Állítás. *Ha az* $\int_a^{+\infty} f$ *improprius integrál konvergens és létezik* $\lim_{+\infty} f$*, akkor szükségképpen* $\lim_{+\infty} f = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\lim_{+\infty} f = A > 0$ és véges (az $A < 0$ eset hasonlóan meggondolható). Ekkor a határérték definíciója alapján létezik olyan $a < K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > K$, akkor $f(x) > \frac{A}{2}$. Így tetszőleges $x > K$ esetén

$$\int_a^x f = \int_a^K f + \int_K^x f > \int_a^K f + \frac{A}{2} \cdot (x - K) \to \infty, \quad x \to \infty,$$

vagyis $\int_a^{+\infty} f$ nem lehet konvergens, ami ellentmondás.
Ha $\lim_{+\infty} f = +\infty$ volna, akkor tetszőleges $A > 0$ valós számhoz létezik a fenti tulajdonságú K, így az ellentmondás szintén adódik. A $\lim_{+\infty} f = -\infty$ esete hasonlóan meggondolható. □

2.74. Feladat. Adjunk példát olyan f függvényre, melyre $\int_a^{+\infty} f$ improprius integrál konvergens és $\lim_{+\infty} f$ nem létezik!

A következőkben improprius integrálok konvergenciájára vonatkozó feltételekkel foglalkozunk. A gyakorlatban ugyanis gyakran csak a konvergencia meglétére van szükségünk, az integrál pontos értékére – ami általában nehezen is számolható –, nem.
Ismételjük át a függvényhatárértékre tanult ún. Cauchy-kritériumot (ld. előző féléves jegyzet 4.9. Tételt)!

2.75. Tétel (Függvény határértékére vonatkozó Cauchy-kritérium). *Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}(F)'$. Ekkor F-nek pontosan akkor van* véges *határértéke az x_0 helyen, ha a következő feltétel teljesül: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x, y \in \dot{K}_\delta(x_0) \cap \mathcal{D}(F)$ esetén*

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

A fenti tétel segítségével adhatunk egy szükséges és elégséges feltételt az improprius integrál konvergenciájára.

2.76. Tétel (Cauchy-féle szükséges és elégséges feltétel improprius integrálhatóságra). *Legyen I nemelfajuló intervallum, $f \in R^{loc}(I)$. Ekkor f improprius integrálja pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $a, b \in I$, $\inf I < a \le b < \sup I$ számok, hogy*

$$\left| \int_u^v f \right| < \varepsilon, \text{ ha } \inf I < u < v < a \text{ vagy } b < u < v < \sup I.$$

Bizonyítás. Következik abból, hogy ha F tetszőleges integrálfüggvénye f-nek I-n, akkor

$$\int_u^v f = F(v) - F(u).$$

Alkalmazzuk az előbbi tételt F-nek a $\sup I$-beli bal oldali és $\inf I$-beli jobb oldali (véges) határértékére! □

2.77. Példa.

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Parciális integrálással kapjuk:

$$\int_u^v \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_u^v - \int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$$

Ebből

$$\begin{aligned}
\left|\int_u^v \frac{\sin t}{t}\, dt\right| &= \left|\frac{-\cos v}{v} + \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\, dt\right| \\
&\le \left|\frac{-\cos v}{v}\right| + \left|\frac{\cos u}{u}\right| + \int_u^v \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt \le \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{t^2}\, dt \\
&\le \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \left[-\frac{1}{t}\right]_u^v = \frac{2}{u} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

ha $\frac{2}{\varepsilon} < u < v$. Így f improprius integrálja konvergens $[1, +\infty)$-n.

Most a végtelen numerikus sorokkal kapcsolatban tanult összehasonlító kritérium analógja következik.

2.78. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyen $f \in R^{loc}(I)$. Tegyük fel, hogy léteznek $\alpha, \beta \in I$, $\inf I < \alpha \le \beta <$ $< \sup I$ számok és*

$$g_1 : I \cap (-\infty, \alpha] \to [0, +\infty),\ g_2 : I \cap [\beta, +\infty) \to [0, +\infty)$$

függvények, melyek improprius integrálja konvergens, és majorálják f-et, vagyis

$$\forall x \in D(g_1) : |f(x)| \le g_1(x) \text{ és } \forall x \in D(g_2) : |f(x)| \le g_2(x).$$

Ekkor f improprius integrálja is konvergens.

Bizonyítás. A fenti 2.76. Tétel szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek $a, b \in \mathbb{R}$, $\inf I < a < \alpha$ és $\beta < b < \sup I$ számok, hogy

$$\int_u^v g_1 = \left| \int_u^v g_1 \right| < \varepsilon, \text{ ha } \inf I < u < v < a,$$

és

$$\int_u^v g_2 = \left| \int_u^v g_2 \right| < \varepsilon, \text{ ha } b < u < v < \sup I.$$

Ebből a 2.29. Állítás és a 2.30. Következmény alapján $\inf I < u < v < a$ esetén

$$\left| \int_u^v f \right| \leq \int_u^v |f| \leq \int_u^v g_1 < \varepsilon,$$

és $b < u < v < \sup I$ esetén

$$\left| \int_u^v f \right| \leq \int_u^v |f| \leq \int_u^v g_2 < \varepsilon.$$

Így az állítás a 2.76. Tételből következik f-re. □

2.79. Példa.

$$f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1] : \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{x}, \; \forall x \in [1, +\infty) : \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$$

Ezért a 2.70. Példa alapján f improprius integrálja konvergens $(-\infty, +\infty)$-en.

2.80. Következmény. *Ha $f \in R^{loc}(I)$ és $|f|$ improprius integrálja konvergens I-n, akkor f improprius integrálja is konvergens.*

Bizonyítás. Mivel $f \in R^{loc}(I)$, ezért $|f| \in R^{loc}(I)$ is teljesül, ld. a 2.24. Tételt. Alkalmazzuk a fenti 2.78. Tételt tetszőleges $\alpha, \beta \in I$, $\inf I < \alpha \leq \beta < \sup I$ számokra és

$$g_1 := |f| \,|_{\, I \cap (-\infty, \alpha]} \text{ és } g_2 := |f| \,|_{\, I \cap [\beta, +\infty)}$$

függvényekre. □

A következőkben azt gondoljuk meg, hogy az improprius integrálhatóság és végtelen sorok konvergenciája hogyan kapcsolható össze.

2.81. Tétel (Végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó integrál-kritérium)**.** *Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú végtelen sor, amelyre $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$. Legyen $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ olyan monoton fogyó függvény, melyre $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor a*

$$\sum a_n \textit{ sor és az } \int_1^{+\infty} f \textit{ improprius integrál}$$

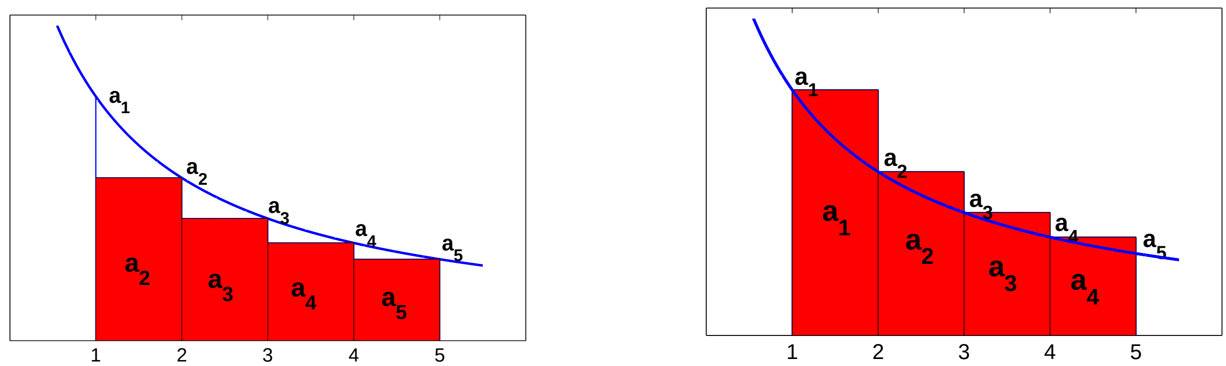
ekvikonvergens – vagyis, ugyanakkor konvergensek illetve divergensek.

Bizonyítás. Legyen $S_k := a_1 + \cdots + a_k$ a $\sum a_n$ sor k. részletösszege. Tudjuk, hogy a sor pontosan akkor konvergens ill. divergens, ha az (S_k) sorozat konvergens ill. divergens. Ha tekintjük az $[1, k]$ intervallumnak az $1, 2, \ldots, k$ osztópontok által meghatározott Φ felosztását, akkor f monoton fogyását felhasználva könnyen látható, hogy

$$a_1 + s_f(\Phi) = S_k,$$

továbbá

$$S_f(\Phi) = S_{k-1}.$$



2.6. ábra. $a_1 + s_f(\Phi) = S_k$ és $S_f(\Phi) = S_{k-1} \quad (k = 5)$

Ebből kapjuk, hogy

$$\int_1^{k+1} f \leq S_k \leq a_1 + \int_1^k f.$$

Mivel az $\int_1^x f$ integrálfüggvény monoton növő, ebből az is meggondolható, hogy az $\int_1^{+\infty} f$ pontosan akkor konvergens, ha a $(\int_1^k f)$ sorozat konvergens. Mivel (S_k) és $(\int_1^k f)$ is monoton növő, ezért a fenti egyenlőtlenségsorozatból az ekvikonvergencia következik. $\square$

2.82. *Megjegyzés.* A fenti bizonyításban felhasználtuk, hogy f Riemann-integrálható az $[1, k]$ alakú intervallumokon. Ez következik abból, hogy f monoton $[1, +\infty)$-en, és egy monoton függvénynek legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok szakadási helye lehet – a bizonyítást azonban itt nem részletezzük.

2.83. Állítás (Hiperharmonikus sor)**.** *A*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

hiperharmonikus sor konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \leq 1$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti kritériumot! Mivel $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pozitív, monoton fogyó tagú, ezért ekvikonvergens az $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ integrállal. A bizonyítás adódik a 2.71. Példából. $\square$

2.84. Alkalmazás. Improprius integrál alkalmazásával igazolható az ún. *Stirling-formula*:

$$n! \sim n^n \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n},$$

ahol $\sim$ azt jelenti, hogy a két oldalán álló kifejezést egy-egy sorozat n. tagjaként definiálva, a két sorozat hányadosa 1-hez tart.

Bizonyítás. Laczkovich-T. Sós: Analízis II. 16.20 és 16.23. tételek. Ezt vizsgára nem kell tudni. $\square$

Harmadik fejezet

Hatványsorok

[1] Ajánlott irodalom a vizsgára készüléshez:

- Urbán János: Határértékszámítás , Bolyai sorozat, Műszaki Kiadó *(Taylor sorok és hatványsorok, feladatgyűjtemény, de elmélet is kidolgozott feladatok formájában.)*
- Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei I., Typotex *(Hatványsorok, Taylor sorok, Riemann integrál. Klasszikus könyv sok példával.)*

3.1. Hatványsorok

A továbbiakban az úgynevezett hatványsorok, azaz a $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ alakú végtelen sorok tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Ehhez szükséges, hogy az előző féléves jegyzet Végtelen sorok c. fejezetét átismételjük! Végtelen (numerikus) sorokhoz hasonlóan nem a hatványsor, hanem annak az összege az érdekes, így most nem is definiáljuk a hatványsort. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ függvény vizsgálatánál két fontos kérdést vizsgálunk.

- $D(f) =?$, azaz mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ konvergens?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az f függvény?

Az első kérdésre viszonylag gyorsan egy majdnem teljes választ tudunk adni. Ehhez először terjesszük ki az előző félévben tanult *korlátos* sorozatokra vonatkozó $\limsup$ fogalmát (ld. előző féléves jegyzet 3.5. fejezet) *felülről nem korlátos* sorozatokra! Világos, hogy ez könnyen megtehető – csak ez esetben a $\limsup a_n = +\infty$ is előfordulhat. Továbbá, az is egyszerűen meggondolható, hogy az előző félévben korlátos sorozatokra kimondott állítások alábbi megfelelői érvényesek lesznek:

(a) A $\limsup a_n$ az (a_n) sorozat határértékkel rendelkező részsorozatainak a határértékei közül a legnagyobb (tehát van is olyan $(a_{\mathtt{n}_i})$ részsorozat, amelyre $a_{\mathtt{n}_i} \to \limsup a_n$.)

(b) Minden $\limsup a_n$-nél *kisebb* számnál nagyobb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $\limsup a_n$-nél *nagyobb* számnál nagyobb tag pedig csak véges sok van az (a_n) sorozatban.

Ezekből könnyen meggondolható a végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó gyökkritérium egy módosított változata (ld. I. féléves jegyzet 5.20. Tétel).

3.1. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium - módosított verzió)**.** *Legyen (c_n) adott sorozat.*

(a) Ha

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

akkor $\sum c_n$ (abszolút) konvergens.

[1] Bátkai András jegyzete alapján, ld. http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/hatvanysorok.pdf

(b) Ha

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} > 1,$$

akkor $\sum c_n$ *divergens.*

Ebből már igazolhatjuk a fenti első kérdésre a választ.

3.2. Tétel (Cauchy-Hadamard tétel)**.** *Legyen*

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$

$$\begin{aligned} &\textit{Ha } |x - x_0| < r, \qquad \textit{akkor } \sum (a_n (x - x_0)^n) \qquad \textit{abszolút konvergens,}\\ &\textit{ha } |x - x_0| > r, \qquad \textit{akkor } \sum (a_n (x - x_0)^n) \qquad \textit{divergens.}\end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és alkalmazzuk a $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ sorra a fenti gyökkritériumot. Ezek szerint a sor abszolút konvergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Átrendezéssel kapjuk az első állítást.
Hasonlóan, a gyökkritérium divergenciafeltételét alkalmazva kapjuk, hogy a sor divergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

□

3.3. Definíció. Az előző tételben szereplő

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

számot a hatványsor *konvergenciasugar*ának nevezzük.

3.4. *Megjegyzés.* Jaques Hadamard [1865–1963] francia matematikus. A komplex függvénytan, a differenciálegyenletek és a funkcionálanalízis területén alkotott jelentőset hosszú élete során.

Összefoglalva az előző állítást, egy hatványsor mindig egy (végpontjaitól eltekintve) szimmetrikus, x_0 középpontú intervallumon konvergens. Az intervallum belső pontjaiban abszolút konvergens, a végpontokbeli konvergenciát pedig külön meg kell vizsgálni. Ezek alapján szokás azt mondani, hogy $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ egy x_0 középpontú hatványsor. Mivel az intervallum végpontjaiban gondjaink lehetnek, a tárgyalás leegyszerűsítése végett a következőkben sokáig csak az intervallum belsejére korlátozzuk vizsgálódásainkat.

3.5. Definíció. A $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ hatványsor *konvergenciahalmaz*a a

$$K := \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \sum (a_n (x - x_0)^n) \text{ konvergens}\right\}$$

intervallum, *összegfüggvény*e a

$$\begin{aligned} D(f) &:= \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r) \qquad (r \neq 0)\\ f(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\end{aligned}$$

függvény.

A továbbiakban a hatványsor összegfüggvényének tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni. Ehhez alapvető lesz a következő, úgynevezett transzformációs tétel. Előtte azonban idézzük fel az abszolút konvergens sorokra tanult átrendezési tételt az előző félévből (5.32. Tétel).

3.6. Tétel. *Legyen $\sum c_n$ abszolút konvergens sor. Ekkor minden $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció, azaz permutáció esetén $\sum c_{p_n}$ is abszolút konvergens, sőt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{p_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

3.7. Tétel. *Legyen $\sum (a_n(x - x_0)^n)$ egy pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor, azaz $r > 0$, és legyen $x_1 \in \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r)$ tetszőleges. Ekkor minden $x \in \operatorname{int} K$ pontra, melyre $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0| =: \varrho$, teljesül, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x - x_1)^i,$$

ahol

$$b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n(x_1 - x_0)^{n-i}. \tag{3.1}$$

Bizonyítás. A bizonyítás kiindulási pontja az a „mély” állítás, hogy

$$x - x_0 = (x - x_1) + (x_1 - x_0),$$

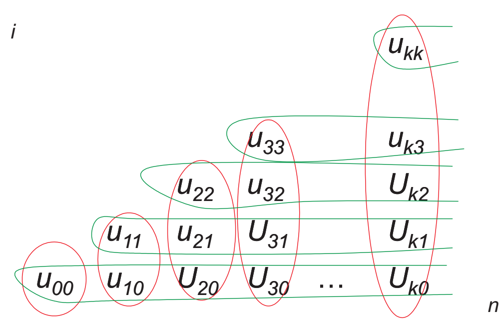
amiből a binomiális tétel szerint

$$(x - x_0)^n = [(x - x_1) + (x_1 - x_0)]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}.$$

Ezt beírva a hatványsorba, mely a feltétel szerint konvergens, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} u_{ni}.$$

Ez egy abszolút konvergens sor, melyben, az alábbi ábra jelöléseit használva, az elemeket függőleges (piros) oszloponként adjuk össze. Mivel abszolút konvergens sor átrendezhető, ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a sort vízszintes (zöld) soronként összegezzük.



3.1. ábra.

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x - x_1)^i, \quad |x - x_1| < \varrho.$$

□

A végtelen sorokkal végezhető műveletek (ld. előző félév 5.5. és 5.35. (Mertens) Tételét) alapján azonnal adódik a következő állítás.

3.8. Állítás. *Legyen* $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ *és* $\sum(b_n(x-x_0)^n)$ *két,* $r_1>0$ *és* $r_2>0$ *konvergenciasugárral rendelkező hatványsor. Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\ldots+a_0b_n)(x-x_0)^n \tag{3.2}$$

minden olyan x *számra, melyre* $|x-x_0|<\min\{r_1,r_2\}$.

Tehát az adott intervallumon hatványsorként felírható függvények gyűrűt alkotnak. A továbbiakban vizsgáljuk a hatványsor összegfüggvényének legfontosabb analitikus tulajdonságait.

3.9. Tétel. *Hatványsor összegfüggvénye* folytonos.

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá, hogy a $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ hatványsor összegfüggvényét az (x_0-r,x_0+r) nyílt intervallumon definiáltuk ha $r>0$. Az állítást is csak ebben az esetben kell bizonyítani, hiszen az egy pontban értelmezett függvény mindig folytonos.
Legyen $x_1\in(x_0-r,x_0+r)$ tetszőleges. Belátjuk, hogy f folytonos az x_1 pontban. Az előző transzformációs tétel szerint f függvény az x_1 pontnak elegendően kis ϱ sugarú környezetében felírható x_1 középpontú hatványsorként mint

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i(x-x_1)^i, \quad |x-x_1|<\varrho.$$

Tehát annyit kell belátnunk, hogy

$$\lim_{x\to x_1} f(x)=f(x_1)=b_0.$$

Ehhez legyen $0<\delta<\varrho$, akkor a feltételek szerint $\sum_{i=0}^{\infty} b_i\delta^i$ konvergens. Jelölje

$$\sigma := \sum_{i=1}^{\infty} b_i\delta^{i-1}.$$

Ekkor ha $|x-x_1|<\delta$, akkor

$$|f(x)-f(x_1)|=|f(x)-b_0|=\left|(x-x_1)\sum_{i=1}^{\infty} b_i(x-x_1)^{i-1}\right| \le |x-x_1|\cdot|\sigma|,$$

amiből az x_1 pontbeli folytonosság már azonnal következik.

□

3.10. Tétel. *A pozitív konvergenciasugarú* $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ *hatványsor összegfüggvénye* tetszőlegesen sokszor differenciálható *és a deriválás tagonként végezhető, vagyis*

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n,$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+3\cdot 4(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-x_0)^n,$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)a_{n+k}(x-x_0)^n, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Bizonyítás. Legyen $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Az előző bizonyítás gondolatmenetét alkalmazva a 3.7. Transzformációs tételből kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)^2 + \ldots \to b_1, \quad \text{ha } x \to x_1,\ |x - x_1| < r - |x_1 - x_0| \text{ esetén},$$

hiszen az előző tétel szerint minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciaintervallum középpontjában. A (3.1) szerint

$$f'(x_1) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} a_n (x_1 - x_0)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x_1 - x_0)^k.$$

Mivel f deriváltfüggvénye szintén hatványsor összegfüggvénye, ezért f' is deriválható. A k-adik deriváltra vonatkozó állítás teljes indukcióval látható be.
Továbbá, meggondolható az is, hogy az $f^{(k)}$ függvényt előállító hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsoréval. □

Az előző tételből világos a hatványsorok és Taylor-sorok (ld. az 1.56. Definíciót) kapcsolata.

3.11. Következmény. *Minden pozitív konvergenciasugarú hatványsor az összegfüggvényének* Taylor-sora*.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint

$$f^{(k)}(x_0) = k \cdot (k-1) \cdots 1 \cdot a_k,$$

azaz

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k,$$

valamint $f(x_0) = a_0$. □

Mivel minden Taylor-sor nyilvánvalóan egy hatványsor, ezért az előbbiek szerint a (pozitív konvergenciasugarú) hatványsorok halmaza megegyezik a (pozitív konvergenciasugarú) Taylor-sorok halmazával.

Ezek az állítások lehetőséget adnak arra is, hogy megfordítsuk a differenciálás műveletét.

3.12. Tétel. *Legyen* $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ *pozitív konvergenciasugarú hatványsor. Ekkor a hatványsor összegfüggvényének van* primitív függvénye*, mégpedig*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az állítás a hatványsorok összegfüggvényének differenciálására vonatkozó tételből azonnal következik. A F-et előállító hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsoréval. □

Az (1.15)-ben definiált

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Taylor-sorok x-beli konvergenciájára annak idején csak az 1.55. Következményben adtunk egy igen erős elégséges feltételt. A hatványsorok elmélete – a konvergenciaintervallum végpontjaitól eltekintve, ahol minden esetben külön kell megvizsgálni a konvergenciát, ld. később a 3.20. Abel-tételt – szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy adott Taylor-sor hol konvergens, azaz hol állítja elő az összegfüggvényét.

3.13. Példa. Az exp, sin, cos, sh , és ch függvényeknek az 1.57. Tételben igazolt (0 körüli) Taylor-sor-előállításaiban a konvergenciasugár $+\infty$.
Az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény Taylor-sor-előállításában a konvergenciasugár 1.

Bizonyítás. Következik abból, hogy a konvergenciasugár 3.3. Definíciója alapján

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{0} = +\infty,$$

továbbá

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Az előző tételekből előállíthatók olyan függvények Taylor-sorai is, amelyeket az 1.57. Tételben használt elv alapján nem tudtunk kiszámolni.

3.14. Állítás. *Az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény Taylor-sora a $(-1,1)$ intervallumon*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sora a $(-1,1)$ intervallumon

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Bizonyítás. Mivel $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, az 1.57. Tétel első állításából

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad -1 < x < 1,$$

a fenti, primitív függvényre vonatkozó tételt és $f(0) = 0$-t felhasználva pedig

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Hasonlóan, mivel $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, az 1.57. Tétel első állításából

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad -1 < x < 1,$$

a fenti, primitív függvényre vonatkozó tételt és $f(0) = 0$-t felhasználva pedig

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

□

Fontos, hogy hatványsor összegfüggvénye az együtthatókat egyértelműen meghatározza.

3.15. Tétel. *Legyenek*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

olyan függvények, melyeket előállító hatványsoroknak közös $(x_0 - r, x_0 + r)$ konvergenciaintervalluma van $(r > 0)$. Legyen továbbá $(x_n) \subset (x_0 - r, x_0 + r)$ olyan sorozat, melyre $x_n \to y \in (x_0 - r, x_0 + r)$, $x_n \neq y$ és $f(x_n) = g(x_n)$. Ekkor $a_n = b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre.

Bizonyítás. A 3.7. Transzformációs tétel szerint elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $y = x_0$. Teljes indukcióval végezzük a bizonyítást. Mivel a hatványsor összegfüggvénye folytonos, ezért

$$a_0 = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) = b_0.$$

Tegyük fel, hogy egy $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$. Ekkor az

$$a_{n+1} + a_{n+2}(x - x_0) + a_{n+3}(x - x_0)^2 + \ldots \text{ és}$$
$$b_{n+1} + b_{n+2}(x - x_0) + b_{n+3}(x - x_0)^2 + \ldots$$

hatványsorok konvergenciahalmaza ugyanaz a K intervallum, és minden $x \neq x_0$ esetén

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} \text{ és } g_1(x) = \frac{g(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}}$$

az összegfüggvényük. A feltételek szerint $f_1(x_i) = g_1(x_i)$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel f_1 és g_1 is hatványsor összegfüggvénye, ezért folytonosak. Ebből viszont, az $n = 0$ esetre vonatkozó gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = f_1(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_1(x_n) = g_1(x_0) = b_{n+1}.$$

□

3.16. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $D(f) = I$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az f függvény *analitikus*, ha található $x_0 \in I$, $(a_n) \subset \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

minden $x \in I$ esetén. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan analitikus*, ha minden $x \in I$ ponthoz található annak olyan környezete, melyre megszorítva f analitikus.

3.17. *Megjegyzés.* A fentiek alapján egy függvény pontosan akkor analitikus, ha előáll a Taylor-sorának összegeként.

Megjegyezzük, hogy a könyvek nem egységesek a szóhasználat tekintetében: van, ahol azt is analitikusnak hívják amit mi lokálisan analitikusnak. Tehát az exponenciális-, a szinusz- és a koszinuszfüggvény példa lehet analitikus függvényre, a logaritmusfüggvény lokálisan analitikus de nem analitikus függvényre és az $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0) = 0$ végtelen sokszor differenciálható, de a 0 pontban nem (lokálisan) analitikus függvényre (ld. Urbán: Határértékszámítás).
Tehát az új szóhasználattal az előző tétel azt mondja ki, hogy két különböző, ugyanazon az intervallumon értelmezett lokálisan analitikus függvény legfeljebb megszámlálhatóan sok helyen veheti fel ugyanazt a függvényértéket, és ezek a pontok nem torlódhatnak az intervallum belsejében.
Példa lehet analitikus függvényekre, melyek végtelen sokszor veszik fel ugyanazt a függvényértéket a szinusz- és a koszinuszfüggvény.[2]
A hatványsor összegfüggvényének a tulajdonságait a hatványsorok oszthatóságának kérdésével zárjuk. Mivel szorozni már tudunk, csak a reciprok kérdésével kell foglalkoznunk.

3.18. Tétel. *Legyen* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, $r > 0$, $a_0 \neq 0$. *Ekkor található olyan* $\delta > 0$ *és* $(c_n) \subset \mathbb{R}$, *hogy*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$$

minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *esetén.*

Bizonyítás. Feltehető az egyszerűség kedvéért, hogy $x_0 = 0$ és $a_0 = 1$. A $\sum(a_n \cdot x^n)$ sor összegfüggvényének 0 helyen vett folytonossága miatt található $\delta > 0$, hogy

$$\left|a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots\right| < 1$$

[2] Fontos, hogy itt viszont tényleg nem torlódnak a közös függvényértékhelyek, csak a végtelenekben.

minden $|x| < \delta$ esetén.
Ekkor
$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)^n.$$
A Cauchy-szorzatra vonatkozó tétel szerint (n-szeri alkalmazással) találhatók olyan a_{nk} együtthatók, hogy
$$(-a_1x - a_2x^2 - \ldots)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k.$$
Ezeket az együtthatókat akár ki is számolhatnánk, de fölösleges, hiszen a bizonyítás további menetéhez elegendő a létezésükről tudnunk. Tehát
$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k\right)$$
ha $|x| < \delta$. Ismét használva az abszolút konvergens sorok átrendezhetőségére vonatkozó tételt, amit már a transzformációs tételnél is használtunk, kapjuk, hogy
$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$
ha $|x| < \delta$. □

Tehát, az eddigieket összefoglalva, az x_0 középpontú pozitív konvergenciasugarú hatványsorok egy kommutatív gyűrűt alkotnak, melyben az invertálható elemek azok a hatványsorok, melyek első együtthatójára $a_0 \neq 0$. Megjegyzendő, hogy ezek a hatványsorok egy kommutatív algebrát is alkotnak.

3.19. *Megjegyzés.* Mutatunk egy eljárást arra, hogyan lehet két hatványsor hányadosának együtthatóit kiszámolni. Az eljárás lényegében a polinomok osztásánál tanultakkal azonos.
Legyen
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \quad r > 0,\ g(0) = b_0 \neq 0.$$
Mivel elegendően kicsi x esetén
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n,$$
ezért
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_0c_n + b_1c_{n-1} + \ldots + b_nc_0)x^n.$$
Tehát
$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0 \\ a_1 &= b_0c_1 + b_1c_0 \\ a_2 &= b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\ &\ldots \end{aligned}$$
Ebből a végtelen sok egyenletből igény és időnk szerint tetszőlegesen sok c_k együtthatót meghatározhatunk, pl.
$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0} \\ c_1 &= \frac{a_1 - \frac{a_0b_1}{b_0}}{b_0} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Ezt az eljárást kicsit hosszabban folytatva kaphatjuk például, hogy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots,$$

ahol is

$$c_1 = 1, \qquad c_3 = \frac{1}{3}, \qquad c_5 = \frac{2}{15}.$$

Végül fejezzük be vizsgálódásainkat annak a kérdésnek a (részleges) tisztázásával, hogy amennyiben a konvergenciaintervallum valamely végpontjában is konvergens egy hatványsor, az itt kapott sorösszegnek mi köze van a hatványsor összegfüggvényéhez, mely az intervallum belsejében volt definiálva. A következő tétel mutatja, hogy ilyenkor az összegfügvény folytonosan kiterjeszthető a végpontra.
Egyszerűség kedvéért a tételt 0 középpontú hatványsor konvergenciaintervallumának jobb végpontjára fogalmazzuk meg, de ennek nincs jelentősége a bizonyítás szempontjából, a bal végpont vagy a nem zérus középpont esete hasonlóan tárgyalható.

3.20. Tétel (Abel-tétel)**.** *Legyen $\sum(a_n x^n)$ egy pozitív, véges konvergenciasugarú hatványsor ($0 < r < \infty$), valamint tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n < \infty,$$

azaz konvergens. Ekkor az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

összegfüggvény folytonosan kiterjed az $x = r$ pontra, azaz

$$\lim_{x \to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Bizonyítás. További egyszerűsítések kedvéért feltesszük, hogy $r = 1$. Ez a bizonyítás menetén nem változtat, csak jelöléseinket egyszerűsíti és teszi áttekinthetővé.
Legyen

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Itt $s < \infty$ a feltétel szerint, és $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. A hatványsorok szorzatánál (3.2) felírtak szerint, mivel $\sum s_n x^n$ konvergenciasugara 1, ezért ha $|x| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

így

$$s - f(x) = s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left((1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s - s_n)x^n.$$

Tehát $0 < x < 1$ esetén

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |s - s_n| x^n.$$

Mivel az $s_n \to s$, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz található $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \ge N$ természetes számra $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így $0 < x < 1$ esetén

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s - s_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \le (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s - s_n| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel a lineáris függvény folytonos, így $\varepsilon > 0$ számhoz található $\delta > 0$, hogy ha $x \in (1-\delta{,}1)$, akkor

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N}|s-s_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

azaz ha $x \in (1-\delta{,}1)$, akkor

$$|s-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami viszont pont a bizonyítandó állítás. □

3.21. *Megjegyzés.* Niels Henrik Abel [1802-1829] norvég matematikus. A XIX. század egyik legjelentősebb hatású elméje. Az algebra megalapozásában és a komplex függvénytanban alkotott jelentőset.

3.22. Példa. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

hatványsort! Láttuk a 3.14. Állításban, hogy ez a hatványsor a $(-1{,}1)$ nyílt intervallumon az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényt állítja elő. Ez a függvény értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, amint azt korábban már láttuk. A fenti hatványsor az $x = 1$ helyen konvergens, hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Leibniz típusú sor. Abel tétele szerint tehát a hatványsor összegfüggvénye folytonosan kiterjed az $x = 1$ pontra és ott a függvényérték $f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \ln 2$ a megfelelő sorösszeg, azaz

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots .$$

Ez egyébként elemi módszerekkel is belátható.

3.23. Példa. Az előző gondolatmenethez hasonlóan kapjuk az

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

előállításból, hogy

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1},$$

azaz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots .$$

3.2. Trigonometrikus függvények

Korábbi tanulmányaink során hosszabban tárgyaltuk a trigonometrikus függvények alaptulajdonságait, melyeket a következőkben foglalhatunk össze.
Geometriai megfogalmazás alapján, intuitív módon definiáltuk a szinusz- és a koszinuszfüggvényt és lényegében a következő tulajdonságokban állapodtunk meg.

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Megemlítünk az ebben a félévben tanult legfontosabb következményekből néhányat.

- sin és cos tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$,
- legfeljebb egy ilyen tulajdonságú függvénypár létezhet,
- $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Evvel a tárgyalásmóddal van egy nagy probléma. Bár a trigonometrikus függvények intuitív geometriai bevezetése rendkívül szemléletes, így valahányszor ezekről a függvényekről beszélünk, a geometriai jelentéssel képzeljük őket magunk elé, ez a felépítés hagy maga után némi logikai kívánnivalót. Gondoljunk csak arra, hogy a definícióhoz szükségünk van olyan fogalmakra, mint az ívhossz vagy a szög nagysága.
Tehát a trigonometrikus függvények tulajdonságaival nincs igazán probléma, a gond a definíciójuk, a létezés.
Most szeretnénk bemutatni egy lehetőséget arra, hogyan lehet azt a logikai csorbát és a bonyolult geometriai fogalmakat kiküszöbölni. A cél nem az, hogy egy újfajta bevezetési lehetőséget mutassunk a trigonometrikus függvényekre, hanem hogy jól ismert fogalmakat az analízis logikai épületében a helyére tegyünk. A gondolatmenet igen jellemző a mai matematika egészére.
Megismertük intuitív módon a trigonometrikus függvényeket, azok alaptulajdonságait és az alaptulajdonságok fontosabb következményeit, így a hatványsor-előállításukat. Ezeket a hatványsorokat viszont bonyolult geometriai fogalmak bevezetése nélkül is fel lehet írni, tulajdonságaikat lehet vizsgálni. Ez adhatja az ötletet arra, hogy megfordítsuk a gondolatmenetet és a hatványsor alakot használjuk a trigonometrikus függvények definíciójára.
Tehát **legyen**

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

és **legyen**

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A hatványsorokról tanultak alapján azonnal következnek a következő tulajdonságok:

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- sin és cos tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = 1$,
- $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Az addíciós képletek beláthatók például a Cauchy szorzat segítségével, vagy a differenciálási szabályok alkalmazásával a következő módon.
Legyen rögzített de tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ mellett

$$f_y(x) = [\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + [\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2 .$$

Kiszámolható, hogy $f_y(0) = 0$ és $f_y'(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így $f_y \equiv 0$.
Ezzel beláttuk, hogy a hatványsorral definiált sin és cos függvények teljesítenek minden fontos alaptulajdonságot, amit a trigonometrikus függvényektől elvártunk. Mivel tudjuk, hogy legfeljebb egy ilyen függvénypár létezhet, ezért ők azok.
Természetesen mivel nem használtunk logikailag bonyolult, de szemléletes geometriai fogalmakat, így a definiált függvények sem túl szemléletesek.

3.3. Komplex függvények és hatványsorok

Ez a pont tűnik a legmegfelelőbbnek arra, hogy rávilágítsunk arra, hogy nagyon sok minden abból, amit eddig analízisből tanultunk, átvihető a komplex számok körébe. Ehhez tisztáznunk kell néhány dolgot az alapfogalmakkal kapcsolatban.
Algebra előadáson a komplex számokról minden lényeges szerepelt, így egy komplex szám abszolút értéke is. Ez lehetővé teszi, hogy egy számsorozat konvergenciáját a valóshoz analóg módon definiáljuk.

3.24. Definíció. Legyen $z_n = a_n + b_n \mathrm{i}$, $n \in \mathbb{N}$ komplex számokból álló sorozat és $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ komplex szám. Azt mondjuk, hogy a (z_n) *sorozat tart a z számhoz*, vagy a (z_n) sorozat *határértéke a z szám*, ha minden $\varepsilon > 0$ pozitív számhoz található $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n \geq N$ természetes szám esetén $|z_n - z| < \varepsilon$.

3.25. Állítás. *Pontosan akkor teljesül, hogy $z_n \to z$, ha*

- *a $(|z_n - z|)$ valós számsorozatra $|z_n - z| \to 0$ teljesül.*
- *az (a_n) és (b_n) valós számsorozatokra $a_n \to a$, $b_n \to b$.*

Bizonyítás. Az első átfogalmazás triviális, a második pedig abból következik, hogy

$$|z_n - z|^2 = |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2.$$

□

Ezeknek az átfogalmazásoknak nagy jelentősége, hogy komplex sorozatok konvergenciáját valós sorozatok konvergenciájával fogalmazza meg. Így a sorozatok konvergenciájával kapcsolatban majdnem minden tétel újrafogalmazható és szó szerint ugyanúgy bizonyítható, mint a valós esetben. Lássunk néhány példát!

3.26. Állítás. *Legyen $z_n = a_n + b_n\mathrm{i}$, $w_n = c_n + d_n\mathrm{i}$, $n \in \mathbb{N}$, továbbá $z = a + b\mathrm{i}$, $w = c + d\mathrm{i}$. Ha $z_n \to z$ és $w_n \to w$, akkor*

- $$(z_n \pm w_n) \to z \pm w,$$
- $$(z_n \cdot w_n) \to zw,$$
- *Ha $w_n \neq 0$, $w \neq 0$, akkor*
$$\left(\frac{z_n}{w_n}\right) \to \frac{z}{w},$$
- $$(|z_n|) \to |z|.$$

Bizonyítás. Csak a szorzásra vonatkozó állítást bizonyítjuk, hogy lássuk a gondolatmenetet. Azt viszont kétféleképpen.
A valós esetet imitálva írhatjuk, hogy

$$|z_n w_n - zw| = |z_n(w_n - w) + (z_n - z)w| \le |z_n| \cdot |w_n - w| + |z_n - z| \cdot |w| \to 0$$

a feltételek szerint.
A másik gondolatmenetet alkalmazva kapjuk, hogy

$$z_n w_n = (a_n c_n - b_n d_n) + (a_n d_n + b_n c_n)\mathrm{i} \to (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i} = zw,$$

hiszen valós számsorozatokra már tudjuk a műveleti azonosságokat. □

Fontos kiemelni, hogy az egyetlen probléma a *rendezés*nél és az evvel kapcsolatos tételeknél jelentkezik. A komplex számok testét ugyanis nem tudjuk „értelmesen”, azaz a műveleti azonosságok megtartásával rendezni. Így nincs értelme szuprémumról vagy infimumról sem beszélni. Ennek ellenére a Bolzano-Weierstrass-tétel, amit annak idején rendezési fogalmak segítségével bizonyítottunk, érvényben marad.

3.27. Definíció. A $D \subset \mathbb{C}$ halmaz *korlátos*, ha létezik $K > 0$, hogy $|z| \le K$ minden $z \in D$ esetén - vagyis a

$$\{|z| : z \in D\} \subset \mathbb{R}$$

halmaz korlátos.

3.28. Tétel (Bolzano-Weierstrass)**.** *Legyen $(z_n) \subset \mathbb{C}$ egy korlátos sorozat. Ekkor található olyan (n_k) indexsorozat, hogy (z_{n_k}) konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $z_n = a_n + b_n\mathrm{i}$, $n \in \mathbb{N}$. Mivel (z_n) korlátos, ezért az (a_n) valós sorozat is korlátos, így a Bolzano-Weierstrass-tétel tanult változata szerint található olyan $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ indexsorozat, hogy (a_{n_l}) konvergens.
A (b_{n_l}) valós számsorozat is korlátos, így a Bolzano-Weierstrass-tétel ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy található olyan $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ indexsorozat, hogy $(b_{n_{l_k}})$ sorozat konvergens. Mivel részsorozat részsorozata is részsorozat és konvergens sorozat részsorozata is konvergens, kapjuk, hogy

$$z_{n_{l_k}} = a_{n_{l_k}} + b_{n_{l_k}}\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{N}$$

konvergens részsorozat. □

Megjegyezzük, hogy *végtelen sorok*kal kapcsolatban minden, amit tanultunk, érvényben marad. Az abszolút konvergencia segítségével itt is sok konvergenciatételt pozitív tagú sorokra lehet visszavezetni.
A folytatásban megfogalmazzuk a legfontosabb ponthalmazelméleti alapfogalmakat. Az egyetlen különbség a valós esethez képest, hogy az ε sugarú szimmetrikus intervallum szerepét az ε sugarú nyílt körlap veszi át.

3.29. Definíció. Jelölje

$$B(w, r) := \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - w| < r\}$$

a $w \in \mathbb{C}$ pont $r > 0$ sugarú környezetét. Ez egy w középpontú, r sugarú nyílt körlap a komplex számsíkon.
Legyen $D \subset \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$. Azt mondjuk, hogy a w pont a D halmaznak

– *belső pontja*, ha található olyan $r > 0$, hogy $B(w, r) \subset D$,

– *külső pontja*, ha található olyan $r > 0$, hogy $B(w, r) \subset \mathbb{C} \setminus D$,

– *határpontja*, ha minden $r > 0$ esetén $B(w, r) \cap D \ne \emptyset$, $B(w, r) \cap (\mathbb{C} \setminus D) \ne \emptyset$.

– *torlódási pontja*, ha minden $r > 0$ esetén $(B(w, r) \setminus \{w\}) \cap D \ne \emptyset$.

Az eddigiekhez hasonlóan int D jelöli a D halmaz belső pontjainak, ∂D a D halmaz határpontjainak, D' a D halmaz torlódási pontjainak halmazát.

Az állítások megfogalmazása érdekében bevezetünk egy új jelölést. Mint láttuk eddig, és későbbi tanulmányaink során is látni fogjuk, nagyon sok tételnél lényegtelen a tétel kimondása és bizonyítása szempontjából, hogy a valós vagy a komplex számok testében dolgozunk. Ilyenkor az egységes jelölésmód kedvéért használni fogjuk a $\mathbb{K}$ szimbólumot, ami azt jelenti, hogy tetszés szerint $\mathbb{R}$ is és $\mathbb{C}$ is írható helyette.

3.30. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$, azaz $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ vagy $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{C}$.

- Azt mondjuk, hogy f *folytonos* a $z_0 \in \mathcal{D}(f)$ pontban, ha bármely $(z_n) \subset \mathcal{D}(f)$ sorozatra, melyre $z_n \to z_0$, teljesül, hogy $f(z_n) \to f(z_0)$.

- Azt mondjuk, hogy f *határértéke* a $z_0 \in \mathcal{D}(f)'$ pontban a w szám, ha bármely $(z_n) \subset \mathcal{D}(f)$ sorozatra, melyre $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$ teljesül, hogy $f(z_n) \to w$. Jelölésben: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$.

- Azt mondjuk, hogy f *differenciálható* a $z_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, ha létezik

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Természetesen a folytonosság és a határérték ekvivalens módon átfogalmazható ε-δ terminológiával is. A folytonosság, határérték és differenciálhányados megszokott műveleti azonosságai érvényben maradnak a sorozathatárértékekre vonatkozó tulajdonságok miatt.

A hatványsorokkal kapcsolatban minden, amit tanultunk, átvihető a komplex esetre. Legyen $(a_n) \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ és

$$\sum a_n (z - z_0)^n$$

(komplex) hatványsor.

- (Cauchy-Hadamard) Legyen

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

  Ha $|z - z_0| < r$, akkor $\sum a_n (z - z_0)^n$ abszolút konvergens, ha $|z - z_0| > r$, akkor $\sum a_n (z - z_0)^n$ divergens.

- Legyen

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \mathcal{D}(f) = B(z_0, r).$$

  Ekkor f folytonos és tetszőlegesen sokszor differenciálható, deriváltjai a tanult módon (a hatványsor tagonkénti deriválásával) számíthatók ki.

- (Abel-tétel) Ha $|z_1 - z_0| = r$ és $\sum a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergens, akkor f folytonosan terjed ki a z_1 pontra és $f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$.

Az egyetlen technikai nehézség, hogy a z_0 pont r sugarú környezetének határa már nem csak két pontból áll.

A hatványsorok lehetőséget adnak arra, hogy néhány jól ismert függvény definícióját kiterjesszük a komplex számok körében.
A legegyszerűbb példával kezdjük. Világos, hogy

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Ennek analógiájára mondhatjuk, hogy **legyen**

$$\begin{aligned}\exp z = \mathrm{e}^z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\\ \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Ez természetesen különösebb szemléletes tartalom nélkül annak a filozófiának a továbbgörgetése, hogy a trigonometrikus (és az exponenciális) függvényt definiálhatjuk hatványsorával.
Lássuk a definíciók néhány következményét!

- sin, cos és exp mindenhol definiált, tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények, melyekre $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
- Az addíciós azonosságok érvényben maradnak (lásd Cauchy-szorzat), azaz

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z+w} &= \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w\\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w\\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w.\end{aligned}$$

Egy lényeges összefüggést fogalmaz meg az alábbi állítás.

3.31. Állítás.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z, \qquad z \in \mathbb{C},$$

ezért speciálisan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$.

Bizonyítás. A megfelelő függvények definíciójában szereplő hatványsor-előállításból következik. □

3.32. Következmény. *Az* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény $2\pi\mathrm{i}$ *(komplex!) periódussal, hiszen az előbbiek szerint*

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = e^z.$$

Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, akkor az ebben a félévben tanult fogalmak és tételek közül csak igen keveset hasznosíthatunk, hiszen nincs rendezés, így se monotonitásról, se szélsőértékről, se középértéktételekről nem beszélhetünk. Ha viszont $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, akkor, bár monotonitásról nem lehet szó, de legalább szélsőértékekről beszélhetünk.

3.33. Tétel (Weierstrass-tétel)**.** *Legyen* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *és legyen* $\mathcal{D}(f)$ *korlátos és zárt (azaz* $\partial\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(f)$*) halmaz. Ekkor* f *felveszi minimumát és maximumát.*

A bizonyítás szóról szóra megegyezik a múlt félévi jegyzetben szereplővel.

Komplex változójú függvényekkel kapcsolatos fejtegetéseinket egy kiruccanással zárjuk az algebra területére.

3.34. Tétel (Az algebra alaptétele)**.** *Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van zérushelye.*

Bizonyítás. (Vizsgára nem kell tudni!) Legyen

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad a_k \in \mathbb{C},\ 0 \le k \le n,\ a_n \ne 0.$$

Mivel $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény, vizsgáljuk helyette a $|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ függvényt, aminek lehet a szélsőértékeiről beszélni.
Jelölje

$$\mu := \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| \ge 0.$$

Mivel

$$|z| \to \infty \text{ esetén } |p(z)| \to \infty,$$

(miért?), ezért található $r > 0$, hogy $|p(z)| > \mu$ ha $|z| > r$. Tehát

$$\mu = \inf_{|z| \le r} |p(z)|$$

is teljesül. Mivel

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$$

korlátos és zárt halmaz, ezért található olyan $z_0 \in K$, hogy $\mu = |p(z_0)|$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mu = 0$. Indirekt, tegyük fel, hogy $\mu > 0$ és legyen

$$q(z) := \frac{p(z + z_0)}{p(z_0)}.$$

A feltételek szerint $q(0) = 1$, q egy n-ed fokú polinom és $|q(z)| \ge 1$. Tehát a q polinom bevezetésével a $\mu > 0$ számot 1-re változtattuk. Ezek alapján írhatjuk, hogy a q polinom

$$q(z) = 1 + b_m z^m + \ldots b_n z^n$$

alakú, ahol $b_m \ne 0$ az első ilyen tulajdonságú együttható. Ilyen van, hiszen $b_n \ne 0$, tehát $1 \le m \le n$.
Megmutatjuk, hogy található olyan z szám, melyre $|q(z)| < 1$, ami ellentmondás. Ezt a z számot trigonometrikus alakjában keressük, azaz $z = \varrho e^{i\psi}$ alakban.
Mivel $\left|\frac{-|b_m|}{b_m}\right| = 1$, ezért található olyan $\varphi \in \mathbb{R}$, hogy

$$\frac{-|b_m|}{b_m} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Jelölje továbbá

$$\psi := \frac{\varphi}{m},$$

ekkor

$$b_m e^{im\psi} = -|b_m|.$$

Legyen

$$z := \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \varrho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \qquad (\varrho > 0).$$

Célunk most a ϱ szám ügyes megválasztása, hogy ellentmondásra jussunk.
Ekkor

$$b_m z^m = \varrho^m b_m e^{im\psi} = -\varrho^m |b_m|.$$

Ezért

$$|q(z)| = \left|q\left(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right)\right| \le |1 - |b_m|\varrho^m| + |b_{m+1}|\varrho^{m+1} + \ldots + |b_n|\varrho^n,$$

ahol az első két tag kivételével a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmaztuk. Ha $0 < \varrho^m < \frac{1}{|b_m|}$, akkor $1 - |b_m|\varrho^m > 0$, így az első abszolútérték-jel elhagyható. Tehát ilyenkor

$$\left|q\left(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right)\right| \le 1 - |b_m|\varrho^m + |b_{m+1}|\varrho^{m+1} + \ldots + |b_n|\varrho^n = 1 - \varrho^m \left(|b_m| - |b_{m+1}|\varrho - \ldots - |b_n|\varrho^{n-m}\right).$$

Mivel $|b_m| > 0$ és polinomfüggvények folytonosak, ezért ha ϱ „elég kicsi”, a zárójelben pozitív szám áll. Egy ilyen ϱ számra tehát

$$\left|q\left(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right)\right| < 1,$$

ami ellentmondás. □

Tárgymutató