0. GYAKORLAT - ismétlés: nevezetes függvények, határértékek, egyenletes folytonosság

A feladatokban felhasználhatók az alábbi nevezetes határértékek ($a, c \in \mathbb{R}^+$):

$$\lim_{x\to 0+} x^x = 1 \qquad \lim_{x\to 0+} x^p \log_c x = 0 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_c(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln c}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to a} \frac{\log_c x - \log_c a}{x-a} = \frac{1}{a\cdot \ln c} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{c^x - 1}{x} = \ln c \qquad \lim_{x\to 0} \frac{c^x - c^a}{x-a} = c^a \ln\ c$$

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$ (d) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ (f) $\lim_{x\to 1} \frac{|x^2+x-2|}{x-1}$ (g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{|x|}}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{|\mathrm{tg}\, x|}{x}$

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{2^x-2}{x-1}$ (j) $\lim_{x\to \infty} \sqrt[x]{1+2x}$ (k) $\lim_{x\to 4} \frac{2-\log_2 x}{x-4}$ (l) $\lim_{x\to 2} \frac{3^x-9}{x-2}$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}\, x}{x}$ (n) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}\, x-1}{x}$ (o) $\lim_{x\to 0+} x \log_2 \frac{x+1}{x}$ (p) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{1}{1+x}}{x}$

(q) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x}{x}$ (r) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln\,(x+1))}{x}$ (s) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\, x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ (t) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x}$

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek!

(a) $\mathrm{arc\ tg}\, x = \mathrm{arc\ sin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (b) $\mathrm{ch}^2\, x = \mathrm{sh}^2\, x + 1$ (c) $\mathrm{ar\ cth}\, x = \mathrm{ar\ th} \frac{1}{x}$

3. Ábrázoljuk az alábbi hozzárendeléssel definiált $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, adjuk meg $\mathcal{D}(f)$-et és $\mathcal{R}(f)$-et minden esetben!

(a) $f(x) = \mathrm{arc\ sin}\,(x-1)$ (b) $f(x) = \mathrm{arc\ sin}\, \frac{x}{2}$ (c) $f(x) = \mathrm{arc\ tg}\,(\sqrt{x})$

(d) $f(x) = \mathrm{arc\ tg}\, 2x$ (e) $f(x) = \mathrm{ch}\, \frac{x}{4}$ (f) $f(x) = \mathrm{sh}\,(x+1)$

(g) $f(x) = \mathrm{sh}\, x^2$ (h) $f(x) = \mathrm{th}\, |x|$ (i) $f(x) = \mathrm{ar\ sh}\,(x-1)$

(j) $f(x) = \mathrm{ar\ ch}\, x^2$ (k) $f(x) = |\mathrm{ar\ sh}\, x|$ (l) $f(x) = \mathrm{ar\ ch}\,(-x)$

4. Gondoljuk meg, hogy ha egy f függvény az $I \subset \mathcal{D}(f)$ intervallumon valamilyen L konstanssal teljesíti a Lipschitz-feltételt, akkor az egyenletesen folytonos is I-n!
A fenti állítást is felhasználva vizsgáljuk meg, hogy az alábbi hozzárendeléssel definiált $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények egyenletesen folytonosak-e a megadott I intervallumon!

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ I = (0,1)$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2},\ I = [-3,3] \setminus \{-2\}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ I = (2,4)$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1},\ I = (0,\infty)$

(e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-2},\ I = [-1,2] \setminus \{\sqrt{2}\}$

(f) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-2},\ I = [2,\infty)$

(g) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x^3+x-2},\ I = [1,4]$

(h) $f(x) = |x-2|,\ I = (-4,4)$

(i) $f(x) = |x-2|,\ I = (0,\infty)$

(j) $f(x) = x^3+1,\ I = (0,\infty)$

(k) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x},\ I = (0,1)$

(l) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x},\ I = [1,2]$

(m) $f(x) = \sqrt{x},\ I = [0,2]$

(n) $f(x) = \sqrt{x},\ I = [1,\infty)$

(o) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ I = [-1,1]$

(p) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ I = (-\infty,-8)$