1. GYAKORLAT - elemi függvények deriváltjai, deriválási szabályok gyakorlása

1. Igazoljuk az alábbi azonosságokat!

1. $(\mathrm{c})' = 0 \ \ (c \in \mathbb{R})$
2. $(\mathrm{id}^n)' = n \cdot \mathrm{id}^{n-1} \ \ (n \in \mathbb{N})$
3. $(\exp_c)' = \ln c \cdot \exp_c \ \ \left(c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$
4. $(\log_c)' = \dfrac{1}{\mathrm{id} \cdot \ln c} \ \ \left(c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$
5. $(\sin)' = \cos$
6. $(\cos)' = -\sin$
7. $(\mathrm{tg})' = \dfrac{1}{\cos^2}$
8. $(\mathrm{ctg})' = -\dfrac{1}{\sin^2}$
9. $(\mathrm{sh})' = \mathrm{ch}$
10. $(\mathrm{ch})' = \mathrm{sh}$
11. $(\mathrm{th})' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$
12. $(\mathrm{cth})' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2}$
13. $(\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1)$
14. $(\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1)$
15. $(\mathrm{arc\ tg})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}$
16. $(\mathrm{arc\ ctg})'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}$
17. $(\mathrm{arsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \ x \in \mathbb{R}$
18. $(\mathrm{arch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x \in (1,+\infty)$
19. $(\mathrm{arth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \ x \in (-1,1)$
20. $(\mathrm{arcth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \ x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$

2. Számítsuk ki az alábbi hozzárendeléssel adott függvények deriváltjait!

(a) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3$
(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{4}$
(c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-5}$
(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
(e) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^{10}}$
(f) $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
(g) $f(x) = \sqrt{x}$
(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
(i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$
(j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{x}}$
(k) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{\dfrac{1}{x}\sqrt{x}}}$
(l) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}$
(m) $f(x) = \left(x^2+1\right)e^x$
(n) $f(x) = x \sin x$
(o) $f(x) = e^x \sin x$
(p) $f(x) = \ln x \cos x$
(q) $f(x) = x(\ln x - 1)$
(r) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
(s) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
(t) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

3. A kompozíciófüggvények deriválására vonatkozó azonosságot is felhasználva számítsuk ki az alábbi hozzárendeléssel adott függvények deriváltjait!

(a1) $f(x) = \sin^5 x$ (a2) $f(x) = \sin 5x$ (a3) $f(x) = \sin x^5$

(b1) $f(x) = \sin^5 5x^5$ (b2) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (b3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c1) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ (c2) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ (c3) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2}$

(d1) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (d2) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}$ (d3) $f(x) = e^{10} \sin 5x$

(e1) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ (e2) $f(x) = \ln \sin x$ (e3) $f(x) = \ln \ln x$

(f1) $f(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ (f2) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ (f3) $f(x) = \arcsin 2x$

(g1) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$ (g2) $f(x) = \ln \lg x$ (g3) $f(x) = \ln 10^x$

(h1) $f(x) = \lg e^x$ (h2) $f(x) = x^{2x}$ (h3) $f(x) = x^{\sin x}$

(i1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (i2) $f(x) = \frac{1}{\lg 2^x}$ (i3) $f(x) = -xe^{-x}e^{-e^{-x}}$

(j1) $f(x) = \frac{\sin x}{x} \operatorname{arc\ tg} x$ (j2) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x$ (j3) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$

(k1) $f(x) = |x|$ (k2) $f(x) = ||x-2|-2| + 1$

4. Számítsuk ki $f'(0)$ és $f'(1)$ értékét, ahol

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (b) $f(x) = (x-1)^2$ (c) $f(x) = \operatorname{ch} 2x$ (d) $f(x) = \sin^2 x$

(e) $f(x) = 2^{x-1}$ (f) $f(x) = \sqrt{x}e^x$ (g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (h) $f(x) = \ln(1+x^2)$

5. Számítsuk az $f'(1), f'(2), f'(3)$ értékeket, ha $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$!