## 3-4. GYAKORLAT - deriválhatóság, függvényelemzés

1. Mutassunk példát olyan folytonos $f$ és $g$ függvényekre, amelyek értelmezve vannak az $a$ pont egy környezetében, emellett

   (a) sem $f$, sem $g$ nem deriválhatók $a$-ban, viszont $f+g$ deriválható $a$-ban;

   (b) sem $f$, sem $g$ nem deriválhatók $a$-ban, viszont $fg$ deriválható $a$-ban;

   (c) $f$ nem deriválható $a$-ban, de $g$ és $fg$ is deriválható $a$-ban;

   (d) $f$ nem deriválható $g(a)$-ban, de $g$ és $f \circ g$ is deriválható $a$-ban;

   (e) * $f$ nem deriválható $g(a)$-ban, $g$ nem deriválható $a$-ban, viszont $f \circ g$ deriválható $a$-ban;

   (f) $f(a) = 0$ és sem $f$, sem $f^4$ nem deriválható $a$-ban;

   (g) $f^{-1}$ létezik és nem deriválható $f(a)$-ban, de $f$ deriválható $a$-ban!

2. Legyenek $f$ és $g$ az $a$ pontban deriválható függvények, emellett $f(a) = g(a)$, valamint $f'(a) = g'(a)$. Igazoljuk, hogy ha $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ teljesül valamilyen $h$ függvényre az $a$ pont egy környezetében, akkor $f'(a) = h'(a) = g'(a)$ is igaz!

3. Jellemezzük azokat az $f$ függvényeket, amelyekre az $x \to |x| \cdot f(x)$ hozzárendeléssel adott függvény deriválható 0-ban!

4. Legyen $f$ az alábbi hozzárendeléssel adott

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ha} \quad x \in (-\infty, x_0], \\ f_2(x), & \text{ha} \quad x \in [x_0, \infty), \end{cases}$$

   ahol $f_1$ és $f_2$ a fenti intervallumoknál bővebb halmazon értelmezett és ott deriválható függvények. Igazoljuk, hogy $f$ pontosan akkor deriválható $\mathbb{R}$-en, ha $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$ teljesül!

5. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények közül melyek deriválhatók a *nulla* pontban!

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x \leq 0, \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ \sin x, & \text{ha} \quad x \leq 0, \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq 0, \\ x \ln x, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq 0, \\ x^{\frac{3}{2}} \ln x, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ 1, & \text{ha} \quad x \leq 0, \end{cases}$

   (f) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$

   (g) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$

   (h) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q}^*, \end{cases}$

6. Elemezzük az alábbi hozzárendeléssel adott függvényeket a következő szempontok szerint.

- Értelmezési tartomány és torlódási pontjainak meghatározása.
- A függvény zérushelyei és tengelymetszetei (ha lehetséges).
- Folytonosság (féloldali is), szakadási helyek.
- Határérték az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban ($\pm\infty$-ben is).
- Monotonitási viszonyok
- Szélsőérték-vizsgálat: lokális és globális szélsőértékek.
- Konvexitás-konkávitás, inflexiós pontok.
- A függvény grafikonja.
- Értékkészlet meghatározása.

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
(c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
(d) $f(x) = xe^x$
(e) $f(x) = xe^{-x^2}$
(f) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$
(g) $f(x) = x - \ln x$
(h) $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$
(i) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
(j) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$
(k) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$
(l) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$
(m) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\operatorname{arctg} x$
(n) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1}$
(o) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$