5-6. GYAKORLAT - középértéktételek, konvex függvények, Taylor-polinomok

1. Igazoljuk, hogy ha egy polinomnak legalább k darab gyöke van, akkor deriváltja legalább $k-1$ helyen nulla!

2. Legyen $f:[x_0,x_n]\to\mathbb{R},\ f^{(n-1)}:[x_0,x_n]\to\mathbb{R}$ folytonos, és létezik az $f^{(n)}:(x_0,x_n)\to\mathbb{R}$ n-edik deriváltfüggvény. Tudjuk továbbá, hogy léteznek $x_0<x_1<...<x_n,\ f(x_i)=0, i=0,...,n$ pontok. Mutassuk meg, hogy létezik $\xi\in(x_0,x_n)$, amelyre $f^{(n)}(\xi)=0$!

3. Igazoljuk, hogy ha $f''=0$ teljesül az I nyílt intervallumon, akkor f ott egy elsőfokú polinomfüggvény!

4. Igazoljuk, hogy ha $f\in D(I)$ és az $x_1,x_2\in I, x_1<x_2$ pontokra fennáll, hogy $f(x_1)=x_1$ és $f(x_2)=x_2$, akkor van olyan $x\in(x_1,x_2)$, amelyre $f'(x)=1$ teljesül!

5. Igazoljuk, hogy van olyan $x\in(0,1)$, amelyre az $f(x)=x^4$ és $g(x)=xe^{x-1}$ hozzárendeléssel definiált függvények deriváltjai azonosak!

6. Van-e olyan függvény, amelynek deriváltja a sgn függvény?

7. Legyen f differenciálható, φ monoton növő és differenciálható I-n, emellett $|f'(x)|<\varphi'(x)\ \forall x\in I$. Lássuk be, hogy ekkor $|f(x)-f(y)|<\varphi(x)-\varphi(y)$, ha $x>y$!

8. Az előző feladat segítségével igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket!

   (a) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x),\quad x>0$ (b) $x-\dfrac{x^3}{3}<\tan x,\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

   (c) $1+\ln x<2\sqrt{x},\quad x>1$ (d) $\mathrm{sh}x^2>x^2,\quad x\in\mathbb{R}^+$

   (e) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ (f) $|\arctan(a)-\arctan(b)|\le|a-b|$

   (g) $\dfrac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x,\quad x>0$ (h) $\dfrac{a-b}{a}\le\ln\dfrac{a}{b}\le\dfrac{a-b}{b},\quad 0<b<a.$

9. Igazoljuk, hogy ha f és g az I intervallumon konvex függvények, akkor tetszőleges $c\in\mathbb{R}^+$ esetén cf és $f+g$ konvexek I-n!

10. Igazoljuk, hogy ha f az I intervallumon konvex függvény, akkor tetszőleges $c\in\mathbb{R}^+$ esetén az $x\to f(cx)$ és $x\to f(c+x)$ hozzárendeléssel adott függvények is konvexek I-n!

11. Mutassunk olyan f és g az I intervallumon konvex függvényeket, melyekre fg nem konvex az I intervallumon!

12. Igazoljuk, hogy ha f és g függvények az I intervallumon pozitívak, konvexek és monoton növők, akkor fg is konvex az I intervallumon!

13. Igazoljuk, hogy ha $f\in D(I)$ és f konvex I-n, akkor
$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
teljesül minden $x_0,x\in I$, $x_0\le x$ esetén!

14. Határozzuk meg az összes olyan $f:I\to\mathbb{R}$ függvényt, amely egyszerre konvex és konkáv is az I intervallumon!

15. Adjuk meg az f függvény grafikonját az $(a, f(a))$ pontban érintő egyenes egyenletét az alábbi esetekben!

(a) $f(x) = \sin x, \quad a = 0$ (b) $f(x) = x^2, \quad a = 0$ (c) $f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad a = 1$ (e) $f(x) = \sqrt{x+3}, \quad a = 1$ (f) $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}, \quad a = -1$

16. Adjuk fel a következő függvények a körüli n-ed rendű Taylor-polinomját!

(a) $f(x) = \sin 2x, \quad a = 0, n = 2$ (b) $f(x) = 1 - 2x^2 + x^4, \quad a = 0, n = 3$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1, n = 2$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 0, n = 2$

(e) $f(x) = \ln\ x, \quad a = 1, n = 3$ (f) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad a = 0, n = 2$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}, \quad a = 1, n = 3$ (h) $f(x) = \sin(\sin x), \quad a = 0, n = 3$

(i) $f(x) = x^x - 1, \quad a = 1, n = 3$ (j) $f(x) = c \cdot \operatorname{ch}\dfrac{x}{c}, \quad a = 0, n = 2$

17. A l'Hospital-szabály (esetleg többszöri) felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 x - 1}{\sin 2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \log_2(2+x)}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+\ln x} - 1}{1 - \sqrt{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - x - 4}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ (i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - (x-1)}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^{x^x} - 1\right)$ (l) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{n}{x^n - 1} - \dfrac{m}{x^m - 1}\right), n, m \in \mathbb{R}^+$