7-8. GYAKORLAT - Riemann-integrálok, primitív függvények

Néhány gyakran használt primitív függvény (c mindenhol tetszőleges konstansfüggvényt jelöl; a megadott függvények értelmezési tartománya a szokásos):

$$\int \mathrm{Id}^\alpha = \frac{\mathrm{Id}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{\mathrm{Id}} = \ln|\mathrm{Id}| + c \qquad \int \exp = \exp + c$$

$$\int \exp_a = \frac{\exp_a}{\ln\ a} + c,\ (1 \neq a \in \mathbb{R}^+) \qquad \int \sin = -\cos + c \qquad \int \cos = \sin + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2} = \mathrm{tg}\ + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2} = -\mathrm{ctg}\ + c \qquad \int \mathrm{sh} = \mathrm{ch} + c$$

$$\int \mathrm{ch} = \mathrm{sh} + c \qquad \int \frac{1}{\mathrm{sh}^{\,2}} = -\mathrm{cth}\ + c \qquad \int \frac{1}{\mathrm{ch}^{\,2}} = \mathrm{th}\ + c$$

$$\int \frac{1}{1-\mathrm{Id}^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c \qquad \int \frac{1}{1+\mathrm{Id}^2} = \mathrm{arctg}\ + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Id}^2}} = \arcsin\ + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Id}^2-1}} = \ln\left|\mathrm{Id}\ + \sqrt{\mathrm{Id}^2-1}\right| + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Id}^2}} = \mathrm{ar\ sh}\ + c$$

Megjegyzés: a primitív függvényekre vonatkozó feladatokban a függvények változóját x-szel jelöljük, így a $\mathrm{d}x$ szimbólumot többször elhagyjuk.

1. Igazoljuk, hogy teljesülnek a következő azonosságok!

   (a) $\ln|x+\sqrt{x^2-1}| = \begin{cases} \mathrm{ar\ ch}\, x, & \text{ha } x<1 \\ -\mathrm{ar\ ch}\ -x, & \text{ha } x>1 \end{cases}$ (b) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \begin{cases} \mathrm{ar\ th}\, x, & \text{ha } |x|<1 \\ \mathrm{ar\ cth}\, x, & \text{ha } |x|>1 \end{cases}$

2. Mutassunk példát olyan folytonos f és g függvényekre, amelyekre $f, g \notin \mathcal{R}[a,b]$, de $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ teljesül!

3. Igazoljuk, hogy ha $f \in C[a,b]$, valamint $f \geq 0$, de f nem azonosan nulla, akkor $\displaystyle\int_a^b f > 0$ teljesül!

4. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathcal{R}[-a,a]$ valamilyen $a \in \mathbb{R}^+$ esetén, emellett f páratlan függvény, akkor $\int_{-a}^a f = 0$ teljesül!

5. Legyen $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Igazoljuk, hogy ha f konvex, akkor $\displaystyle\int_a^b f \leq \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$. Igaz az állítás megfordítása?

6. Számítsuk ki a definíció alapján a az alábbi Riemann-integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^3 2\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 \mathrm{sgn}\, x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|\,\mathrm{d}x$

7. Számítsuk ki az alábbi primitív függvényeket!

(a) $\int 1-6x^2$ (b) $\int \cos x - x$ (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}$

(d) $\int 3\mathrm{sh}\, x - e^{-x}$ (e) $\int 5\cdot 2^x - 3\sin x$ (f) $\int \mathrm{tg}^2\, x$

(g) $\int \frac{x+1}{x}$ (h) $\int \frac{x}{x+1}$ (i) $\int \frac{3}{\cos^2 x}$

(j) $\int \frac{\cos^2 x - 5}{1+\cos 2x}$ (k) $\int \frac{x^2}{x^2+1}$ (l) $\int \frac{1}{4\cdot\sqrt{5-5x^2}}$

8. Számítsuk ki az alábbi primitív függvényeket; használjuk minden esetben az alábbi (lineáris helyettesítéssel) kapott formulát (tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és c konstans esetén)!

$$\int f = F + c \Leftrightarrow \int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

(a) $\int e^{5x+4}$ (b) $\int \sqrt[4]{7x-16}$ (c) $\int (1-2x)^3$

(d) $\int \frac{1}{1-x}$ (e) $\int \frac{1}{1+2x}^{3}$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x}}$

(g) $\int \cos 2x$ (h) $\int \sin^2 x$ (i) $\int \sqrt{e^x+1}$

(j) $\int \frac{3}{4x^2-4x+2}$ (k) $\int \frac{2}{x^2+2x+5}$ (l) $\int \mathrm{th}^2\,(1-x)$

9. Számítsuk ki az alábbi primitív függvényeket felhasználva a következő azonosságokat (c tetszőleges konstans)!

$$\int f^{\alpha}(x)f'(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \text{ ha } \alpha \neq -1$$

(a) $\int x(x^2+1)^4$ (b) $\int x^2(2x^3+1)^5$ (c) $\int \sin x \cos^3 x$

(d) $\int \sin^4 x \sin 2x$ (e) $\int \frac{\ln\ 5x}{x}$ (f) $\int \frac{\sqrt{\ln^{\,3} x}}{x}$

(g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (h) $\int (x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x+1}$ (i) $\int 2^{x+1}\cdot\sqrt{2^x-1}$

(j) $\int \frac{3}{(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arctg}\, x}}$ (k) $\int \frac{\sin 2x}{(5-\sin^2 x)^5}$ (l) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = |\ln\ f(x)|$$

(a) $\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+1}$ (b) $\int \frac{\sin 2x}{5+\cos^2 x}$ (c) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$

(d) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}+1)}$ (e) $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ (f) $\int \frac{1}{x \cdot \ln\, x}$

(g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (h) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}$ (i) $\int 2x \cdot \operatorname{tg} x^2$

10. Határozzuk meg az alábbi primitív függvényeket parciális integrálás alkalmazásával!

(a) $\int x\cos x$ (b) $\int (2x+3)\sin 6x$ (c) $\int xe^{3x}$

(d) $\int x^2 \operatorname{ch} x$ (e) $\int \ln\, 2x$ (f) $\int \arcsin x$

(g) $\int \operatorname{arctg} x$ (h) $\int \operatorname{arsh} x$ (i) $\int \operatorname{arch} x$

(j) $\int e^x \sin 2x$ (k) $\int \frac{\cos(3x-1)}{2^x}$ (l) $\int \sqrt{e^x} \operatorname{sh}(1-2x)$

(m) $\int \ln^3 x$ (n) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ (o) $\int \arcsin^2 x$

11. Határozzuk meg az alábbi (racionális törtfüggvényekre vonatkozó) primitív függvényeket!

(a) $\int \frac{3}{(6-2x)^2}$ (b) $\int \frac{2}{(1+2x)^5}$ (c) $\int \frac{2x-1}{(2x+1)^3}$ (d) $\int \frac{6x-5}{(1-2x)^4}$

(e) $\int \frac{2}{3x^2+6x+15}$ (f) $\int \frac{1}{x^2+6x+9}$ (g) $\int \frac{1}{x^2+8x+12}$ (h) $\int \frac{2x-3}{x^2+4x-5}$

(i) $\int \frac{2x}{x^2+5}$ (j) $\int \frac{6x+1}{3x^2+x-2}$ (k) $\int \frac{5x-6}{x^2-2x+10}$ (l) $\int \frac{x+2}{x^2-x+2}$

(k) $\int \frac{1}{1-x^2}$ (l) $\int \frac{2}{x^2-3x+2}$ (m) $\int \frac{4}{x^2+5x+6}$ (n) $\int \frac{5}{x(x^2+4)}$

(o) $\int \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2}$ (p) $\int \frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$ (q) $\int \frac{2x^2}{x^4-1}$

12. Határozzuk meg az alábbi (trigonometrikus függvényekre vonatkozó) primitív függvényeket!

(a) $\int \sin^7 x$ (b) $\int \cos^4 x$ (c) $\int \sin^3 x \cos^4 x$

(d) $\int \sin^4 x \cos^6 x$ (e) $\int \sin^2 2x \cos^3 x$ (f) $\int \cos^2 2x \cos 3x$

13. Megfelelő helyettesítést alkalmazva határozzuk meg az alábbi primitív függvényeket!

(a) $\int \frac{1}{16x^2+36}$ (b) $\int \frac{1}{25x^2-16}$ (c) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ (d) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(e) $\int \sqrt{1-x^2}$ (f) $\int \sqrt{x^2-1}$ (g) $\int \sqrt{2-x^2}$ (h) $\int \sqrt{2x^2-1}$

14. A nevezetes $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítés alkalmazásával számítsuk ki az alábbi primitív függvényeket!

(a) $\int \frac{1}{\sin x}$ (b) $\int \frac{1}{\cos x}$ (c) $\int \frac{1-\sin x}{1-\cos x}$ (d) $\int \frac{1}{1+\sin x}$