10-11. GYAKORLAT - Riemann-integrálok, improrius integrálok

A következő feladatokban, ahol nem adjuk meg, ott $I \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges intervallumot jelöl.

1. Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat; ahol lehet, használjuk a Newton-Leibniz tételt!

   (a) $\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x$ (b) $\int_{-1}^1 (x^2-1) \, \mathrm{d}x$ (c) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x} \, \mathrm{d}x$ (d) $\int_3^5 \frac{1}{x-1} \, \mathrm{d}x$

   (e) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int_0^1 x \sin x \, \mathrm{d}x$ (g)* $\int_{-1}^1 x^5 e^{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$ (h) $\int_1^2 \ln x \, \mathrm{d}x$

   (i) $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x$ (j) $\int_0^2 \frac{x}{e^x} \, \mathrm{d}x$ (k) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ (l) $\int_0^{\ln 2} e^x \cos e^x \, \mathrm{d}x$

   (m) $\int_1^4 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, \mathrm{d}x$ (n) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$ (o)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x$

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ intervallum esetén $\mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(I)$ vektortér!
3. Igazoljuk, hogy tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ intervallum esetén $C(I) \subset \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(I)$ teljesül!
4. Mutassunk $I = (0,1)$ esetén olyan $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $f \notin \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(I)$!
5. Igazoljuk, hogy $f \in \mathcal{R}^{\mathrm{loc}}(I)$ esetén

   f egy integrálfüggvénye monoton növő $\Leftrightarrow$ f minden integrálfüggvénye monoton növő $\Leftarrow$ $f \geq 0$.

   Igazoljuk, hogy ha $f \in C(I)$, akkor az utolsó következtetés helyett ekvivalencia is fennáll!
6. Adjunk meg olyan integrálfüggvényt, amely az értelmezési tartományának valamely belső pontjában nem deriválható!
7. Igazoljuk, hogy ha az $f \in C(I)$ függvény egy F integrálfüggvényére $F(a) = F(b)$, ahol $a \neq b$, akkor f-nek van gyöke I-ben!
8. Számítsuk meg az alábbi improprius integrálokat!

   (a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^\infty x e^{-x} \, \mathrm{d}x$ (c) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$ (d) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} \, \mathrm{d}x$

   (e) $\int_2^\infty \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$ (g) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$ (h) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x$

   (i) $\int_0^\infty x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ (j) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$

9. Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyek léteznek, és melyek konvergensek!

   (a) $\int_0^\infty x^5 e^{-x} \, \mathrm{d}x$ (b) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x} \, \mathrm{d}x$ (c) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x$ (d) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

   (e)* $\int_0^1 \frac{1}{\ln x} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int_1^\infty \frac{1}{\ln^5 x} \, \mathrm{d}x$ (g) $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x$ (h) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} \, \mathrm{d}x$

   (i) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ (j) $\int_1^\infty \frac{2^x}{e^x+1} \, \mathrm{d}x$ (k) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x$

10. Mutassunk olyan $f \in C[0,\infty)$ függvényt, amelyre $\int_0^\infty f$ létezik, de $\lim\limits_{\infty} f$ nem létezik!

11. Mutassunk olyan $f \in C[0,\infty)$ függvényt, amelyre $\int_0^\infty f$ létezik, de f nem korlátos semmilyen (b,∞) intervallumon!

12. Mutassunk olyan $f \in C[0,\infty)$ függvényt, amelyre $\int_0^\infty f$ létezik, de $\int_0^\infty |f|$ nem létezik!

13. Mutassunk olyan f és g függvényeket, amelyek improprius integrálja konvergens a $(0,1)$ intervallumon, de szorzatuk improprius integrálja nem konvergens!

14. Mutassunk olyan f és g függvényeket, amelyek improprius integrálja nem konvergens a $(0,\infty)$ intervallumon, de szorzatuk improprius integrálja konvergens!