12-13. GYAKORLAT - Hatványsorok

1. Számítsuk ki az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^{3n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+3}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} x^n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) x^n$ (j) $\sum_{n=2}^{\infty} (n^3-1)(x+1)^n$ (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n+n^3} x^n$ (l) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

(m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ (o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n$ (p) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n^2}$

2. Az $\frac{1}{1-\mathrm{Id}}$ függvény nulla körüli Taylor-sorának felhasználásával adjuk meg az alábbi hozzárendeléssel definiált függvények nulla körüli Taylor-sorát! Adjuk meg a megfelelő konvergenciasugarat is minden esetben!

(a) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ (b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ (c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (d) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (f) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ (g) $f(x) = \ln(1+x)$ (h) $f(x) = \ln(1-x)$

(i) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ (j) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ (k)* $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$

3. Igazoljuk, hogy ha egy hatványsor konvergenciahalmaza $\mathbb{R}$, akkor együtthatóinak sorozata nullához tart!

4. Van-e olyan hatványsor, amelynek konvergenciahalmaza az (a) $[1,4] \setminus \{2\}$ (b) $[0,\infty)$ halmaz?

5. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara megegyezik a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (x-x_0)^n$, valamint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugarával!

6. Lehet-e két különböző hatványsor összegfüggvénye azonos?

7. Lehet-e két azonos középű, de egymástól különböző hatványsor összegfüggvénye azonos?