ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
1. FELADATSOR

2010. február 4.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

1. Mutassuk meg, hogy a
$$\sqrt{2},\ \sqrt{1+\sqrt{2}}, \dots, \sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{2}}}, \dots$$
sorozat szigorúan monoton növő és felülről korlátos! Számítsuk ki a határértékét!

2. Legyenek $x_1 < x_2$ tetszőleges számok. Tekintsük az
$$x_1,\ x_2,\ x_3 := \frac{x_1+x_2}{2}, \dots,\ x_{n+1} := \frac{x_{n-1}+x_n}{2}, \dots$$
sorozatot! Mutassuk meg, hogy az (x_{2k+1}) sorozat szigorúan monoton növő, az (x_{2k}) sorozat szigorúan monoton fogyó, mindkettő konvergens, és határértékük
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = \frac{x_1+2x_2}{3}\ !$$

3. Legyenek $0 < a_0 < b_0$, és képezzük a következő számpárokat:
$$a_1 := \frac{2}{\frac{1}{a_0}+\frac{1}{b_0}}, \quad b_1 := \frac{a_0+b_0}{2};$$
$$a_2 := \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}}, \quad b_2 := \frac{a_1+b_1}{2};$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} := \frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2};$$
$$\vdots$$
Mutassuk meg, hogy az (a_n) sorozat szigorúan monoton növő, a (b_n) sorozat szigorúan monoton fogyó, mindkettő konvergens, és határértékük
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{a_0 \cdot b_0}\ !$$

4. Számítsuk ki az
$$a_n := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$
sorozat határértékét!

5. Mutassuk meg, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{1\cdot 3 \cdots (2n-1)} = +\infty.$$

6. Igazoljuk, hogy ha $a_n \to a$ és $a_n < a$ minden n esetén, akkor az (a_n) sorozat átrendezhető monoton növő sorozattá! Hasonlóan, ha $a_n > a$, teljesül minden n-re, akkor (a_n) monoton fogyó sorozattá rendezhető át!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
2. FELADATSOR

2010. február 11.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

7. Legyen $a_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$ és $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n.$$

8. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ számokra!
$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

9. Legyen $a_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Igazoljuk az alábbiakat!

a)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2;$$

b)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{a_k} \geq n \cdot \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k);$$

c)
$$(\log_a a_1)^2 + (\log_a a_2)^2 + \cdots + (\log_a a_n)^2 \geq \frac{1}{n},$$
ha $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = a \neq 1$.

10. Lássuk be a következő egyenlőtlenséget tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ számokra!
$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

11. Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adott pozitív számok! Határozzuk meg az alábbi kifejezés minimumát, feltéve, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = 1$!
$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

12. Legyenek a, b, c tetszőleges pozitív számok. Igazoljuk az alábbiakat!

a)
$$\frac{b^2 - a^2}{c + a} + \frac{c^2 - b^2}{a + b} + \frac{a^2 - c^2}{b + c} \geq 0;$$

b)
$$\frac{1}{8} \cdot \frac{(a - b)^2}{a} \leq \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{(a - b)^2}{b}, \text{ ha } b \leq a.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
3. FELADATSOR

2010. február 25.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

13. Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok és $a := a_1 + \cdots + a_n$. Mutassuk meg, hogy
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leq \frac{a^2}{4}.$$

14. Igazoljuk a *Weierstrass-egyenlőtlenségek*et:
Ha $0 < a_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$ és $a_1 + \cdots + a_n < 1$, akkor
a)
$$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) < \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \ ;$$
b)
$$1 - \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n}(1 - a_k) < \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k} \ .$$

15. Legyenek $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ és $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adott nemnegatív számok úgy, hogy $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Igazoljuk:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{a_k}\right) \leq \frac{A^2}{G^2} \ ,$$
ahol $A = \frac{a_1 + a_n}{2}$ és $G = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$.

16. Tetszőleges n pozitív egész szám esetén jelölje $\sigma(n)$ az n összes pozitív osztójának összegét, $\tau(n)$ pedig ezen osztók számát. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq \sqrt{n}.$$

17. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra teljesülnek az alábbiak:
$$0 < a_n < 1, \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét!

18. Legyen $p \in \mathbb{N}$ és $a > 0$ adva. Definiálja az (a_n) sorozat elemeit
$$a_1 > 0 \text{ (tetszőleges) és } a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
4. FELADATSOR

2010. március 4.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

19. Legyen (a_n) az alábbi rekurzióval megadott sorozat:
$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékét!

20. Legyen $a > 0$ rögzített, az (a_n) sorozat pedig
$$a_1 > 0 \text{ (tetszőleges) és } a_{n+1} = a_n \cdot \frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Határozzuk meg, a_1 milyen értékeire lesz a sorozat konvergens, és adjuk meg minden esetben a határértékét!

21. Legyen a tetszőleges rögzített szám, az (a_n) sorozat pedig
$$a_1 \in \mathbb{R} \text{ (tetszőleges) és } a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Határozzuk meg, a_1 milyen értékeire lesz a sorozat konvergens, és adjuk meg minden esetben a határértékét!

22. Legyen $c > 0$, $b > a > 0$, és definiáljuk az (a_n) sorozatot az alábbi módon:
$$a_1 = c,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + ab}{a+b}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Határozzuk meg, milyen a, b, c értékekre lesz a sorozat konvergens, és adjuk meg minden esetben a határértékét!

23. Legyen
$$a_1 > 0 \text{ (tetszőleges) és } a_{n+1} = 6 \cdot \frac{1+a_n}{7+a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Bizonyítsuk be, hogy (a_n) konvergens, és számítsuk ki a határértékét!

24. Számítsuk ki a
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$$
határértéket!

25. Mely $x \in \mathbb{R}$ értékekre létezik és mennyi a
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k})$$
határérték?

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
5. FELADATSOR

2010. március 11.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

26. Mely $x \in \mathbb{R}$ értékekre létezik és mennyi a

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{2}{x^{2^k} + x^{-2^k}}\right)$$

határérték?

27. Mely $x \in \mathbb{R}$ értékekre teljesül az alábbi?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2009}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2010}$$

28. Legyenek $a \geq b > 0$ adva, és definiáljuk az (a_n) sorozatot mint

$$a_1 := a + b, \quad a_n = a_1 - \frac{ab}{a_{n-1}}, \; n \geq 2.$$

Adjunk képletet a_n-re, és számítsuk ki $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$-et (ha létezik)!

29. Legyen $a \in \{1,2,\ldots,9\}$ adva. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a + aa + \cdots + \overbrace{aa...a}^{n\,db}}{10^n}$$

határértéket!

30. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_p$ adott pozitív számok. Határozzuk meg:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[p]{(n+a_1)\cdot(n+a_2)\cdots(n+a_p)} - n\right)$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
6. FELADATSOR

2010. március 18.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

31.
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=?$$

32. Legyenek (a_n) és (b_n) az alábbi módon definiált sorozatok:
$$a_1=3,\ b_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2b_n,\ b_{n+1}=a_n+b_n.$$
Továbbá legyen
$$c_n:=\frac{a_n}{b_n},\ n\in\mathbb{N}.$$
a) Mutassuk meg, hogy
$$|c_{n+1}-\sqrt{2}|<\frac{1}{2}|c_n-\sqrt{2}|!$$
b) Számítsuk ki $\lim_{n\to\infty} c_n$ értékét!

33. Igazoljuk!
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a,\quad a>0$$

34. Legyen
$$a_n:=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$
Igazoljuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

35. Legyen (a_n) az alábbi rekurzióval definiált sorozat:
$$a_1=1,\quad a_n=n(a_{n-1}+1),\ n=2{,}3,\ldots.$$
Határozzuk meg a
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$$
határértéket!

36. Bizonyítsuk:
$$\lim_{n\to\infty}(n!\,\mathrm{e}-[n!\,\mathrm{e}])=0,$$
ahol $[x]$ az x szám egészrészét jelöli.

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
7. FELADATSOR

2010. március 25.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

37. Mutassuk meg, hogy ha f korlátos [0,1]-en és valamely $a, b > 1$ számokra
$$f(ax) = bf(x),\ 0 \leq x \leq \frac{1}{a},$$
akkor
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0).$$

38. Számítsuk ki az alábbi határértéket!
$$\lim_{x\to 0+} x\left(\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{x}\right]\right) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

39. Legyen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $a \geq 0$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} f(a + n) = 0.$$
Létezik-e az $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ határérték?

40. Igazoljuk, hogy ha
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0,$$
akkor
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

41. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és tegyük fel, hogy a $g(x) = f(x) - x$ függvény periodikus, (egy) periódusa 1. Jelölje f^n az f függvény n. *iteráltját*, vagyis
$$f^1 := f, \quad f^n := f \circ f^{n-1}, n \geq 2.$$
Igazoljuk, hogy ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}$$
létezik, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(0)}{n}.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
8. FELADATSOR

2010. április 8.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

42. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, periodikus függvények, T_1 és T_2 periódussal, ahol T_1/T_2 racionális. Tegyük fel továbbá, hogy
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$
Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f = g$.

43. Egyenletesen folytonos-e $[0, +\infty)$-en az
$$f(x) = x \cdot \sin x$$
függvény?

44. Legyen f folytonos $[a, b]$-n. Bizonyítsuk be, hogy az
$$m(x) := \inf \{f(s) : s \in [a, x]\}, \quad M(x) := \sup \{f(s) : s \in [a, x]\}$$
függvények is folytonosak $[a, b]$-n!

45. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, periodikus $T > 0$ periódussal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan x_0, melyre
$$f(x_0 + T/2) = f(x_0).$$

46. Tegyük fel, hogy az f függvényre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az
$$f(f(x)) = -x$$
egyenlőség. Mutassuk meg, hogy f nem lehet folytonos!

47. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely minden értékét pontosan 2-szer veszi fel?

48. Igaz-e, hogy (a_n) Cauchy-sorozat?
$$a_n := 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \cdots + \frac{n^2}{4^n}$$

49. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat kielégíti az alábbit:
$$|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda \cdot |a_n - a_{n+1}|, \quad n \in \mathbb{N},$$
ahol $\lambda \in (0,1)$. Igazoljuk, hogy (a_n) konvergens!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
9. FELADATSOR

2010. április 15.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

50. Tegyük fel, hogy az $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to (0, +\infty)$ függvényre
$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2$$
teljesül. Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$!

51. Adjunk példát olyan f függvényre, melyre
$$\lim_{x\to 0}(f(x) + f(2x)) = 0$$
teljesül, de $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ nem igaz!

52. Igazoljuk, hogy ha az előző feladat feltétele mellett teljesül, hogy létezik egy olyan φ függvény, melyre $f(x) \geq \varphi(x)$ a 0 egy kipontozott környezetében és $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, akkor $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$!

53. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzítve. Tegyük fel, hogy minden pozitív a számra
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(ax)}{x^\alpha} = g(a)$$
teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor $g(x) = c \cdot x^\alpha$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ alakú valamely $c \in \mathbb{R}$ számra!

54. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton függvényre
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$$
teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor bármely $c > 0$ esetén
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1!$$

55. Legyen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $a > 0$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} f(a \cdot n) = 0.$$
Létezik-e az $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ határérték?

56. Legyen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $a \geq 0$, $b > 0$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} f(a + b \cdot n) = 0.$$
Létezik-e az $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ határérték?

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
10. FELADATSOR

2010. április 22.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

57. Tegyük fel, hogy
$$\lim_{x\to 0} f\left(x\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\right)=0.$$
Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{x\to 0} f(x)=0$!

58. Határozzuk meg azon (a_n) és (b_n) sorozatokat, melyekre az
$$f(x)=\begin{cases} a_n+\sin \pi x, & \text{ha } x\in[2n,2n+1] \quad (n\in\mathbb{Z}) \\ b_n+\cos \pi x, & \text{ha } x\in(2n-1,2n) \quad (n\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$
függvény folytonos $\mathbb{R}$-en!

59. Hol folytonos az $f(x)=[x^2]\cdot\sin \pi x$ függvény?

60. Ábrázoljuk és jellemezzük folytonosság szempontjából a következő függvényt!
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n},\quad x\geq 0.$$

61. Legyen f folytonos $[0,1]$-en. Igazoljuk:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)=0.$$

62. A differenciálszámítás felhasználása nélkül igazoljuk, hogy egy I *nyílt* intervallumon konvex függvény folytonos is! Mi a helyzet, ha I nem nyílt?

63. Legyen $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ folytonos. Igazoljuk, hogy tetszőleges $x_1,\dots,x_n$ (a,b)-beli pontok esetén létezik $x_0\in(a,b)$, melyre
$$f(x_0)=\frac{1}{n}\cdot(f(x_1)+\dots+f(x_n))$$

64. Legyen P tetszőleges, nem azonosan 0 polinom. Igazoljuk, hogy a $|P(x)|=\mathrm{e}^x$ egyenletnek van megoldása!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
11. FELADATSOR

2010. április 29.

A megoldásokat csütörtök reggel 8.15-kor kell beadni személyesen, és akit felszólítok, az a táblánál oldja meg.

65. Legyenek $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \cdots < a_n < b_n$ valós számok. Igazoljuk, hogy a

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + a_k) + 2\prod_{k=0}^{n}(x + b_k), \quad x \in \mathbb{R}$$

polinom minden gyöke valós!

66. Legyen $f \in C[0,2]$ (azaz, f folytonos a $[0,2]$ intervallumon). Igazoljuk, hogy léteznek olyan $x_1, x_2 \in [0,2]$ számok, melyekre

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ és } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}\left(f(2) - f(0)\right).$$

67. Legyen $f \in C[0,n]$ valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, és tegyük fel, hogy $f(0) = f(n)$. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $x_1, x_2 \in [0,n]$ számok, melyekre

$$x_2 - x_1 = 1 \text{ és } f(x_2) = f(x_1).$$

68. Tegyük fel, hogy az f és g valós, folytonos függvények kommutálnak, vagyis

$$f(g(x)) = g(f(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Igazoljuk, hogy ha az $f(f(x)) = g(g(x))$ egyenletnek van megoldása, akkor az $f(x) = g(x)$ egyenletnek is van! Mutassuk meg egy példán, hogy f és g folytonossága nem elhagyható!

69. Legyen $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvény. Igazoljuk, hogy tetszőleges rögzített T esetén létezik olyan (x_n) sorozat, melyre

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ és } \lim_{n\to\infty}\left(f(x_n + T) - f(x_n)\right) = 0.$$

70. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos és szakaszonként szigorúan monoton (azaz, léteznek olyan $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ számok, hogy f szigorúan monoton a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumokon, $i = 0, \ldots, n-1$). Igazoljuk, hogy f legalább egy értékét páratlan sokszor veszi fel!

71. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és léteznek a $\lim\limits_{-\infty} f$ és $\lim\limits_{+\infty} f$ *véges* határértékek, akkor f egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en!

72. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ún. *Cauchy-féle függvényegyenletnek* az egész $\mathbb{R}$-en folytonos megoldásai csak az $f(x) = a \cdot x$ alakú lineáris függvények!