ANALÍZIS III. TEMATIKA

MATEMATIKATANÁR BSC
2010/2011. ŐSZI FÉLÉV

Tudnivalók a vizsgáról: A vizsga szóbeli. A vizsga során azt fogom felmérni, hogy a vizsgázó

(1) mennyire sajátította el a tananyag összefüggéseit – beleértve a korábbi félévekben tanultakkal való összefüggéseket is;
(2) pontosan ki tudja-e mondani a fontos definíciókat és állításokat (tételeket, következményeket stb.);
(3) tudja-e, hogy a fontos állítások (tételek, következmények stb.) bizonyításai milyen fontos állításokon múlnak.

Amilyen mértékben a vizsgázó a fentieket teljesítette, attól függően kap elégtelen és közepes közötti osztályzatot. A jó ill. jeles osztályzathoz a bizonyítások részleteit is kell tudni.

Minden vizsganap előtti nap reggel 9 órától tartok konzultációt (kivéve: a január 26., szerdai vizsga előtt január 24-én, hétfőn) – amennyiben ezt előzetesen e-mailben kérik (seszter@cs.elte.hu).

Az alábbi tematika segítséget ad a tananyag áttekintéséhez, de a vizsgán ennél konkrétabb kérdések várhatók. A jegyzetben *-al jelöltem, az előadáson pedig utaltam azokra a bizonyításokra illetve állításokra, példákra, amiket a vizsgára nem kell tudni – minden mást tudni kell.

1. Függvénysorozatok, függvénysorok

Pontonkénti és egyenletes konvergencia. Példa pontonként, de nem egyenletesen konvergens függvénysorozatra. Folytonosság, Riemann-integrálhatóság és differenciálhatóság öröklődése a limeszfüggvényre. Példák.
Függvénysor pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Folytonosság, Riemann-integrálhatóság és differenciálhatóság öröklődése a összegfüggvényre. Függvénysor egyenletes konvergenciájának Cauchy-féle feltétele. Weierstrass-kritérium függvénysor egyenletes konvergenciájára.
Hatványsorok konvergenciájának és összegfüggvényének tulajdonságai. Fourier-sorok. Kétszer folytonosan differenciálható függvény Fourier-sora.

2. Többváltozós függvények

A sík metrikus tulajdonságai. Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{R}^2$-en. Kétváltozós függvények grafikonja, folytonossága és határértéke. Átviteli elvek. Az előbbiek kiterjesztése $\mathbb{R}^p$-re.

3. Metrikus terek

Metrikus tér definíciója, fontos példák ($\mathbb{R}^p$-n, $b(H)$-n, diszkrét metrika). Metrikus térbeli alapfogalmak: gömbök, Cauchy-sorozat, konvergens sorozat, pontok osztályozása. Nyílt és zárt halmazok tulajdonságai. 4-4 példa nyílt és zárt halmazra. Teljes metrikus tér, példák. Banach-féle fixponttétel. Sorozatkompakt halmaz, tulajdonságok. $\mathbb{R}^p$-beli sorozatkompakt halmazok.

4. Határérték, folytonosság metrikus terekben

Metrikus terek között ható függvények folytonossága és határértéke, átviteli elvek, Lipschitz-tulajdonság. Példák. Kompozíciófüggvény folytonossága és határértéke. (Általánosított) Weierstrass-tétel. Egyenletes folytonosság. (Általánosított) Heine-tétel.

5. Jordan-mérték $\mathbb{R}^p$-n

Jordan-mérték bevezetése ($\mathbb{R}^2$-en és $\mathbb{R}^p$-n). Tulajdonságok. Folytonos függvény grafikonjának mérhetősége.

6. Riemann-integrál $\mathbb{R}^p$-n

Az p dimenziós integrál bevezetése. Tulajdonságok, integrálhatóság leghasznosabb kritériuma. Folytonos függvény integrálhatósága. Halmaz mérhetősége és az integrál kapcsolata. Fubini-tétel. Alkalmazások: Normáltartományon vett integrál, Cavalieri-elv.