Matematika BSc tanárszak
Analízis III. előadásjegyzet
2010/2011. őszi félév

Sikolya Eszter
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2011. október 11.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet a 2010/2011-es tanév őszi félévében tartott matematika tanárszakos Analízis III. kurzus anyagához készül. A jegyzet a félév során folyamatosan bővül, az utolsó változtatás dátuma a címlapon látható. A jegyzetben bizonyára előfordulhatnak hibák – ezek jelzését örömmel veszem a `seszter@cs.elte.hu` e-mail-címen!

Néhány szó a tanulásról.

1. Javaslom, hogy ezen jegyzeten kívül az előadásokon készült órai jegyzetet is tanulmányozzák!

2. Az anyag egyszeri, alapos elolvasása a megértést szolgálja – az anyag elsajátításához nem elég. Nagyban megkönnyíti és megrövidíti a vizsgaidőszaki felkészülést, ha a megértés a félév során folyamatosan történik, az anyagban való haladással párhuzamosan.

3. Az anyag első áttanulmányozása után – például a Tárgymutató segítségével – fejből próbálják meg leírni a legfontosabb definíciókat és tételeket! Ha valami nem megy, lapozzák fel egyből a megfelelő részt, és nézzék át újból!

4. Ha a definíciókat és tételeket elsajátították, csak akkor kezdjék el a bizonyítások megtanulását! Ez hasonlóan végezhető, ahogy az előző pontokban leírtam. Minden bizonyításnál elsősorban azokat a lényeges állításokat, tételeket jegyezzék meg, amely(ek) a bizonyítás fő lépéseit alkotják.

5. Végül, hogy az anyag nagyobb összefüggéseit is megértsék, szükség van a teljes anyag újból elolvasására, vagy legalábbis a főbb pontok áttekintésére.

TARTALOMJEGYZÉK

Első fejezet

Függvénysorozatok, függvénysorok

1.1. Emlékeztető

Az elmúlt félév során foglalkoztunk

$$\sum (a_n(x-x_0)^n) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \tag{1.1}$$

alakú végtelen összegek, ún. *hatványsorok* tulajdonságaival. Itt (a_n) adott valós sorozat, $x_0 \in \mathbb{R}$ adott szám (a hatványsor *középpontja*) – és azt a kérdést vizsgáltuk, hogy x függvényében hogyan viselkedik a fenti végtelen összeg. Az alábbi módon definiáltuk a hatványsor *konvergenciahalmazát*:

$$\mathrm{KH} := \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \sum (a_n(x-x_0)^n) \text{ konvergens} \right\},$$

és igazoltuk, hogy a KH halmaz egy x_0 középű r sugarú nyílt, zárt vagy félig nyílt intervallum, ahol

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0 \right)$$

a hatványsor ún. *konvergenciasugara*. Így $r \neq 0$ esetén a hatványsornak definiálható

$$\mathcal{D}(f) := (x_0 - r, x_0 + r)$$
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

összegfüggvénye, melynek $\mathcal{D}(f) \subset \mathrm{KH}$ értelmezési tartományán a hatványsor biztosan konvergens, és az $x \in \mathcal{D}(f)$ pontban $f(x)$ éppen a végtelen összeg értékét adja meg.
Láttuk azt is, hogy f szép analitikus tulajdonságokkal rendelkező függvény. Pontosabban, a következő tételeket bizonyítottuk.

1.1. Tétel. *Hatványsor összegfüggvénye* folytonos.

1.2. Tétel. *A pozitív konvergenciasugarú* $\sum (a_n(x-x_0)^n)$ *hatványsor összegfüggvénye* tetszőlegesen sokszor differenciálható *és a deriválás az (1.1)-ben tagonként végezhető, vagyis*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-x_0) + 3 \cdot 4a_4(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-x_0)^n,$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1) a_{n+k} (x-x_0)^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1.3. Tétel. *Legyen* $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ *pozitív konvergenciasugarú hatványsor. Ekkor a hatványsor összegfüggvényének van* primitív függvénye*, pl.*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Az alábbiakban azzal fogunk foglalkozni, hogy mi történik, ha az (1.1)-ben az $a_n(x-x_0)^n$ alakú összegzendő tagokat valamilyen f_n függvényekkel helyettesítjük. Tehát a

$$\sum f_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \ldots$$

alakú ún. *függvénysorok* vizsgálatával fogunk foglalkozni. Hasonlóan a végtelen numerikus sorokhoz, egy függvényekből álló végtelen összeget is a részletösszeg-sorozat határértékeként fogunk definiálni, tehát a $\sum f_n$ függvénysort azonosítjuk az (s_n) *függvénysorozat*tal, melynek egy tagja

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n$$

véges sok (n darab) függvény összege. Ezért először függvénysorozatok tulajdonságait vizsgáljuk, majd utána térünk rá a függvénysorok elemzésére.

1.2. Függvénysorozatok

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

1.4. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz hozzárendelünk egy $f_n : X \to \mathbb{R}$ függvényt. Az $n \mapsto f_n$ leképezést *függvénysorozat*nak nevezzük. Jelölésben $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vagy (f_n).

1.5. Definíció. Legyenek adva az $f : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az X *halmazon pontonként tart az* f *függvényhez*, ha minden $x \in X$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x)) = f(x),$$

vagyis az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens, és a határértéke az f függvény x helyen felvett értéke. Ekkor az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt az (f_n) függvénysorozat *limeszfüggvényé*nek nevezzük, és jelöljük:

$$f_n \to f.$$

Ha létezik a fenti tulajdonságú f, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens* X-en.

1.6. Példa. Legyen $X := (-1,1]$, $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $f_n \to f$, ahol

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

1.7. Definíció. Legyen (f_n) tetszőleges függvénysorozat, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. E sorozat *konvergenciahalmaza* a

$$\mathrm{KH}(f_n) = \mathrm{KH} = \{x \in X : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens}\}.$$

Ha $\mathrm{KH} \neq \emptyset$, akkor beszélhetünk limeszfüggvényről, melynek értelmezési tartománya $\mathcal{D}(f) := \mathrm{KH}$, és

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} (f_n(x)),\ x \in \mathrm{KH}.$$

1.8. Példa. Legyen $X := \mathbb{R}$.

1. $f_n(x) := x^n$, $\mathrm{KH}(f_n) = (-1{,}1]$;
2. $f_n(x) := \frac{\sin nx}{n}$, $\mathrm{KH}(f_n) = \mathbb{R}$.

Gondoljuk meg, hogy mit jelent: (f_n) az X halmazon pontonként tart az f-hez?

$$\forall x \in X : \lim_{n\to\infty} (f_n(x)) = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in X\text{-re } \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon, x) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

A következőkben bevezetünk egy olyan konvergenciafogalmat, ahol a fenti definícióban létező N küszöbindex nem függ x-től (csak ε-tól), vagyis ugyanaz az N jó az egész X halmazon.

1.9. Definíció. Legyenek adva az $f : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen tart f-hez az X halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X\text{-re.}$$

Ezzel ekvivalens:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

amivel ekvivalens:

$$a_n := \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty. \tag{1.2}$$

Jelölésben:

$$f_n \hookrightarrow f \quad X\text{-en.}$$

Ha létezik a fenti tulajdonságú f függvény, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens* X-en.

A definícióban szereplő ekvivalens megfogalmazások közül az utolsót, (1.2)-t használjuk a leggyakrabban konkrét függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának eldöntésére.

1.10. Példa.

1. $f_n(x) := \frac{1}{n}$, $X := [0{,}1]$, $f_n \hookrightarrow f \equiv 0$ $[0{,}1]$-en;
2. $f_n(x) := \frac{1}{x+n}$, $X := [0{,}1]$, $f_n \hookrightarrow f \equiv 0$ $[0{,}1]$-en.

1.11. *Megjegyzés.* Ha $f_n \hookrightarrow f$ az X halmazon, akkor (f_n) pontonként is tart f-hez X-en.

1.12. Példa.

1. Legyen $X := [0{,}1]$ és definiáljuk a következő függvénysorozatot, ld. 1.1. ábra.

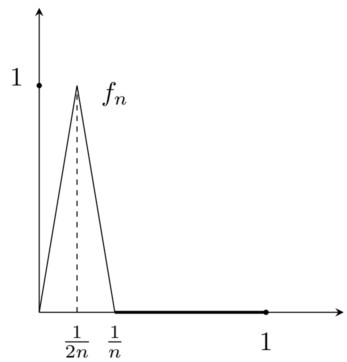
   Mivel minden $x \in [0{,}1]$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{N} < x$, ezért $f_n(x) = 0$, ha $n \geq N$, tehát $f_n(x) \to 0, n \to \infty$. Így $f_n \to f \equiv 0$ pontonként X-en. Másrészt világos, hogy

   $$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0,$$

   ezért (f_n) nem egyenletesen konvergens X-en.

2. Legyen $X := [0{,}1]$, $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Az 1.6. Példa alapján (f_n) pontonként konvergál X-en a

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0{,}1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



1.1. ábra. Példa pontonként de nem egyenletesen konvergens függvénysorozatra

függvényhez. Másrészt

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

tehát

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \nrightarrow 0,$$

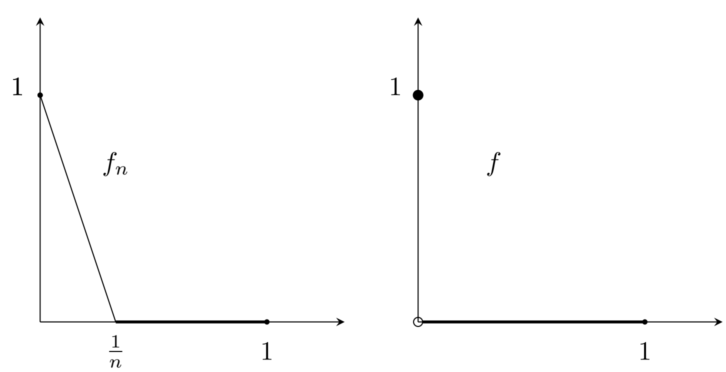
(f_n) nem egyenletesen konvergens.

Probléma. Az (f_n) függvénysorozat milyen tulajdonságai öröklődnek át az f limeszfüggvényre?
Ha $f_n \to f$ pontonként, akkor vannak ellenpéldák.
Ha $f_n \hookrightarrow f$, akkor vannak tételek.

1.2.1. Folytonosság

Probléma. Igaz-e, hogy ha az (f_n) függvénysorozat tagjai folytonosak (az x_0 pontban), $f_n \to f$ pontonként, akkor f is folytonos (x_0-ban)?

1.13. Példa. Tekintsük az 1.2. ábrát. Könnyen látható, hogy $f_n \to f$, az f_n függvények folytonosak minden n esetén, viszont f szakad 0-ban.



1.2. ábra. Példa pontonként konvergens folytonos függvények sorozatára, ahol a limeszfüggvény nem folytonos

1.14. Tétel. *Legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melyre az $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények folytonosak valamely $x_0 \in X$ pontban, valamint $f_n \hookrightarrow f$ X-en. Ekkor f is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Megmutatjuk, hogy van olyan $\delta > 0$ szám, melyre ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Az 1.9. Definíció szerint $\varepsilon/3$-hoz találunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \text{ minden } x \in X \text{ esetén, ha } n \geq N.$$

Speciálisan,

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \text{ minden } x \in X\text{-re.}$$

Mivel f_N folytonos x_0-ban, azért $\varepsilon/3$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3, \text{ ha } |x - x_0| < \delta.$$

Megmutatjuk, hogy ez a δ jó f-hez. Legyen x olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

1.15. Következmény. *Legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melyre az $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények folytonosak az egész X halmazon, valamint $f_n \hookrightarrow f$ X-en. Ekkor f is folytonos X-en.*

1.2.2. Riemann-integrálhatóság

Probléma. Ha $I = [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, (f_n) tagjai Riemann-integrálhatók I-n, $f_n \to f$. Igaz-e, hogy ekkor f is Riemann-integrálható I-n, ill. hogy $\int\limits_a^b f_n \to \int\limits_a^b f$?

1.16. Példa.

1. Rendezzük sorba a [0,1] intervallumba eső racionális számokat:

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}.$$

Definiálja

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

vagyis az $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ halmaz karakterisztikus függvényét. Könnyen látható(!), hogy $f_n \in R[0,1]$. Másrészt $f_n \to D$, ahol

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

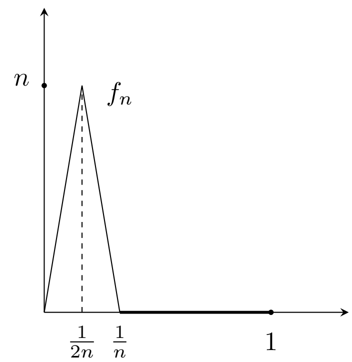
az ún. *Dirichlet-függvény.*

1.17. Állítás. *A Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható* [0,1]*-en.*

Bizonyítás. Mivel minden intervallumban van racionális és irracionális szám is, ezért a $D(x)$ függvény tetszőleges alsó közelítő összege 0 és tetszőleges felső közelítő összege 1. Tehát a Darboux-féle alsó és felső integrálokra

$$\int_{0*}^{1} D = 0 \text{ és } \int_0^{1*} D = 1,$$

ezért D nem Riemann-integrálható. □



1.3. ábra. Ellenpélda Riemann-integrálhatóságra

2. Tekintsük az 1.3. ábrán látható függvénysorozatot. Az 1.12.I. Példában meggondolt módon látható, hogy (f_n) pontonként (de nem egyenletesen) tart az $f \equiv 0$ függvényhez [0,1]-en. Másrészt f és f_n is Riemann-integrálható [0,1]-en minden n-re, de
$$\int_0^1 f_n = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \not\to \int_0^1 f = 0.$$

1.18. Tétel*. *Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melynek tagjai Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n, és $f_n \hookrightarrow f$ az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor f is Riemann-integrálható $[a,b]$-n, valamint*
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy $f \in R[a,b]$ legyen, a „leghasznosabb kritérium" alapján elegendő, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\Phi = \Phi(\varepsilon) \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Mivel $f_n \hookrightarrow f$, ezért ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$
Speciálisan,
$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$
Másrészt ha $I \subseteq [a,b]$ tetszőleges intervallum, $x, y \in I$, akkor
$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)| + \varepsilon. \end{aligned}$$
Mindkét oldalon $x, y \in I$-ben szuprémumot véve kapjuk, hogy
$$\omega_f(I) = \sup_{x,y\in I} |f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon + \sup_{x,y\in I} |f_N(x) - f_N(y)| = 2\varepsilon + \omega_{f_N}(I). \tag{1.3}$$
Mivel $f_N \in R[a,b]$, ezért $\varepsilon > 0$-hoz találunk olyan $\Phi = \{I_1, I_2, \dots, I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást, hogy $\Omega_{f_N}(\Phi) < \varepsilon$. Tekintsük f ezen felosztáshoz tartozó oszcillációs összegét. Ekkor az (1.3) becslés alapján
$$\begin{aligned} \Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^n \omega_f(I_i) \cdot |I_i| &\leq \sum_{i=1}^n (2\varepsilon + \omega_{f_N}(I_i)) \cdot |I_i| = 2\varepsilon(b-a) + \sum_{i=1}^n \omega_{f_N}(I_i) \cdot |I_i| \\ &= 2\varepsilon(b-a) + \Omega_{f_N}(\Phi) < \varepsilon \cdot (2(b-a) + 1). \end{aligned}$$
Ebből következik, hogy f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.
Most igazoljuk, hogy
$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f, \; n \to \infty.$$

Mivel $f_n \hookrightarrow f$, azért az (1.2) miatt

$$a_n := \sup_{[a,b]} |f_n - f| \to 0,\ n \to \infty.$$

Ebből

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \le \int_a^b |f_n - f| \le a_n \cdot (b-a) \to 0,\ n \to \infty.$$

□

1.19. Tétel. *Legyen* $[a,b]$ *korlátos és zárt intervallum, legyen* (f_n) *olyan függvénysorozat, melynek tagjai folytonosak (így Riemann-integrálhatók is)* $[a,b]$*-n, és* $f_n \hookrightarrow f$ *az* $[a,b]$ *intervallumon. Ekkor* f *is folytonos (tehát Riemann-integrálható)* $[a,b]$*-n, valamint*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$$

Bizonyítás. A tétel első része adódik az 1.15. Következményből. Az integrálok határértékéről szóló állítás pedig a fenti bizonyítás végével azonos módon igazolható. □

1.20. *Megjegyzés.* A fentiekben a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$$

képlet úgy is írható, hogy

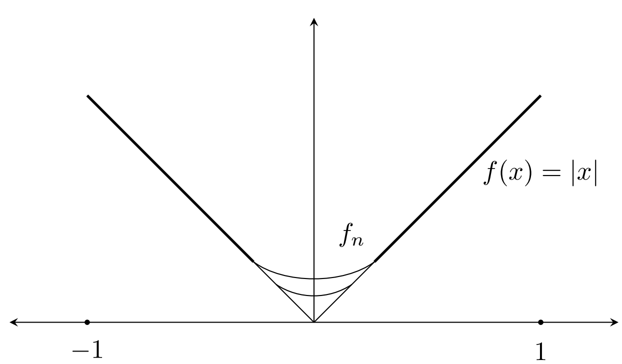
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n,$$

vagyis egyenletes konvergencia esetén „a limesz és integrálás felcserélhető."

1.2.3. Differenciálhatóság

Probléma. Milyen feltételek mellett öröklődik a differenciálhatóság a limeszfüggvényre, feltéve, hogy az (f_n) függvénysorozat tagjai differenciálhatók?

1.21. Példa. Tekintsük az 1.4. ábrán látható függvénysorozatot. Nyilvánvaló, hogy az f_n függvények differenciálhatók, és elérhető, hogy egyenletesen tartsanak az $f(x) = |x|$ függvényhez – ami viszont 0-ban nem differenciálható.



1.4. ábra. Példa differenciálható függvényekből álló sorozatra, ahol a limeszfüggvény nem differenciálható

Az előbbi példa alapján az egyenletes konvergenciától eltérő feltételeket kell tennünk a függvénysorozatra, hogy a differenciálhatóság megőrződjön a limeszfüggvényre.

1.22. Tétel. *Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az $I = [a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvények (vagyis minden f_n differenciálható és az f_n' folytonos I-ben), továbbá tegyük fel, hogy*

(i) $\exists x_0 \in I$, hogy az $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens;

(ii) $\exists g : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n' \hookrightarrow g$ az I-n.

Ekkor létezik $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $f_n \hookrightarrow f$, emellett $f' = g$.

Bizonyítás. Jelölje $c := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Mivel f_n' folytonos $\forall n$ és $f_n' \hookrightarrow g$ I-ben, ezért az 1.15. Következmény szerint g is folytonos I-n. Jelölje

$$f(x) := c + \int_{x_0}^{x} g,\ x \in I. \tag{1.4}$$

Mivel g folytonos I-ben, ezért integrálfüggvénye (folytonosan) differenciálható, így a fenti $f : I \to \mathbb{R}$ is (folytonosan) differenciálható, és

$$f'(x) = g(x) \text{ minden } x \in I\text{-re}. \tag{1.5}$$

Alkalmazzuk most a Newton-Leibniz Tételt az f_n' függvényre (ez megtehető, mivel folytonos, tehát Riemann-integrálható, és van primitív függvénye: f_n). Ekkor

$$\int_{x_0}^{x} f_n' = [f_n]_{x_0}^{x} = f_n(x) - f_n(x_0).$$

Az egyenlőség átrendezéséből kapjuk:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n' \quad \forall x \in I. \tag{1.6}$$

Ha az (1.6) egyenlőségből kivonjuk az (1.4)-t, ennek abszolút értékére kapjuk a következő becslést:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^{x} (f_n' - g) \right| \le |f_n(x_0) - c| + \int_{x_0}^{x} |f_n' - g| \\ &\le |f_n(x_0) - c| + \int_{a}^{b} |f_n' - g| \le |f_n(x_0) - c| + \left(\sup_I |f_n' - g| \right) \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Az így kapott becslés már x-től független, tehát

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - c| + \left(\sup_I |f_n' - g| \right) \cdot (b - a)$$

is teljesül. Mivel $c = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$, azért a jobb oldal 1. tagja 0-hoz tart, továbbá mivel $f_n' \hookrightarrow g$, a 2. tag is 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. Ezzel az (1.2) alapján igazoltuk, hogy $f_n \hookrightarrow f$ az I-n. Másrészt (1.5) alapján $f' = g$ is teljesül I-ben, amivel a tételt beláttuk. □

1.23. Következmény. *Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az $I = [a, b]$ intervallumban folytonosan differenciálható függvények (vagyis minden f_n differenciálható és az f_n' folytonos I-ben), továbbá tegyük fel, hogy*

(i) $\exists f : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n \to f$ pontonként I-ben;

(ii) $\exists g : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n' \hookrightarrow g$ I-n.

Ekkor $f_n \hookrightarrow f$ is teljesül, f differenciálható I-n, emellett $f' = g$.

1.24. *Megjegyzés.* Az előző tétel ill. következmény feltételei mellett

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)' = \lim_{n\to\infty} f_n',$$

vagyis „a limesz és a deriválás felcserélhető."

1.3. Függvénysorok

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ halmaz.

1.25. Definíció. Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az X-en értelmezett függvények. Képezzük ebből a követkző új függvénysorozatot:

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i,\ n = 1{,}2, \ldots, \tag{1.7}$$

azaz minden $x \in X$ esetén $s_n(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. Ezt az (s_n) függvénysorozatot az eredeti (f_n) függénysorozathoz tartozó *függvénysor*nak nevezzük, és jelöljük:

$$\sum f_n := (s_n).$$

Az (1.7)-ben definiált s_n függvényt a függvénysor n. *szeleté*nek vagy *részletösszegé*nek nevezzük.

1.26. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\sum f_n$ függvénysor az X halmazon *pontonként konvergens*, ha a sor szeleteiből álló (s_n) függvénysorozat pontonként konvergens X-en, vagyis létezik $f : X \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $s_n(x) \to f(x)$. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor az X halmazon *egyenletesen konvergens*, ha létezik $f : X \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $s_n \hookrightarrow f$ az X-n. Mindkét esetben f-et a függvénysor *összegfüggvényé*nek nevezzük, és jelöljük:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

1.27. Definíció. Legyen $\sum f_n$ tetszőleges függvénysor. Jelölje

$$\mathrm{KH} := \{x \in X : (s_n(x)) \text{ konvergens}\}.$$

Ha $\mathrm{KH} \neq \emptyset$, akkor beszélhetünk összegfüggvényről, melynek értelmezési tartománya $\mathcal{D}(f) := \mathrm{KH}$, és

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} (s_n(x)),\ x \in \mathrm{KH}.$$

1.28. *Megjegyzés.* Kérdés, hogy adott $\sum f_n$ (pontonként) konvergens függvénysor esetén hogyan számolhatjuk ki az összegfüggvény egy adott $x \in X$ pontbeli helyettesítési értékét, $f(x)$-et? Definíció szerint

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

egy végtelen numerikus sor összege, mely a függvénysor tagjainak x-beli helyettesítési értékeiből kiszámolható (ha szerencsénk van...) – tehát nem szükséges az (s_n) függvénysorozatot meghatározni! Ez alapján az is világos, hogy

$$\mathrm{KH} = \left\{x \in X : \sum f_n(x) \text{ numerikus sor konvergens}\right\}.$$

A következőkben a függvénysorozatoknál megismertekhez hasonló állításokat mondunk ki arra vonatkozólag, hogy a függvénysor tagjainak milyen tulajdonságai és milyen feltételek mellett öröklődnek az összegfüggvényre.

1.29. Tétel. *Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az X halmazon értelmezett valós értékű függvények, és tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens X-en. Ha emellett valamely $x_0 \in X$ pontban a függvénysor minden tagja folytonos, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy az $s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i$ részletösszegek mindegyike folytonos x_0-ban. Így az 1.26. Definíció és az 1.14. Tétel alapján a bizonyítás kész. ☐

1.30. Következmény. *Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az X halmazon értelmezett valós értékű függvények, és tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens X-en. Ha emellett a függvénysor minden tagja folytonos az X halmazon, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is folytonos X-en.*

1.31. Tétel. *Legyen $I := [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az I intervallumon Riemann-integrálható függvények. Ha emellett a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is Riemann-integrálható I-n, valamint*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right).$$

A képlet a következőképpen is írható:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right),$$

vagyis „a szumma és az integrálás felcserélhető."

Bizonyítás. Jelölje $s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i$ a függvénysor n. szeletét. Mivel minden f_i Riemann-integrálható $[a, b]$-n, azért $s_n \in R[a, b]$. Továbbá $s_n \hookrightarrow f$ I-n, ezért az 1.18. Tételből következik, hogy $f \in R[a, b]$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f.$$

□

1.32. Tétel. *Legyen $I = [a, b]$, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai folytonosan differenciálhatók I-ben. Tegyük fel továbbá, hogy*

(i) $\exists x_0 \in I$ pont, melyben a $\sum f_n(x_0)$ numerikus sor konvergens;

(ii) a $\sum f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = g$.

Ekkor az eredeti $\sum f_n$ függvénysor is egyenletesen konvergens I-n, emellett $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jelöléssel f is folytonosan differenciálható I-n és

$$f' = g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy az 1.22. Tétel feltételei teljesülnek a $\sum f_n$ függvénysor részletösszegeiből képezett (s_n) függvénysorozatra. Ez alapján az állítás könnyen belátható. □

1.33. Következmény. *Legyen $I = [a, b]$, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai folytonosan differenciálhatók I-ben. Tegyük fel továbbá, hogy*

(i) a $\sum f_n$ függvénysor pontonként konvergens I-ben;

(ii) a $\sum f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = g$.

Ekkor az eredeti $\sum f_n$ függvénysor is egyenletesen konvergens I-n, emellett $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jelöléssel f is folytonosan differenciálható I-n és

$$f' = g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

1.34. *Megjegyzés.* A fenti tétel ill. következmény feltételei mellett

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n',$$

vagyis „a szumma és a deriválás felcserélhető."

Probléma. Megadható-e jól használható feltétel arra nézve, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens legyen? (Függvénysorozatok esetén az (1.2) egy jól használható szükséges és elégséges feltétel.)

1.35. Állítás (Függvénysorok egyenletes konvergenciájának Cauchy-féle kritériuma)**.** *A $\sum f_n$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens X-en, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > m \geq N$ esetén*

$$\sup_{x \in X} |s_n(x) - s_m(x)| = \sup_{x \in X} |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

Az alábbi tétel a gyakorlatban a Cauchy-kritériumnál sokkal jobban használható.

1.36. Tétel (Weierstrass-féle kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára)**.** *Tegyük fel, hogy létezik egy $\sum a_n$ pozitív tagú, konvergens numerikus sor, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in X, \ \textit{vagyis} \ \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq a_n.$$

Ekkor $\sum f_n$ egyenletesen konvergens X-en.
Azaz, ha a $\sum f_n$ függvénysor tagjai majorálhatók X-en egy pozitív tagú konvergens numerikus sor megfelelő tagjaival, akkor a függvénysor egyenletesen konvergens X-en.

Bizonyítás. A végtelen numerikus sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > m \geq N$ esetén

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon,$$

mivel $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Így bármely $n > m \geq N$ indexekre

$$\sup_{x \in X} |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_{m+1}(x)| + \cdots + \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon$$

is teljesül, amivel az 1.35. Cauchy-kritérium alapján a tételt beláttuk. □

1.37. Példa. Tekintsük a

$$\sum \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvénysort. Mivel minden n-re és minden valós x-re $|\frac{\sin nx}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ és $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens, azért a függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

1.3.1. Hatványsorok

A fentiek alapján könnyen látható, hogy tetszőleges $(a_n) \subset \mathbb{R}$ sorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\sum a_n (x - x_0)^n$$

hatványsor egy speciális függvénysor, ahol az összegzendő függvények

$$f_n(x) := a_n (x - x_0)^n$$

alakúak. Korábban láttuk, hogy a hatványsor összegfüggvénye az

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

jelöléssel értelmezhető az $(x_0 - r, x_0 + r)$ nyílt intervallumon, vagyis

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

1.38. Tétel. *A $\sum a_n(x-x_0)^n$ függvénysor (hatványsor) egyenletesen konvergens bármely $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset (x_0 - - r, x_0+r)$ $(0<\delta<r)$ korlátos és zárt intervallumon.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ esetén $|x-x_0| \le \delta$, így

$$|a_n(x-x_0)^n| \le |a_n|\delta^n.$$

Mivel a hatványsor abszolút konvergens(!) $x = x_0+\delta$-ban, ezért a $\sum |a_n|\delta^n$ numerikus sor konvergens. Így az 1.36. Weierstrass-kritérium alapján $\sum a_n(x-x_0)^n$ egyenletesen konvergens $[x_0-\delta, x_0+\delta]$-n. □

A fenti tétel alapján, figyelembe véve hogy az $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ függvények folytonosak (sőt, akárhányszor differenciálhatók), a függvénysorok elméletéből következik, hogy a hatványsor összegfüggvénye folytonos (ld. 1.29. Tétel). Könnyen látható, hogy a

$$\sum f_n'(x) = \sum a_n n(x-x_0)^{n-1}$$

derivált hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredetiével, így a fenti tétel és az 1.32. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy a hatványsor összegfüggvénye (akárhányszor) differenciálható, és a deriválás tagonként végezhető. Így a korábban bizonyított állítások mindegyike igazolható a függvénysorok általános elmélete segítségével is.

Emlékeztetőül felidézünk néhány (az előző félévben tanult) nevezetes hatványsor-összeget. Láttuk, hogy egy hatványsor mindig az összegfüggvényének (az adott középpont körüli) Taylor-sora, tehát ezek egyben Taylor-sor-összegek is. Az előbbiek alapján pedig már azt is tudjuk, hogy a konvergencia az értelmezési tartomány korlátos és zárt részintervallumain *egyenletes.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n && -1<x<1,\\
\mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && x\in\mathbb{R},\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && x\in\mathbb{R},\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} && x\in\mathbb{R},\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} && x\in(-1{,}1],\\
\mathrm{sh}\ x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && x\in\mathbb{R},\\
\mathrm{ch}\ x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} && x\in\mathbb{R},\\
\mathrm{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} && x\in[-1{,}1].
\end{aligned}$$

1.3.2. Fourier-sorok

[1]

A Fourier-sorok elmélete mechanikai és hőtani vizsgálatok kapcsán indult fejlődésnek a XVIII. század végén. Míg a Taylor-soroknál függvényeket akartunk hatványsor alakban előállítani, addig a Fourier-sorok elméletében ún. *trigonometrikus polinom*okkal próbáljuk közelíteni az adott f függvényt. Pontosabban,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{1.8}$$

alakú előállítást keresünk. Két alapvető kérdés merül fel, hasonlóan a Taylor sorokhoz:

– Hogyan kell az a_n és b_n együtthatókat kiszámolni?

– Mi garantálja a konvergenciát?

Mielőtt továbbmennénk a vizsgálatokban, szögezzük le a következőt: ha egy f függvény előállítható ilyen trigonometrikus sorként, akkor f 2π szerint periodikus. Tehát a továbbiakban a vizsgálódásaink során elég egy 2π hosszúságú intervallumra koncentrálni, pl. legyen ez a $[-\pi, \pi]$ intervallum.
Feltéve, hogy az (1.8) függvénysor egyenletesen konvergens, néhány formális átalakítással[2] egyértelműen meghatározhatjuk az a_n és b_n együtthatókat.Az így kapott eredmények felhasználásával egy tetszőleges Riemann-integrálható függvényre definiálhatjuk – ezekkel az együtthatókkal – az ő speciális trigonometrikus sorát.

1.39. Definíció. Legyen $f \in R[-\pi, \pi]$ és legyenek

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \\ a_k &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \\ b_0 &:= 0, \\ b_k &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

függvénysort az f függvény *Fourier-sor*ának nevezzük.

1.40. *Megjegyzés.* Jean Baptiste Joseph Fourier [1768-1830] francia matematikus és fizikus. Fő műve a hővezetéssel kapcsolatos elméleti vizsgálatait tartalmazza, melyben trigonometrikus sor alakban állította elő a hővezetési differenciálegyenlet megoldásait.

1.41. *Megjegyzés.* Nyilvánvaló, hogy páratlan függvény Fourier-sora tisztán szinuszos, páros függvény Fourier-sora tisztán koszinuszos.

A konvergencia vizsgálatát illetően két kérdés merül fel: az egyik, hogy az adott f függvény Fourier-sora mikor konvergens egy x pontban vagy egyenletesen konvergens-e a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, a másik, hogy mikor állítja elő az f függvényt. Fontos tudni, hogy van olyan folytonos függvény, amelynek nem konvergens a Fourier-sora.
Ezzel kapcsolatban sok szép és viszonylag könnyen megérthető konvergenciatétel létezik, amelyekről az érdeklődők olvashatnak Császár Ákos Valós analízis (Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999) c. jegyzetében vagy Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok (Tankönyvkiadó, 1977) könyvében. Először adunk egy elégséges feltételt a Fourier-sorok egyenletes konvergenciájára, majd megmutatjuk, hogy ilyenkor a Fourier-sor valóban f-et állítja elő.

[1] Bátkai András: Fourier-sorok c. jegyzete alapján. További részletek: http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/fouriersor.pdf
[2] Ld. http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/fouriersor.pdf 1–2. oldal.

1.42. Állítás. *Legyen az f 2π szerint periodikus függvény (legalább) kétszer folytonosan differenciálható, azaz létezzen f'' és f'' folytonos. Ekkor $n \geq 1$ esetén*

$$a_n = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos(nt - \pi)\, dt,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \sin(nt - \pi)\, dt.$$

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása teljesen elemi, kétszer egymás után elvégzett parciális integrálás. Az a_n együtthatóra mutatjuk meg, ennek alapján a b_n-re meggondolható. Az első lépésben

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[f(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt$$
$$= 0 + \frac{-1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) dt,$$

ahol használtuk a jól ismert $\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ azonosságot. A fenti számolást megismételve kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{-1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{-1}{\pi n} \left[f'(t) \frac{\sin\left(nt - \frac{\pi}{2}\right)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{-1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \frac{\sin\left(nt - \frac{\pi}{2}\right)}{n} dt$$
$$= 0 + \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos(nt - \pi)\, dt.$$

Itt kihasználtuk, hogy $f'(\pi) = f'(-\pi)$ és $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-n\pi - \frac{\pi}{2}\right)$. □

1.43. Következmény. *Legyen f legalább kétszer folytonosan differenciálható 2π szerint periodikus függvény. Ekkor a Fourier-sora egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. A függvénysorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó az 1.36. Weierstrass-kritériumot használjuk. Az előző állításból következik, hogy

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| \cdot |\cos(nt - \pi)| dt \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt = \frac{D}{n^2},$$

ahol bevezettük a $D := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt$ rövidítő jelölést. Hasonlóan,

$$|b_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| \cdot |\sin(nt - \pi)| dt \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt = \frac{D}{n^2}.$$

Tehát

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq \frac{2D}{n^2}.$$

Mivel a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így Weierstrass kritériumából következik az egyenletes konvergencia $[-\pi, \pi]$-n, amiből a periodicitás miatt adódik az egész számegyenesre is. □

1.44. *Megjegyzés.* Itt nem a lehető legáltalánosabb tételt adtuk meg. Az egyenletes konvergencia megmutatható függvényeknek sokkal általánosabb osztályára is, melybe például a törtvonalak is beletartoznak.[3] Viszonylag egyszerűen igazolható, hogy a fenti állításhoz nem kell a második derivált folytonossága, elég a Riemann-integrálhatósága $[-\pi, \pi]$-n. Pontosabban, elég feltenni, hogy esetleg „néhány” x kivételével létezik $f''(x)$ és az így kapott függvény Riemann-integrálható $[-\pi, \pi]$-n. Tehát megengedhetjük az olyan függvényeket is, mint az $|x|$ vagy a $\operatorname{sgn} x$.

Mindenesetre az egyenletes konvergenciát függvényeknek egy, gyakorlati szempontból igen fontos osztályára megmutattuk. Most rátérhetünk annak a kérdésnek a vizsgálatára, vajon az f függvény Fourier-sora tényleg f-et állítja-e elő. Ehhez először a Fourier-sor n-edik részletösszeg-sorozatát kell zárt alakban előállítanunk.

[3] Bővebbet erről Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó könyvében találhat az érdeklődő olvasó.

1.45. Tétel (Dirichlet)**.** *Legyen f 2π-szerint periodikus, $f \in R[-\pi,\pi]$ és jelölje Fourier-sorának n-edik részletösszegét $s_n(x)$, azaz*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Ekkor

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

A tétel feltételeit úgy kell elképzelni, hogy adott egy Riemann-integrálható függvény a $[-\pi,\pi]$ intervallumon és periodikusan kiterjesztjük a számegyenesre. Az s_n-re adott képletben az integrandus $t=0$ esetben nincs értelmezve, de könnyen látható, hogy folytonosan kiterjeszthető erre a pontra.
A bizonyítás néhány elemi trigonometrikus azonosság hosszadalmas alkalmazása.[4]
Ezután a konvergencia-tételt már könnyedén tudjuk bizonyítani.

1.46. Tétel. *Legyen $f \in C^2(\mathbb{R})$ és f 2π szerint periodikus. Ekkor minden $x \in [-\pi,\pi]$ esetén*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

azaz f-et előállítja Fourier-sora, és a konvergencia egyenletes.

Bizonyítás. * Az egyenletes konvergenciát már láttuk az 1.43. Következményben. Megmutatjuk az előállítást. A bizonyítást elemi számolgatással kezdjük. Ha $g(x) \equiv 1$, akkor $a_0 = 1$, $a_n = b_n = 0$ és a Fourier-sor nyilván konvergens. Alkalmazzuk Dirichlet formuláját a konstans 1 értékű részletösszegsorozatra, így az azonosan 1 függvény Fourier-sorának n-edik részletösszegére a következőt kapjuk:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Ebből nyilván

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Vizsgáljuk most az $s_n(x) - f(x)$ különbséget. Dirichlet formulájából adódik, hogy

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+t) - f(x)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Mivel a szinuszfüggvény konkáv a $[0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumon, így $|\sin\frac{t}{2}| \geq \frac{2}{\pi}|t|$. Használjuk még, hogy f differenciálható az x pontban, így található olyan $K > 0$, hogy

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \leq K \qquad \forall\, t \in [-\pi,\pi].$$

Tehát

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\right| \leq \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{\frac{2}{\pi}t}\right| \leq \frac{\pi}{2}K.$$

Könnyen végiggondolható, hogy feltételeink szerint $g(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}$ (t szerint) differenciálható függvény. Ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt = \left[g(t)\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(t)\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}dt,$$

amiből

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt\right| \leq 0 + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} |g'(t)|dt,$$

[4] Ld. http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/fouriersor.pdf 5–6. oldal.

ahol használtuk, hogy $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = 0$. Ez alapján

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t dt \right| \leq \frac{C}{n+\frac{1}{2}}$$

teljesül, tehát $s_n(x) \to f(x)$ minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén. □

1.47. *Megjegyzés.* Könnyen végiggondolható, hogy a tételhez nem szükséges a kétszeres folytonos differenciálhatóság, hanem az 1.44. Megjegyzés itt is érvényes.

Második fejezet

Többváltozós függvények

Egészen mostanáig olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekkel foglalkoztunk, melyek értelmezési tartománya és értékkészlete a valós számok részhalmaza, vagyis

$$\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}.$$

A minket körülvevő világ jelenségeit tanulmányozva azonban láthatjuk, hogy bizonyos mennyiségek több más mennyiségtől is függnek. Így például

$$V = V(h, r) = \pi r^2 h$$

egy henger térfogatát adja meg annak h magassága és alapkörének r sugara függvényében.
Ebben a fejezetben olyan p változós függvényekkel ismerkedünk meg, melyek értékkészlete $\mathbb{R}$-ben fekszik:

$$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^p,\ \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}.$$

A többváltozós függvények körében használatos jelöléseket illetően a Laczkovich-T. Sós: Analízis II. (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007) könyvet követem.

2.1. Kétváltozós függvények

2.1.1. Az $\mathbb{R}^2$ (a sík) metrikus tulajdonságai

Ha visszaemlékszünk, egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \mathcal{D}(f)$ pontbeli folytonosságát úgy definiáltuk, hogy „a-hoz közeli pontokat $f(a)$-hoz közeli pontokba visz”. A függvény $a \in \mathcal{D}(f)'$ pontbeli határértékének ill. $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}(f)$ pontbeli differenciálhatóságának fogalmát is a „közelség” fogalmát felhasználva vezettük be (idézzük fel az „$\varepsilon - \delta$-s” definíciókat!). A definíciók megfogalmazhatóak voltak sorozathatárértékek segítségével is (ld. az átviteli elveket).
Ebben az alfejezetben az a célunk, hogy a „közelség” és sorozatkonvergencia fogalmát kiterjesszük a sík, vagyis $\mathbb{R}^2$ pontjaira (vektoraira) is.
Középiskolából ismeretes, hogy egy $x \in \mathbb{R}^2$ pont valójában egy

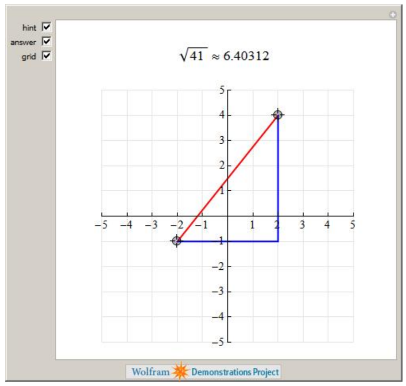
$$x = (x_1, x_2)$$

(rendezett) számpárral azonosítható, ahol x_1 és x_2 az x pont Descartes-féle koordinátarendszerben egyértelműen meghatározott koordinátái.

2.1. Definíció. Az $x = (x_1, x_2)$ és $y = (y_1, y_2)$ síkbeli pontok *(euklideszi) távolságán* az alábbi mennyiséget értjük:

$$d(x, y) = d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \tag{2.1}$$

Ez a távolságfogalom a Pithagorasz-tétel felhasználásán alapul: koordinátarendszerben ábrázolva a két pontot, a (2.1) definícióban meghatározott szám az őket összekötő szakasz hossza, ld. a 2.1 ábrát.



2.1. ábra. Két pont távolsága a síkon

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fentiekben definiált $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ távolságfüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal, melyek jól mutatják, hogy d valójában az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto |x - y|$$

egydimenziós távolság általánosítása 2 dimenzióra.

2.2. Állítás. *A (2.1)-ben definiált* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ *távolságfüggvényre*

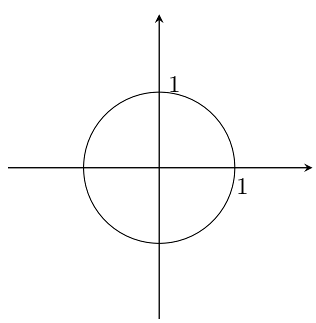
(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ *(reflexivitás);*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ *esetén (szimmetrikusság);*

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ *esetén (háromszög-egyenlőtlenség).*

Bizonyítás. Az (i) és (ii) állítások nyilvánvalóak, a (iii) négyzetre emeléssel vagy geometriai úton ellenőrizhető. □

Az ilyen tulajdonságú függvényeket *metrikák*nak fogjuk hívni, ld. a harmadik fejezetet. A metrika (vagy távolságfüggvény) segítségével – hasonlóan az egy dimenzióhoz – értelmezhetjük egy $u \in \mathbb{R}^2$ pont $r > 0$ sugarú gömbkörnyezetét.



2.2. ábra. A (0,0) – origó – körüli 1 sugarú gömb

2.3. Definíció. Az $u \in \mathbb{R}^2$ pont körüli $r > 0$ sugarú

(a) *nyílt gömb:* $B(u, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u, x) < r\}$;

(b) *zárt gömb:* $\overline{B}(u,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u,x) \leq r\}$;

(c) *gömbfelület:* $\partial B(u,r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u,x) = r\}$;

(d) *kipontozott gömb(környezet):* $\dot{B}(u,r) := B(u,r) \setminus \{u\}$.

A távolságfogalom lehetőséget ad $\mathbb{R}^2$-beli sorozatok konvergenciájának értelmezésére. $\mathbb{R}^2$-beli *sorozat*on egy $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ függvényt értünk, ahol

$$x(n) := x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}) \in \mathbb{R}^2$$

a sorozat *n. tagja*, $n \in \mathbb{N}$.

2.4. Definíció. Legyen $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ sorozat (vagyis $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2})$, $n \in \mathbb{N}$), $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat u-hoz *konvergál*, vagy az (x_n) sorozat *határértéke* u, jelölésben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \text{ vagy } x_n \to u,$$

ha a $d(x_n, u)$ számsorozat 0-hoz tart:

$$d(x_n, u) = \sqrt{(x_{n,1} - u_1)^2 + (x_{n,2} - u_2)^2} \to 0, n \to \infty.$$

Másképp: $x_n \to u$ pontosan akkor, ha

$$\text{minden } \varepsilon > 0\text{-hoz létezik } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n \geq N \text{ esetén } d(x_n, u) < \varepsilon.$$

Másképp: $x_n \to u$ pontosan akkor, ha

$$\text{minden } \varepsilon > 0\text{-hoz létezik } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n \geq N \text{ esetén } x_n \in B(u, \varepsilon).$$

Fontos megjegyezni, hogy $\mathbb{R}^2$-ben nincs értelme „∞” határértékről beszélni!

2.5. *Megjegyzés.* Sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás. Ha $x_n \to u$ és $x_n \to v$ lenne és $u \neq v$, akkor $r := d(u,v)/2 > 0$ definícióval $B(u,r) \cap B(v,r) = \emptyset$, ami ellentmond a konvergenciának (egy indextől kezdve a sorozat tagjai mindkét gömbben benne kellene legyenek). □

Ha jobban meggondoljuk, egy $\mathbb{R}^2$-beli sorozat konvergenciája tulajdonképpen az első ill. a második koordinátákból álló sorozatok konvergenciáját jelenti.

2.6. Állítás. *Legyen* $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ *és* $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. *Az* (x_n) *sorozat akkor és csak akkor konvergál u-hoz, ha*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,1} = u_1 \text{ és } \lim_{n\to\infty} x_{n,2} = u_2.$$

Bizonyítás.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, u) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_{n,1} - u_1)^2 + (x_{n,2} - u_2)^2} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n,1} = u_1 \text{ és } \lim_{n\to\infty} x_{n,2} = u_2$$

□

Ismeretes, hogy $\mathbb{R}^2$ *vektortér*, vagyis $\mathbb{R}^2$-beli pontok (vektorok) között értelmezhető az összeadás és számmal való szorzás a szokásos módon (erre itt nem térünk ki részletesebben). A sorozatok közötti (tagonként végzett) vektorműveletek öröklődnek a sorozatok határértékeire.

2.7. Állítás. *Ha* $x_n \to u$ *és* $y_n \to v$, *akkor* $x_n + y_n \to u + v$ *és* $c \cdot x_n \to c \cdot u$, $c \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Azonnal adódik a 2.6. Állításból és a valós sorozatok és műveletek kapcsolatából. □

2.8. Tétel (Cauchy-kritérium). *Egy* $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ *pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, vagyis*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists N = N(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

Bizonyítás. Ha $x_n \to u$, akkor $\varepsilon/2$-höz létezik N, hogy

$$d(x_n, u) < \frac{\varepsilon}{2},\ n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, u) + d(x_m, u) < \varepsilon,\ n, m \geq N.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy (x_n) Cauchy-sorozat. Könnyen meggondolható, hogy ekkor az 1. ill. 2. koordinátákból álló

$$(x_{n,1}) \text{ és } (x_{n,2})$$

valós sorozatok Cauchy-sorozatok – tehát konvergensek. Legyen

$$u_1 := \lim x_{n,1} \text{ és } u_2 := \lim x_{n,2}.$$

A 2.6. Állítás alapján $x_n \to u = (u_1, u_2)$, és ezt akartuk belátni. □

Hasonlóan, a számsorozatokra megismert Bolzano-Weierstrass tétel is érvényben marad $\mathbb{R}^2$-beli sorozatokra. Ennek kimondásához először definiálnunk kell a korlátosság fogalmát a síkon.

2.9. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz *korlátos*, ha van olyan $a \in \mathbb{R}^2$ pont és $r > 0$ sugár, hogy $H \subset B(a, r)$. Egy $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ *sorozat korlátos*, ha a tagjaiból alkotott halmaz korlátos.

2.10. Tétel (Bolzano-Weierstrass)**.** *Minden $\mathbb{R}^2$-beli korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Könnyen meggondolható, hogy ha $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, akkor az 1. ill. 2. koordinátákból álló

$$(x_{n,1}) \text{ és } (x_{n,2})$$

valós sorozatok is korlátosak. Pontosabban, belátható, hogy ha

$$(x_n) \subset B(a, r),$$

akkor

$$(x_{n,1}) \subset (a_1 - r, a_1 + r) \text{ és } (x_{n,2}) \subset (a_2 - r, a_2 + r).$$

Az $(x_{n,1})$ valós sorozatnak a (valós) Bolzano-Weierstrass tétel alapján van konvergens részsorozata – ez legyen $(x_{n_k,1})$, és

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k,1} = u_1.$$

Tekintsük most az ugyanezen indexsorozathoz tartozó, 2. koordinátákból álló $(x_{n_k,2})$ sorozatot! A fentiek alapján ez is korlátos, ezért a (valós) Bolzano-Weierstrass tétel alapján van konvergens részsorozata, legyen $(x_{n_{k_l},2})$,

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l},2} = u_2.$$

Mivel az ezen indexsorozatnak megfelelő, 1. koordinátákból álló $(x_{n_{k_l},1})$ sorozat részsorozata az $(x_{n_k,1})$ sorozatnak, ezért

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l},1} = u_1 \text{ és } \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l},2} = u_2.$$

Tehát a 2.6. Állítás alapján az $u := (u_1, u_2)$ pontra

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = u,$$

és ezt akartuk belátni. □

Hasonlóan a valós számok körében bevezetett halmaz külső/belső/határ/torlódási stb. pontja fogalmához, $\mathbb{R}^2$-ben is definiálhatjuk ezeket a ponttípusokat, melyre később szükségünk is lesz.

2.11. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$.

1. Az u pont *belső pontja* H-nak, ha

   $$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u, r) \subset H$$

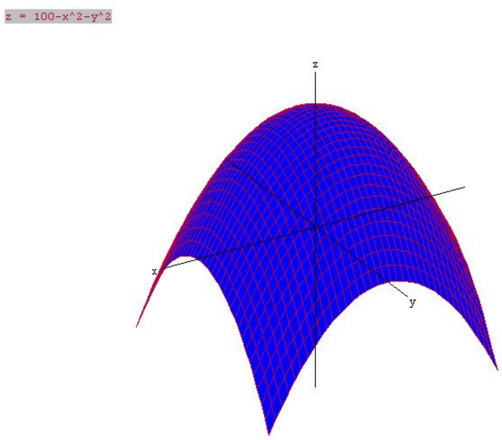
   (ebből persze következik, hogy $u \in H$). H belső pontjait jelölje $\text{int}H$.

2. Az u pont *külső pontja* H-nak, ha
$$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u,r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus H$$
(ebből persze következik, hogy $u \notin H$). H külső pontjait jelölje $\mathrm{ext}H$. Világos, hogy
$$\mathrm{ext}H = \mathrm{int}(\mathbb{R}^2 \setminus H).$$

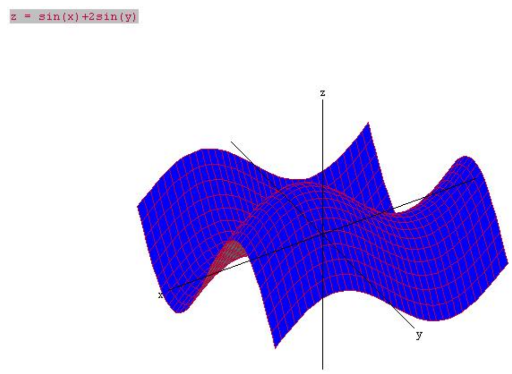
3. Az u pont *határpontja* H-nak, ha
$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } B(u,r) \cap H \neq \emptyset \text{ és } B(u,r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus H) \neq \emptyset.$$
H határpontjait jelölje ∂H.

4. Az u pont *torlódási pontja* H-nak, ha
$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{B}(u,r) \cap H \neq \emptyset.$$
H torlódási pontjait jelölje H'.

2.1.2. Kétváltozós függvények tulajdonságai

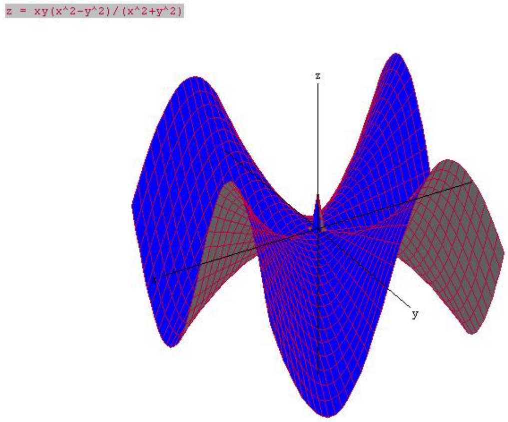


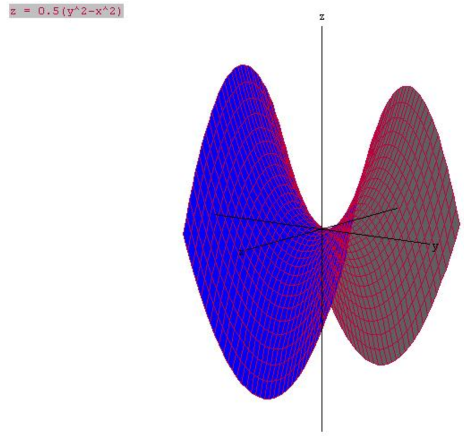
2.3. ábra. $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$



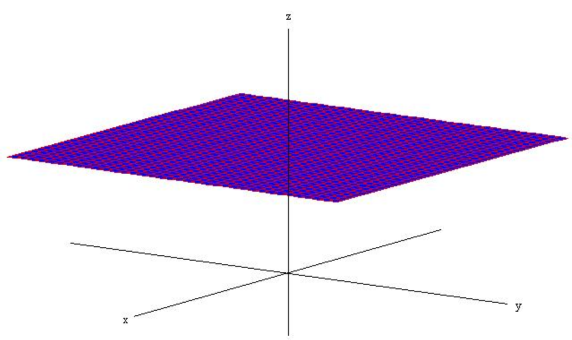
$f(x,y) = \sin x + 2\sin y$

A 2.3. és a 2.4. ábrákon kétváltozós ($\mathbb{R}$-be képező) függvények grafikonjai láthatók. Míg egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény
$$\mathrm{graph}\, f := \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^2$$
grafikonja a sík egy részhalmaza (egy görbe), addig egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény hasonlóan definiált
$$\mathrm{graph}\, f := \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^3$$
*grafikon*ja egy térbeli ún. *felület*.
Könnyen meggondolható, hogy a konstans $f(x,y) = c$ függvény grafikonja egy vízszintes, vagyis az xy-koordinátasíkkal párhuzamos sík, ld. a 2.5. ábrát.
Az $f(x,y) = x^2$ függvény grafikonja egy végtelenbe nyúló, vályú alakú felület, melynek az y tengelyre merőleges síkokkal való metszetei parabolák, ld. a 2.6. ábrát.
Az $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény grafikonja pedig egy végtelen kúppalást, ld. a 2.7. ábrát.
Az előző alfejezetben bevezetett $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ síkbeli távolság segítségével értelmezhetjük kétváltozós függvények folytonosságát és határértékét. A definíciók az egyváltozós esettel teljesen analóg módon hangzanak – az egyetlen különbség, hogy az értelmezési tartományban a „közelség” fogalmát a d függvény felhasználásával értelmezzük.





2.4. ábra. $f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $f(x,y)=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$



2.5. ábra. $f(x,y)=c$

2.12. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u\in\mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az u pontban*, ha minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta>0$, hogy

$$\text{minden } x\in\mathcal{D}(f),\ d(x,u)<\delta \text{ esetén } |f(x)-f(u)|<\varepsilon.$$

Másképpen: minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta>0$, hogy

$$\text{minden } x\in B(u,\delta)\cap\mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x)\in K_\varepsilon(f(u))$$

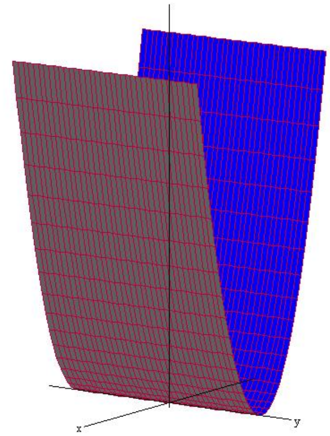
(itt $K_\varepsilon(f(u))=(f(u)-\varepsilon,f(u)+\varepsilon)$ nyílt intervallum).

2.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *folytonos a $H\subset\mathcal{D}(f)$ halmazon*, ha annak minden pontjában folytonos. Azt mondjuk, hogy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *folytonos*, ha a $\mathcal{D}(f)$ halmazon folytonos.

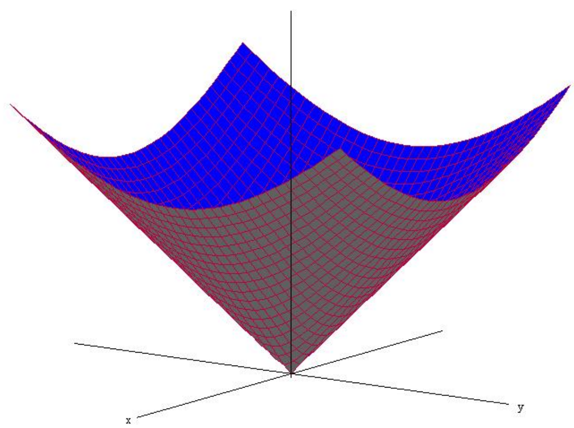
Határértéket – hasonlóan a valós esethez – csak az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban értelmezünk. A v határértékre $v\in\overline{\mathbb{R}}$, tehát $v=\pm\infty$ lehetséges, melynek ε sugarú környezeteit az 1. félévben definiáltuk.

2.14. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u\in\mathcal{D}(f)'$, $v\in\overline{\mathbb{R}}$. Azt mondjuk, hogy f *határértéke az u helyen v*, ha minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta>0$, hogy

$$\text{minden } x\in\mathcal{D}(f),\ x\neq u,\ d(x,u)<\delta \text{ esetén } f(x)\in K_\varepsilon(v).$$



2.6. ábra. $f(x,y) = x^2$



2.7. ábra. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \dot{B}(u,\delta) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(v).$$

Jelölés:

$$\lim_u f = v \text{ vagy } \lim_{x \to u} f(x) = v.$$

A valós függvényeknél tanultakhoz analóg módon igazolhatunk átviteli elveket.

2.15. Tétel (Átviteli elv folytonosságra)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}(f)$. Ekkor ekvivalensek:*

(a) f folytonos u-ban;

(b) minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to u$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(u)$.

2.16. Tétel (Átviteli elv határértékre)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}(f)'$, $v \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor ekvivalensek:*

(a) $\lim_u f = v$;

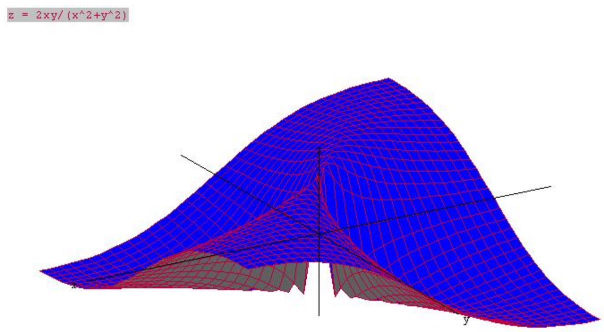
(b) minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq u$, $x_n \to u$ sorozat esetén $f(x_n) \to v$.

Könnyen meggondolható, hogy az alfejezetben található ábrákon bemutatott függvények mindegyike folytonos.

2.17. Példa. A 2.8. ábrán látható $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ függvénynek azonban az origóban, vagyis a (0,0) pontban nincs határértéke.
Ennek igazolásához gondoljuk meg, hogy ha $y = mx$, $(x \neq 0)$ alakú egyeneseken közeledünk az origóhoz, akkor itt a függvényértékek

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2},$$

vagyis m-től függő konstans értéket vesznek fel. Mivel ezek különböző m-ekre különböző értéket adnak, így a függvénynek nincs határértéke (0,0)-ban.



2.8. ábra. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

2.18. Példa. Az $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ függvénynek van határértéke az origóban, mégpedig 0.
Ennek megmutatásához alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az x^2 és y^2 számokra!

$$\sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2},$$

amiből

$$x^2y^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2.$$

Így

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x^2+y^2}{4},$$

és a rendőr-elv alapján következik, hogy $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

A fenti példákból is látszik, hogy a kétváltozós függvények határértéke jóval összetettebb fogalom, mint az egyváltozós határérték, hiszen az adott ponthoz sokféleképpen közelíthetünk.

2.2. Az $\mathbb{R}^p$ és p-változós függvények

A fentiekben $\mathbb{R}^2$-re bevezetett fogalmakat könnyen kiterjeszthetjük $\mathbb{R}^p$-re, tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ esetén. A

$$d = d_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$$

(szintén *euklideszi*nek nevezett) távolságfüggvényt $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ és $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ vektorokra

$$d(x,y) = d_2(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_p-y_p)^2} \tag{2.2}$$

képlettel definiáljuk – és, ha nem okoz félreértést, ugyanúgy jelöljük, mint a megfelelő $\mathbb{R}^2$-beli távolságfüggvényt. Ez a d is teljesíti a 2.2. Állításban felsorolt tulajdonságokat.

Az $\mathbb{R}^p$-beli pontokra (vektorokra) bevezethetünk mindent, amit $\mathbb{R}^2$-en definiáltunk. Fontos megjegyeznünk, hogy a Bolzano-Weiertsrass tétel is érvényben marad $\mathbb{R}^p$-beli sorozatokra. Továbbá, értelmezhetjük $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények folytonosságát, határértékét. Ezekben a definíciókban egyszerűen d helyébe az $\mathbb{R}^p$-beli $d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ távolságfüggvényt kell helyettesíteni.
Megjegyezzük, hogy egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

grafikonja már $p = 3$ esetén is nehezen elképzelhető (és rajzolható le...), hiszen $\mathbb{R}^4$ egy részhalmazáról van szó.

Harmadik fejezet

Metrikus terek

3.1. Alapfogalmak, nyílt és zárt halmazok

Alapötlet: Az $(x, y) \mapsto |x - y|$ hozzárendelés az x és y valós számok **távolságá**t adja meg. Ezt általánosíthatjuk $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ vektorokra úgy, hogy

$$d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots (x_p - y_p)^2} = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

amit az x és y pontok **euklideszi távolságá**nak nevezünk.
Az alábbiakban tovább általánosítjuk a távolság fogalmát.

3.1. Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$ nem üres halmaz. Ekkor X-beli *metrika* vagy *távolságfüggvény* alatt egy olyan $d : X \times X \to [0, +\infty)$ leképezést értünk, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (reflexivitás);

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in X$ esetén (szimmetrikusság);

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ $\forall x, y, z \in X$ esetén (háromszög-egyenlőtlenség).

3.2. Definíció. A *metrikus tér* egy olyan (X, d) rendezett pár, ahol X nem üres alaphalmaz, d pedig X-beli metrika.

3.3. Példák (metrikus terekre)**.**

1. $X := \mathbb{R}^p$,

$$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_p - y_p| = \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k| \tag{3.1}$$

$$d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_p - y_p)^2} = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

Bizonyítás. A metrika (i) és (ii) tulajdonsága könnyen látható a d_1 és d_2 függvényre. A (iii) tulajdonság a d_1 esetén könnyen igazolható, a d_2 esetén – némileg bonyolult számolással – ellenőrizhető. $\square$

2. $X := \mathbb{R}^p$,

$$d_\infty(x, y) := \max_{1 \leq k \leq p} |x_k - y_k|$$

Bizonyítás. Az (i) és (ii) tulajdonságok nyilvánvalók. A (iii) háromszög-egyenlőtlenséghez legyenek $x, y, z \in \mathbb{R}^p$. Minden $k \in \{1, \ldots, p\}$ esetén

$$|x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|,$$

tehát minden $k \in \{1, \ldots, p\}$ esetén

$$|x_k - z_k| \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z).$$

Ebből következik, hogy

$$d_\infty(x, z) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z).$$

□

Amint láttuk, ugyanazon az alaphalmazon sokféle metrika értelmezhető, például $\mathbb{R}^p$-n értelmezhetjük a d_1, d_2 és d_∞ metrikák – így az $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ ill. $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ metrikus terekhez jutunk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezek a metrikus terek sok szempontból hasonlóan „viselkednek” ($p = 1$ esetén mindhárom metrika ugyanazt a távolságot adja).

3. $X \neq \emptyset$ tetszőleges,

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y; \\ 0, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

diszkrét metrika.

Bizonyítás. Az (i) és (ii) tulajdonságok ismét világosak. A (iii) tulajdonság rögtön következik, ha $x = z$. Ha $x \neq z$, akkor a (iii) bal oldalán 1 áll. Másrészt y az x és z pontok közül legfeljebb az egyikkel egyezhet meg, így a jobb oldalon legalább 1 áll, amiből az egyenlőtlenség adódik. □

4. $X := b(H)$ a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon korlátos függvények halmaza,

$$d_\infty(f, g) := \sup_{h \in H} |f(h) - g(h)| .$$

Bizonyítás. Az (i) és (ii) tulajdonságok azonnal adódnak. Legyenek $f, g, u \in b(H)$ függvények. Ekkor minden $h \in H$ esetén

$$|f(h) - u(h)| \leq |f(h) - g(h)| + |g(h) - u(h)| ,$$

tehát minden $h \in H$ esetén

$$|f(h) - u(h)| \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, u),$$

amiből definíció szerint

$$d_\infty(f, u) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, u).$$

□

5. $X := C[a, b]$,

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

az előző egy speciális esete.

3.4. Definíció. Az (X, d) metrikus térben az $u \in X$ pont körüli $r > 0$ sugarú

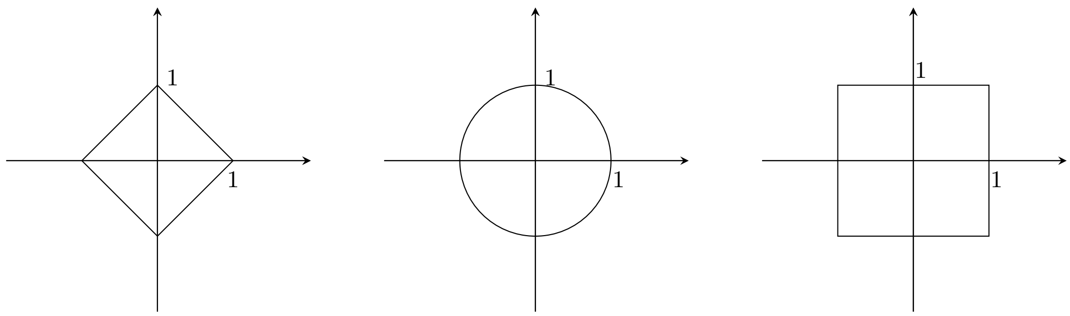
(a) *nyílt gömb:* $B(u, r) := \{x \in X : d(u, x) < r\}$;

(b) *zárt gömb:* $\overline{B}(u, r) := \{x \in X : d(u, x) \leq r\}$;

(c) *gömbfelület:* $\partial B(u, r) := \{x \in X : d(u, x) = r\}$;

(d) *kipontozott gömb(környezet):* $\dot{B}(u, r) := B(u, r) \setminus \{u\}$.

3.5. Definíció. Az u pont r *sugarú környezetén* a $B(u, r)$ nyílt gömböt értjük.



3.1. ábra. Origó körüli egységgömbök a síkon a d_1, d_2 és d_∞ metrikákban

3.6. Példák (gömbökre)**.**

1. A 3.1. ábrán az $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ és $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ terekben a (0,0) pont (origó) körüli 1 sugarú gömbök láthatók.

2. Ha (X, d) a diszkrét metrikus tér egy tetszőleges alaphalmazon, akkor

$$B(u,r) = \begin{cases} \{u\}, & r \le 1; \\ X, & r > 1. \end{cases}$$

3.7. Definíció. Legyen $(x_n) \subset (X, d)$ pontsorozat, $u \in X$. Azt mondjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ vagy $x_n \to u$, vagyis az (x_n) sorozat u-hoz *konvergál*, ha $d(x_n, u) \to 0$, $n \to \infty$ esetén.
Másképp: $x_n \to u$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \ge N$ esetén $d(x_n, u) < \varepsilon$, vagyis $x_n \in B(u, \varepsilon)$.

3.8. *Megjegyzés.* Sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás. Ha $x_n \to u$ és $x_n \to v$ lenne és $u \ne v$, akkor $r := \frac{d(u,v)}{2} > 0$ definícióval $B(u,r) \cap B(v,r) = \emptyset$, ami ellentmond a konvergenciának (egy indextől kezdve a sorozat tagjai mindkét gömbben benne kellene legyenek). □

3.9. Állítás. *Az $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ és $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ terekben egy $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $1 \le k \le p$ esetén a k-adik koordinátákból álló*

$$(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$$

valós sorozat konvergens. Az (x_n) sorozat d_1, d_2 ill. d_∞ metrika szerinti határértéke az az $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ pont, melyre

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = u_k, \quad k = 1, \ldots, p,$$

vagyis a koordináta-sorozatok határértékeiből álló vektor.

Bizonyítás. Házi feladat. □

Ennek az állításnak közvetlen következménye, hogy a fenti p-dimenziós metrikus terekben is érvényben marad a Bolzano-Weierstrass tétel.

3.10. Tétel (Bolzano-Weierstrass)**.** *Az $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ és $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ terekben minden (x_n)* korlátos *sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. A 2.10. Tétel bizonyításával analóg módon látható. □

3.11. Definíció. Legyen $(x_n) \subset (X, d)$ pontsorozat. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *Cauchy-sorozat*, ha $d(x_n, x_m) \to 0$, $n, m \to \infty$.
Másképp: (x_n) Cauchy-sorozat, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \ge N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

3.12. Állítás. *Ha* $(x_n) \subset (X, d)$ *konvergens, akkor Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Mint valós esetben: ha $x_n \to u$, akkor válasszunk adott $\varepsilon > 0$ esetén $\varepsilon/2$-höz küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén $d(x_n, u) < \varepsilon/2$. Ekkor $n, m \geq N$ esetén a háromszög-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, u) + d(x_m, u) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

3.13. *Megjegyzés.* A fenti állítás megfordítása általában nem igaz! Tehát metrikus térben nem igaz feltétlenül, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens, mint azt $\mathbb{R}$-ben annak idején láttuk. Később *teljes metrikus tér*nek fogjuk nevezni azokat a tereket, ahol a Cauchy-sorozatok konvergensek.

3.14. Példa. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent egy $(f_n) \subset b(H)$ függvénysorozatnak a fent definált d_∞ metrikában való konvergenciája! Definíció szerint $f_n \to f$ a d_∞ metrikában ekvivalens azzal, hogy

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{h \in H} |f_n(h) - f(h)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

ami a függvénysorozat *egyenletes konvergenciája* H-n.

3.15. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $H \subset X$, $u \in X$.

1. Az u pont *belső pontja* H-nak, ha
$$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u, r) \subset H$$
(ebből persze következik, hogy $u \in H$). H belső pontjait jelölje $\mathrm{int} H$.

2. Az u pont *külső pontja* H-nak, ha
$$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u, r) \subset X \setminus H$$
(ebből persze következik, hogy $u \notin H$). H külső pontjait jelölje $\mathrm{ext} H$. Világos, hogy
$$\mathrm{ext} H = \mathrm{int}(X \setminus H).$$

3. Az u pont *határpontja* H-nak, ha
$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } B(u, r) \cap H \neq \emptyset \text{ és } B(u, r) \cap (X \setminus H) \neq \emptyset.$$
H határpontjait jelölje ∂H.

4. Az u pont *torlódási pontja* H-nak, ha
$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{B}(u, r) \cap H \neq \emptyset.$$
H torlódási pontjait jelölje H'.

5. Az u pont *izolált pontja* H-nak, ha
$$\text{létezik } r > 0, \text{ melyre } B(u, r) \cap H = \{u\}.$$

6. A H halmaz *lezártja*
$$\overline{H} := \mathrm{int} H \,\dot{\cup}\, \partial H = H \cup \partial H.$$

3.16. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy bármely $H \subset X$ esetén

$$X = \mathrm{int} H \,\dot{\cup}\, \partial H \,\dot{\cup}\, \mathrm{ext} H.$$

3.17. Példák.

1. $(X,d) := (\mathbb{R}, d_1)$, $H := (a,b)$ intervallum (vagy $H := [a,b)$, $H := (a,b]$, $H := [a,b]$.) Ekkor $\mathrm{int}H = (a,b)$, $\mathrm{ext}H = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, $\partial H = \{a,b\}$, $H' = [a,b]$, $\overline{H} = [a,b]$, izolált pontja nincs.
2. $(X,d) := (\mathbb{R}, d_1)$, $H := \mathbb{Q}$ racionális számok halmaza. Ekkor $\mathrm{int}H = \mathrm{ext}H = \emptyset$, $\partial H = H' = \overline{H} = \mathbb{R}$, izolált pontja nincs. Ugyanezek érvényesek $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ra.
3. $(X,d) := (\mathbb{R}, d_1)$, $H := [0,1] \cup \{2\}$. Ekkor $\mathrm{int}H = (0,1)$, $\mathrm{ext}H = (-\infty, 0) \cup (1,2) \cup (2, \infty)$, $\partial H = \{0,1,2\}$, $H' = [0,1]$, $\overline{H} = H$, izolált pontjainak halmaza $\{2\}$.

3.18. Tétel. *Legyen (X,d) metrikus tér, $H \subset X$, $u \in X$. Ekkor ekvivalensek:*

(i) $u \in H'$;

(ii) $\forall r > 0$ *esetén* $B(u,r) \cap H$ *végtelen halmaz;*

(iii) $\exists (x_n) \subset H \setminus \{u\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.

Bizonyítás. A $(ii) \Rightarrow (i)$ a definícióból rögtön következik.
$(i) \Rightarrow (iii)$: tekintsük a $B(u, \frac{1}{n})$ gömböket, és legyen $x_n \in \dot{B}(u, \frac{1}{n}) \cap H$, ami H' definíciója szerint létezik. Ekkor $d(x_n, u) < \frac{1}{n}$ miatt $x_n \to u$, és x_n választása miatt $x_n \neq u$, $n \in \mathbb{N}$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: mivel $\forall r > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$-re $x_n \in B(u,r)$, ezért az állítás következik. □

3.19. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér, $H \subset X$. Azt mondjuk, hogy H *nyílt halmaz*, ha minden pontja belső pont, vagyis $H = \mathrm{int}H$ – ami ekvivalens azzal, hogy $H \cap \partial H = \emptyset$, vagyis H egyetlen határpontját sem tartalmazza. Azt mondjuk, hogy H *zárt halmaz*, ha minden határpontját tartalmazza, vagyis $H = \overline{H}$.

3.20. Tétel (:-)). *A halmaz nem ajtó! Vagyis: nem igaz, hogy egy halmaz vagy nyílt vagy zárt.*

3.21. Példák. Tetszőleges (X,d) metrikus térben $\emptyset$ és X zárt is és nyílt is. $(\mathbb{R}, d_e)$-ben az $(a,b]$ intervallum se nem zárt se nem nyílt.

3.22. Állítás. *Egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha a komplementere zárt és fordítva (pontosan akkor zárt, ha a komplementere nyílt).*

Bizonyítás. Következik abból, hogy $\partial H = \partial(X \setminus H)$. □

3.23. Példa. Legyen (X,d) a diszkrét metrikus tér tetszőleges alaphalmazon. Ekkor minden $H \subset X$ halmaz nyílt és következésképpen minden halmaz zárt.

Bizonyítás. Világos, hogy $B(x,1) = \{x\} \subset H$ minden $x \in H$ esetén. □

3.24. *Megjegyzés.* A fentiek alapján $H \subset X$ pontosan akkor nyílt, ha minden $h \in H$ ponthoz van olyan $r > 0$, hogy $B(h,r) \subset H$. A következő állítás a zárt halmazok egy karakterizációját adja.

3.25. Állítás. *Egy $F \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat esetén*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in F.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy F zárt és legyen $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat, $x_n \to u$. Indirekt tegyük fel, hogy $u \in X \setminus F$. Mivel ez utóbbi halmaz a 3.22. Állítás szerint nyílt, ezért létezik $r > 0$ sugár, hogy $B(u,r) \subset X \setminus F$. Ekkor a konvergencia definíciója szerint van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$x_n \in B(u,r) \subset X \setminus F,$$

ami ellentmond annak, hogy $(x_n) \subset F$.
Másodszor tegyük fel, hogy minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$. Indirekt tegyük fel, hogy F nem zárt, tehát legyen $u \in \partial F \cap (X \setminus F)$. Ekkor a határpont definíciója miatt minden $\frac{1}{n} > 0$ számhoz létezik egy olyan u_n pont, mely benne van az u körüli $\frac{1}{n}$ sugarú gömbben és F-ben is, vagyis

$$\exists u_n \in B(u, \frac{1}{n}) \cap F, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Az így kapott $(u_n) \subset F$ sorozatra $d(u_n, u) < \frac{1}{n}$, tehát $u_n \to u$, másrészt $u \in X \setminus F$, ami ellentmondás. □

3.26. Állítás. *Ha H_1 és H_2 nyílt halmazok, akkor $H_1 \cup H_2$ is nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $x \in H_1 \cup H_2$. Ekkor $x \in H_1$ vagy $x \in H_2$ teljesül. Legyen például $x \in H_1$. Mivel H_1 nyílt halmaz, ezért $\exists r > 0$, hogy $B(x, r) \subset H_1 \subset H_1 \cup H_2$, tehát $x \in \text{int}(H_1 \cup H_2)$. □

3.27. Következmény. *Akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.*

3.28. Állítás. *Ha H_1 és H_2 zárt halmazok, akkor $H_1 \cap H_2$ is zárt halmaz.*

Bizonyítás. A de Morgan-azonosság alapján

$$X \setminus (H_1 \cap H_2) = (X \setminus H_1) \cup (X \setminus H_2),$$

ami a 3.22. és az előző Állítás alapján nyílt. Ismét alkalmazva a 3.22. Állítást kapjuk, hogy $H_1 \cap H_2$ zárt. □

3.29. Következmény. *Akárhány zárt halmaz metszete zárt.*

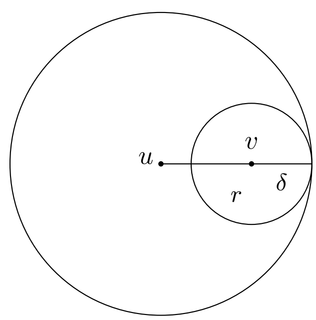
3.1.1. Példák nyílt halmazokra

3.30. Állítás. *Tetszőleges $B(u, r)$ nyílt gömb nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $v \in B(u, r)$. Megmutatjuk, hogy $\delta := r - d(u, v) > 0$ esetén $B(v, \delta) \subset B(u, r)$. Ha $x \in B(v, \delta)$, akkor

$$d(x, u) \leq d(x, v) + d(v, u) < \delta + d(v, u) = r,$$

vagyis $x \in B(u, r)$. Ld. a 3.2. ábrát.



3.2. ábra.

□

3.31. Állítás. *$X \setminus \overline{B}(u, r)$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X \setminus \overline{B}(u, r)$. Megmutatjuk, hogy $\delta := d(x, u) - r$ esetén $B(x, \delta) \subset X \setminus \overline{B}(u, r)$. Legyen $y \in B(x, \delta)$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(y, u) \geq d(x, u) - d(x, y) > d(x, u) - \delta = d(x, u) - d(x, u) + r = r,$$

vagyis $y \in X \setminus \overline{B}(u, r)$. □

3.32. Állítás. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén $\text{int}H$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Be kell látni, hogy $\text{int}H = \text{int}(\text{int}H)$. Az $\text{int}(\text{int}H) \subset \text{int}H$ tartalmazás nyilvánvaló. Legyen $x \in \text{int}H$, ekkor létezik $r > 0$, hogy $B(x, r) \subset H$. Megmutatjuk, hogy $B(x, r) \subset \text{int}H$ is teljesül. Legyen $y \in B(x, r)$. A 3.30. Állítás alapján van olyan $\delta > 0$, melyre $B(y, \delta) \subset B(x, r) \subset H$, vagyis $y \in \text{int}H$ is teljesül. □

3.33. Következmény. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén $\text{ext}H$ nyílt halmaz (ugyanis $\text{ext}H = \text{int}(X \setminus H)$).*

3.34. Tétel. *Egy $H \subset (\mathbb{R}, d_e)$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha előáll megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum uniójaként.*

Vázlat. Egyrészt tetszőleges ilyen halmaz nyílt a 3.26. Állítás szerint. Másrészt, ha $H \subset (\mathbb{R}, d_e)$ nyílt halmaz, akkor $h \in H$ esetén definiáljuk az alábbi nyílt intervallumot:

$$I_h := \cup \{ J \subset H : J \text{ nyílt intervallum, } h \in J \} .$$

Ilyen J intervallum van H nyíltsága miatt, és az is világos, hogy I_h egy nyílt intervallum. Meggondolható, hogy tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén

$$I_{h_1} \cap I_{h_2} = \emptyset \text{ vagy } I_{h_1} = I_{h_2}$$

teljesül. A bizonyítás hátralévő része következik abból, hogy a számegyenesen bármely diszjunkt nyílt intervallumokból álló rendszer megszámlálható (hiszen mindegyikből kivehető egy-egy, páronként különböző racionális szám). □

3.1.2. Példák zárt halmazokra

3.35. Állítás. *Tetszőleges $\overline{B}(u,r)$ zárt gömb zárt halmaz.*

Bizonyítás. Következik a 3.31. és a 3.22. Állításokból. □

3.36. Állítás. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén $\overline{H}$ zárt halmaz – vagyis a halmaz lezártja valóban zárt.*

Bizonyítás. Következik abból, hogy a komplementere, $X \setminus \overline{H} = \text{ext}H$ nyílt a 3.33. Következmény szerint. □

3.37. Állítás. *Bármely $H \subset X$ esetén ∂H zárt halmaz.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy $X \setminus \partial H = \text{int}H \cup \text{ext}H$ nyílt. Ez következik a 3.32., 3.33 és 3.26. Állításokból – vagyis hogy $\text{int}H$ és $\text{ext}H$ nyílt halmazok, és az uniójuk is az. □

3.38. Állítás. *Bármely $H \subset X$ esetén H' zárt halmaz.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $X \setminus H'$ nyílt halmaz. Legyen $u \in X \setminus H'$. Megmutatjuk, hogy van egy u körüli gömb, mely része $X \setminus H'$-nak. A 3.18.(ii) Tétel szerint u-nak van olyan $B(u,r)$ környezete, melyben csak véges sok H-beli pont található. Ekkor $B(u,r) \subset X \setminus H'$. Ugyanis, ha volna $y \in B(u,r) \cap H'$, akkor véve y-nak egy $B(u,r)$-be eső $B(y,\delta)$ gömbkörnyezetét (ld. 3.30. Állítás), erre nem teljesülhetne, hogy $B(y,\delta) \cap H$ végtelen halmaz (hiszen $B(y,\delta) \subset B(u,r)$, és $B(u,r)$-ben csak véges sok H-beli pont van), ami ellentmond annak, hogy $y \in H'$. □

3.2. Metrikus terek teljessége

3.39. Példa (Cauchy-sorozatra, ami nem konvergens)**.** Legyen $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d := d_1|_X$. Tekintsük az $(\frac{1}{n}) \subset X$ sorozatot. Könnyen látható, hogy ez a megadott metrikában Cauchy-sorozat. Másrészt nem lehet konvergens, mert $\mathbb{R}$-ben létezik határértéke (a 0), ami nem eleme X-nek.

3.40. Definíció (FONTOS!)**.** Egy (X,d) metrikus teret *teljes metrikus tér*nek mondunk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

3.41. Példák (Teljes metrikus terekre)**.**

1. $(\mathbb{R}, d_1)$, ld. I. félév.
2. $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ és $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$. Meggondolható, hogy $(x_n) \subset (\mathbb{R}^p, d_i)$ $i = 1{,}2,\infty$ pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha minden $k \in \{1,\ldots,p\}$ esetén az k. koordinátákból álló $(x_{n,i}) \subset \mathbb{R}$ sorozat Cauchy-sorozat – tehát konvergens, a valós sorozatoknál tanultak szerint. Ezután az állítás következik a 3.9. Állításból.
3. (X,d), ahol $X \neq \emptyset$ tetszőleges alaphalmaz, d a diszkrét metrika. Könnyen látható (ld. gyakorlat), hogy a diszkrét metrikus térben a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok is csak a kvázikonstans (egy indextől kezdve állandó) sorozatok.

4. A $(b(H), d_\infty)$ tér teljes metrikus tér.

Bizonyítás. * Legyen $(f_n) \subset b(H)$ Cauchy-sorozat, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq$ $\geq N$ esetén

$$d_\infty(f_n, f_m) := \sup_{h \in H} |f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy minden $h \in H$ esetén

$$|f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon,$$

tehát rögzített h-ra $(f_n(h)) \subset \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, így konvergens. Jelölje a határértéket

$$\lim_{n \to \infty} f_n(h) := f(h),\ h \in H.$$

Megmutatjuk, hogy (f_n) a d_∞ metrikában tart az így definiált $f \in b(H)$ függvényhez. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Válasszunk $\varepsilon/2$-höz $N \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy $n, m \geq N$ esetén

$$\sup_{h \in H} |f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon/2, \tag{3.3}$$

tehát speciálisan, $n := N$ és $m > N$-re

$$|f_N(h) - f_m(h)| < \varepsilon/2 \text{ minden } h \in H\text{-ra}.$$

Ekkor az $m \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy tetszőleges $h \in H$-ra

$$|f_N(h) - f(h)| \leq \varepsilon/2.$$

Másrészt ha $n \geq N$, akkor (3.3) és az előbbiek alapján minden $h \in H$ esetén

$$|f_n(h) - f(h)| \leq |f_n(h) - f_N(h)| + |f_N(h) - f(h)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Tehát találtunk olyan N-et, hogy ha $n \geq N$, akkor

$$\sup_{h \in H} |f_n(h) - f(h)| \leq \varepsilon,$$

amiből az állítás következik. □

3.42. Állítás. *Legyen (X, d) teljes metrikus tér és $M \subset X$* zárt *részhalmaz. Ekkor $d_M := d|_{M \times M}$ jelöléssel (M, d_M) teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset M$ Cauchy-sorozat d_M szerint. Ekkor $(x_n) \subset X$ is teljesül, és (x_n) nyilván Cauchy-sorozat d szerint is, tehát (X, d) teljessége miatt konvergens. Legyen a határértéke $u \in X$. No de a 3.25. Állítás miatt $u \in M$ is teljesül, és ezzel az állítást beláttuk. □

3.43. Következmény. *A 3.41. Példában felsoroltak alapján $([a, b], d_1)$, $(C[a, b], d_\infty)$ és $(R[a, b], d_\infty)$ teljes metrikus terek (ld. az 1.15. és az 1.18. Tételeket).*

3.44. Definíció. Legyenek (X, d) és (Y, ρ) tetszőleges metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to Y$ leképezés *kontrakció*, ha létezik $q \in [0,1)$, hogy

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq q \cdot d(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in X.$$

3.45. Tétel (Banach-féle fixponttétel)**.** *Legyen (X, d)* teljes *metrikus tér, $f : X \to X$ kontrakció. Ekkor f-nek létezik egyetlen fixpontja, vagyis $\exists!\, u \in X$, melyre*

$$f(u) = u.$$

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, és indukcióval, $x_n := f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Az így kapott $(x_n) \subset X$ sorozatra, $n > m$ esetén a metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m). \tag{3.4}$$

Másrészt, az (x_n) sorozat definíciója szerint és kihasználva, hogy f kontrakció, kapjuk, hogy minden $k = m+1, \ldots, n$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k-1}) &= d(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \le q \cdot d(x_{k-1}, x_{k-2}) = \\ &= d(f(x_{k-2}), f(x_{k-3})) \le q^2 \cdot d(x_{k-2}, x_{k-3}) \le \\ &\cdots \le q^{k-1} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

A (3.4) és a (3.5) alapján

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\le \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^m\right) \cdot d(x_1, x_0) = \frac{q^m - q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) \to 0,\ n > m \to \infty \end{aligned}$$

tehát $(x_n) \subset X$ Cauchy-sorozat, és X teljessége miatt konvergens. Legyen

$$u := \lim_{n\to\infty} x_n.$$

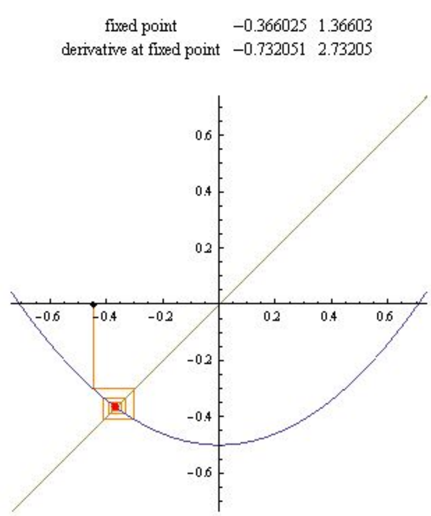
Megmutatjuk, hogy u fixpontja f-nek. Mivel

$$\begin{aligned} 0 \le d(u, f(u)) \le d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) &= d(u, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(u)) \\ &\le d(u, x_n) + q \cdot d(x_{n-1}, u) \to 0, n \to \infty, \end{aligned}$$

ezért $d(u, f(u)) = 0$, tehát $u = f(u)$. Ha $v = f(v)$ is teljesül, akkor

$$0 \le d(u, v) = d(f(u), f(v)) \le q \cdot d(u, v),$$

ami $0 \le q < 1$ miatt csak úgy lehet, hogy $d(u, v) = 0$, vagyis $u = v$. □



3.3. ábra. A Banach-fixponttétel szemléltetése az $f(x) = x^2 - 0.5$ függvényre a $[-0.45, 0.45]$ intervallumon

3.3. Kompaktság metrikus terekben

3.46. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $\emptyset \neq H \subset X$ halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam} H := \sup\{d(x,y) : x,y \in H\}.$$

$\operatorname{diam} \emptyset := 0$.

Fontos, hogy a fenti definícióban sup helyett nem írhatunk max-ot, pl. $(\mathbb{R}, d_e)$-ben egy $I = (a,b)$ intervallum átmérője $b-a$, de nincs két olyan pontja, aminek ennyi lenne a távolsága. Másrészt ha (X,d) a diszkrét metrikus tér, akkor $\operatorname{diam}(B(x,\frac{1}{2})) = 0$ bármely $x \in X$ esetén.

3.47. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $H \subset X$ halmazt *korlátos*nak mondunk, ha $\operatorname{diam} H < \infty$.

A következő tétel azt mondja, hogy egy halmaz pontosan akkor korlátos, ha belefoglalható egy (tetszőleges pont körüli) gömbbe.

3.48. Tétel. *Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $\emptyset \neq H \subset X$ esetén ekvivalensek:*

(i) H korlátos;

(ii) $\exists u \in X$ és $\exists r > 0$, hogy $H \subset B(u,r)$;

(iii) $\forall v \in X$ esetén $\exists \rho > 0$, hogy $H \subset B(v,\rho)$.

Bizonyítás. A *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)* nyilvánvaló. A *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* abból következik, hogy *(ii)* fennállása esetén $\operatorname{diam} H \leq 2r$ teljesül.
(i) $\Rightarrow$ *(iii)*: legyen $v \in X$ adva, és válasszunk egy tetszőleges $h \in H$ pontot. Legyen $\rho := \operatorname{diam} H + d(h,v) + 1$. Ekkor bármely $x \in H$ esetén

$$d(x,v) \leq d(x,h) + d(h,v) \leq \operatorname{diam} H + d(h,v) < \rho,$$

tehát $H \subset B(v,\rho)$. □

A fenti állításból (is) látszik, hogy a korlátosság fogalma mennyire metrika-függő fogalom. Ha például $\mathbb{R}^2$-en tekintjük a diszkrét metrikát, ebben minden halmaz korlátos lesz, hiszen az egész tér belefoglalható bármely pont körüli, tetszőleges 1-nél nagyobb sugarú nyílt gömbbe. A „szokásos” euklideszi metrikában azonban nyilvánvaló, hogy nem minden halmaz korlátos.

3.49. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $H \subset X$ *halmazt (sorozat)kompakt*nak mondunk, ha bármely H-beli sorozatnak van H-beli ponthoz konvergáló részsorozata. Az (X,d) metrikus tér *(sorozat)kompakt*, ha benne X sorozatkompakt halmaz, vagyis tetszőleges sorozatnak van konvergens részsorozata.

3.50. Példa. Az I. évben tanultak alapján az $(\mathbb{R}, d_1)$ térben minden $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum sorozatkompakt.

3.51. Tétel. *Legyen (X,d) metrikus tér. Ha $H \subset X$ sorozatkompakt, akkor H korlátos és zárt halmaz.*

Bizonyítás. Először a zártságot bizonyítjuk. A 3.25. Állítás alapján elég megmutatni, hogy bármely H-beli konvergens sorozat határértéke H-ban van. Legyen $(x_n) \subset H$ konvergens sorozat. Mivel H sorozatkompakt, ezért minden H-beli sorozatnak, így (x_n)-nek is van H-ban lévő ponthoz konvergáló részsorozata – no de akkor $\lim x_n \in H$ is teljesül, hiszen $\lim x_n$ megegyezik minden részsorozatának a határértékével.
Másodszor tegyük fel indirekt, hogy H sorozatkompakt, de nem korlátos. Legyen $x_1 \in H$ tetszőleges. Válasszunk $x_2 \in H \setminus B(x_1,1)$ pontot – ilyen létezik az indirekt feltevés és a 3.48. Tétel szerint. Indukcióval, az n. lépésben válasszunk

$$x_n \in H \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i,1)\right)$$

pontot – ilyen létezik, mert világos, hogy véges sok gömb uniója, $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i,1)$ korlátos. Tehát kaptunk egy $(x_n) \subset H$ sorozatot, melyre teljesül, hogy

$$d(x_n, x_i) \geq 1,\ i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.6}$$

Ebből a sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat, hiszen nem Cauchy-sorozat. □

3.52. Példa. * Korlátos és zárt, de nem sorozatkompakt halmazra.
Legyen
$$X := \ell^\infty = \{(x_n) : (x_n) \text{ korlátos, valós sorozat}\}.$$
A $d : X \times X \to [0, \infty)$,
$$d(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$
függvényről könnyen látható, hogy metrika. Álljon a H halmaz azon sorozatokból, melyeknek pontosan egy eleme 1, a többi 0, vagyis a
$$\begin{aligned} e_1 &:= (1,0,0, \ldots) \\ e_2 &:= (0,1,0, \ldots) \\ &\vdots \\ e_n &:= (0,0,0, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0 \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$
jelöléssel
$$H := \{e_i : i \in \mathbb{N}\}.$$
Világos, hogy $H \subset X$ és $H \subset \overline{B}(\underline{0}, 1)$, ahol most $\underline{0}$ a konstans 0 sorozatot jelöli, tehát H korlátos halmaz. Mivel $d(e_i, e_j) = 1$, ha $i \neq j$, ezért a H elemei körüli gömbökre
$$B\left(e_i, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(e_j, \frac{1}{2}\right) = \emptyset, \; i \neq j$$
teljesül. Ebből következik, hogy ha $x \in \partial H$, akkor $x \in B(e_j, \frac{1}{2})$ valamely $j \in \mathbb{N}$ számra. Ha $x \neq e_j$ volna, akkor létezne x körül olyan gömb, mely nem tartalmazza e_j-t, így nem lehetne $x \in \partial H$. Ebből kapjuk, hogy $\partial H \subset H$ (sőt, $\partial H = H$), tehát H zárt halmaz is. Másrészt $d(e_i, e_j) = 1$, $i \neq j$ miatt az (e_n) sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat (mivel nem Cauchy-sorozat), tehát H nem sorozatkompakt.

3.53. Tétel. *Sorozatkompakt halmaz zárt részhalmaza sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen H sorozatkompakt és $G \subset H$ zárt halmaz, $(x_n) \subset G$ tetszőleges sorozat. Mivel $(x_n) \subset H$ is teljesül, azért a sorozatnak van olyan (x_{n_k}) részsorozata, mely egy H-beli ponthoz konvergál. Node a 3.25. Állítás szerint ez a határérték G-ben van, amivel az állítást beláttuk. □

3.54. Tétel. *Az* $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ *és* $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ *terekben minden korlátos és zárt halmaz sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen $H \subset (\mathbb{R}^p, d_k)$ $(k = 1{,}2$, vagy $\infty)$ korlátos és zárt halmaz, továbbá $(x_n) \subset H$ sorozat. Mivel (x_n) a feltétel szerint korlátos is, ezért a 3.10. Bolzano-Weierstrass tétel miatt (x_n)-nek van konvergens részsorozata. No de H zárt is, ezért a 3.25. Állítás alapján e részsorozat határértéke is H-ban van, amivel a bizonyítás kész. □

3.55. Tétel. *Az* $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ *és* $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ *terekben egy halmaz pontosan akkor sorozatkompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Következik az előző és a 3.51. Tételekből. □

Negyedik fejezet

Folytonosság, határérték metrikus terekben

Legyenek az alábbiakban (X_i, d_i), $i = 1{,}2$ metrikus terek, $\mathcal{D}(f) \subseteq X_1$, $f : X_1 \to X_2$. Az (X_1, d_1) térbeli gömböket B_1-el, az (X_2, d_2) térbeli gömböket B_2-vel jelöljük.

4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az* $u \in \mathcal{D}(f)$ *helyen* vagy *az* u *pontban*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f),\ d_1(x, u) < \delta \text{ esetén } d_2(f(x), f(u)) < \varepsilon.$$

Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in B_1(u, \delta) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in B_2(f(u), \varepsilon).$$

4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *folytonos a* H *halmazon*, ha annak minden pontjában folytonos.

4.3. Definíció. Legyen $f : X_1 \to X_2$, $u \in \mathcal{D}(f)'$, $v \in X_2$. Azt mondjuk, hogy f *határértéke az* u *helyen* v, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f),\ x \neq u,\ d_1(x, u) < \delta \text{ esetén } d_2(f(x), v) < \varepsilon.$$

Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \dot{B}_1(u, \delta) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in B_2(v, \varepsilon).$$

Jelölés:

$$\lim_u f = v \text{ vagy } \lim_{x \to u} f(x) = v.$$

A valós függvényeknél tanultakhoz analóg módon megfogalmazhatunk átviteli elveket.

4.4. Tétel (Átviteli elv folytonosságra)**.** *Ekvivalensek:*

(a) f *folytonos* u*-ban;*

(b) minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to u$ *sorozat esetén* $f(x_n) \to f(u)$.

Bizonyítás. A valós függvényekre vonatkozó átviteli elvhez hasonlóan történik.
$(a) \Rightarrow (b)$: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to u$, valamint $\varepsilon > 0$. Ekkor a folytonosság definíciója miatt létezik $\delta > 0$, hogy minden $x \in \mathcal{D}(f)$, $d_1(x, u) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(u)) < \varepsilon$. Node a konvergencia miatt $\delta > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ indexre $d_1(x_n, u) < \delta$. Tehát $n \geq N$-re $d_2(f(x_n), f(u)) < \varepsilon$, így $f(x_n) \to f(u)$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Indirekt tegyük fel, hogy f nem folytonos u-ban. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyhez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén találunk $x_n \in B_1(u, \frac{1}{n}) \cap \mathcal{D}(f)$ elemet, hogy $f(x_n) \notin B_2(f(u), \varepsilon)$. Így kaptunk egy $x_n \to u$ sorozatot (hiszen $d_1(x_n, u) < \frac{1}{n} \to 0$), melyre $f(x_n) \nrightarrow f(u)$, ellentmondás. $\square$

4.5. Tétel (Átviteli elv határértékre)**.** *Legyen $f : X_1 \to X_2$, $u \in \mathcal{D}(f)'$, $v \in X_2$. Ekkor ekvivalensek:*

(a) $\lim_u f = v$;

(b) minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq u$, $x_n \to u$ sorozat esetén $f(x_n) \to v$;
$(b)^*$ minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq u$, $x_n \to u$ sorozat esetén $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens.

Bizonyítás. A folytonosságéhoz ill. a valós függvényeknél tanultakhoz hasonló módon történik. □

4.6. Definíció. Az $f : X_1 \to X_2$ függvényről azt mondjuk, hogy *Lipschitz-tulajdonságú*, ha létezik $L > 0$, hogy

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y) \text{ minden } x, y \in \mathcal{D}(f) \text{ esetén.}$$

Világos, hogy a 3.44. Definícióban bevezetett kontrakció Lipschitz-tulajdonságú $L = q$ választással.

4.7. Állítás. *Ha f Lipschitz-tulajdonságú, akkor folytonos is.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\varepsilon > 0$-hoz $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ választás jó. □

4.8. Példák (Metrikus tereken értelmezett folytonos függvényekre)**.**

1. Az
$$+, -, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
(összeadás, kivonás, szorzás) függvények folytonosak (bizonyítás: átviteli elvvel és a való sorozatoknál tanultak segítségével, $\mathbb{R}^2$-en vehetjük a d_1, d_2, vagy d_∞ metrikát).

2. $$\div : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$$
(osztás) folytonos (bizonyítás szintén átviteli elvvel).

3. Ha (X_i, d_i), $i = 1{,}2$ tetszőleges metrikus terek, $c \in X_2$ adott, akkor az $f(x) := c$, $x \in X_1$ konstans függvény folytonos.

4. Legyen $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ adva. Az
$$A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad Ax := \sum_{k=1}^{p} a_k x_k = \langle a, x\rangle, \quad x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$$
lineáris függvény folytonos az $(\mathbb{R}^p, d_i)$, $i = 1{,}2, \infty$ terekben. Vegyük először $\mathbb{R}^p$-n a d_∞ metrikát!
$$\begin{aligned} |Ax - Ay| &= \left|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k - \sum_{k=1}^{p} a_k y_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot (x_k - y_k)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} |a_k| \cdot |x_k - y_k| \leq \max_{k\in\{1,\ldots,p\}} |x_k - y_k| \cdot \sum_{k=1}^{p} |a_k| = d_\infty(x, y) \cdot L_\infty, \end{aligned}$$
vagyis A Lipschitz-tulajdonságú $L_\infty := \sum_{k=1}^{p} |a_k|$ konstanssal.
Ha most $\mathbb{R}^p$-n a d_1 metrikát tekintjük, akkor
$$|Ax - Ay| \leq \sum_{k=1}^{p} |a_k| \cdot |x_k - y_k| \leq \max_{k\in\{1,\ldots,p\}} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k| = L_1 \cdot d_1(x, y),$$
vagyis A Lipschitz-tulajdonságú $L_1 := \max_{k\in\{1,\ldots,p\}} |a_k|$ konstanssal.
Ha pedig $\mathbb{R}^p$-t a d_2 metrikával látjuk el, akkor a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján
$$\begin{aligned} |Ax - Ay| &= \left|\sum_{k=1}^{p} a_k x_k - \sum_{k=1}^{p} a_k y_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot (x_k - y_k)\right| \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{p} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x_k - y_k)^2} = L_2 \cdot d_2(x, y), \end{aligned}$$
vagyis A Lipschitz-tulajdonságú $L_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{p} a_k^2}$ konstanssal.

5. Legyen $\underline{A} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ egy $q \times p$-es valós mátrix. A fentihez hasonlóan meggondolható, hogy az
$$A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, \quad Ax := \underline{A} \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^p,$$
vagyis az $\underline{A}$ mátrixszal való szorzás egy folytonos lineáris leképezés $\mathbb{R}^p$-ből $\mathbb{R}^q$-ba.

6. Tekintsük az
$$F : (R[a,b], d_\infty) \to \mathbb{R}, \quad Ff := \int_a^b f, \quad f \in R[a,b]$$
lineáris leképezést. Ennek folytonosságát kétféleképpen is bizonyíthatjuk. Az átviteli elv segítségével: láttuk (1.18. Tétel), hogy ha $f_n \to f$ a d_∞ metrikában – vagyis $f_n \hookrightarrow f$ –, akkor
$$Ff_n = \int_a^b f_n \to \int_a^b f = Ff.$$
Másrészt:
$$\begin{aligned}|Ff - Fg| &= \left|\int_a^b f - \int_a^b g\right| = \left|\int_a^b (f-g)\right| \\ &\le (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = L \cdot d_\infty(f,g),\end{aligned}$$
vagyis F Lipschitz-tulajdonságú.

A továbbiakban az egyváltozós függvények folytonosságáról és határértékéről tanult fontosabb tételek metrikus terek között ható függvényekre való általánosításával foglalkozunk.

4.9. Tétel (Kompozíciófüggvény folytonossága)**.** *Legyenek (X_i, d_i) metrikus terek, $i = 1,2,3$, valamint $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3$ függvények. Tegyük fel, hogy f_1 folytonos az $u_1 \in \mathcal{D}(f_1)$ helyen, f_2 folytonos az $u_2 := f_1(u_1) \in \in \mathcal{D}(f_2)$ helyen. Ekkor $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ folytonos az u_1 helyen.*

Bizonyítás. A 4.4. Tételbeli átviteli elvet fogjuk alkalmazni. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_2 \circ f_1)$, $x_n \to u_1$ tetszőleges sorozat. Ekkor $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_1)$ is teljesül. Az f_1 folytonosságára vonatkozó átviteli elv alapján, $f_1(x_n) \to f_1(u_1) = u_2$. Az f_2 függvény u_2-beli folytonosságát kihasználva
$$f_2(f_1(x_n)) \to f_2(f_1(u_1)) = f_2(u_2),$$
amiből az állítás következik. □

4.10. Tétel (Kompozíciófüggvény határértéke)**.** *Legyenek (X_i, d_i) metrikus terek, $i = 1,2,3$, $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : : X_2 \to X_3$ függvények. Továbbá legyen $u_1 \in \mathcal{D}(f_1)'$. Tegyük fel, hogy létezik*
$$\lim_{u_1} f_1 := u_2.$$
Az alábbi két állítás bármelyikéből következik, hogy
$$\exists \lim_{u_1}(f_2 \circ f_1) = u_3.$$

(i) $u_2 \in \mathcal{D}(f_2)$ és f_2 folytonos u_2-ben, $f_2(u_2) = u_3$;

(ii) $u_2 \in \mathcal{D}(f_2)'$ és $\exists \lim_{u_2} f_2 := u_3$, továbbá f_1 injektív az u_1 egy környezetében (vagy $u_2 \notin \mathcal{R}(f_1)$).

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_2 \circ f_1)$, $x_n \to u_1$, $x_n \neq u_1$ tetszőleges sorozat. Ekkor $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_1)$ is teljesül. Az f_1 u_1-beli határértékére vonatkozó átviteli elv alapján, $f_1(x_n) \to u_2$.
Az (i) esetben az f_2 folytonosságára vonatkozó átviteli elv miatt $f_2(f_1(x_n)) \to f_2(u_2) = u_3$
Az (ii) esetben elég nagy n-re $f_1(x_n) \neq u_2$, tehát alkalmazható az f_2 u_2-beli határértékére vonatkozó átviteli elv, amiből az állítás következik. □

4.11. Példák. Az átviteli elvből és az előző tételekből könnyen látható, hogy minden (n változós) polinomfüggvény és racionális törtfüggvény, valamint minden komplex polinomfüggvény folytonos.

A következő tétel az 1. évben megismert Weierstrass-tétel általánosítása metrikus terek között ható folytonos függvényekre.

4.12. Tétel (Weierstrass-tétel)**.** *Legyenek* (X_i, d_i)*,* $i = 1{,}2$ *metrikus terek,* $K \subset X_1$ sorozatkompakt *halmaz,* $f : K \to X_2$ *folytonos függvény. Ekkor*

$$f(K) := \{f(x) : x \in K\} \subset X_2$$

halmaz is sorozatkompakt.

Bizonyítás. Legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ adott sorozat. Meg kell mutatnunk, hogy kiválasztható belőle konvergens részsorozat, melynek határértéke $f(K)$-ban van. No de tudjuk, hogy minden n-re $y_n = f(x_n)$ valamely $x_n \in K$ pontra. Az így kapott $(x_n) \subset K$ sorozatból (K sorozatkompaktsága miatt) kiválasztható $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ konvergens részsorozat, melyre

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} := u \in K.$$

Másrészt f folytonos K-n, tehát az átviteli elv miatt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(u) \in f(K)$$

is teljesül. Tehát

$$y_{n_k} := f(x_{n_k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

megfelelő részsorozat. □

4.13. *Megjegyzés.* Az 1. évben tanult Bolzano-Weierstrass tétel szerint egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum sorozatkompakt. A fenti tétel alapján egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény értékkészlet-halmaza sorozatkompakt, a Bolzano-Darboux tétel alapján pedig tudjuk, hogy intervallum. Így a 3.51. Tétel szerint az $\mathcal{R}(f)$ értékkészlet-halmaz egy korlátos és zárt intervallum, tehát van legnagyobb és legkisebb eleme. Ez pedig a tavaly tanult Weierstrass-tétel.

Az alábbi definíció és az azt követő tétel szintén az egyváltozós függvényeknél megismertek általánosítása.

4.14. Definíció. Legyenek (X_i, d_i), $i = 1{,}2$ metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f : X_1 \to X_2$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x, y \in \mathcal{D}(f),\ d_1(x, y) < \delta \text{ esetén } d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

4.15. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha egy függvény egyenletesen folytonos H-n, akkor ott folytonos. Továbbá minden Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen is folytonos.

4.16. Tétel (Általánosított Heine-tétel)**.** *Legyenek* (X_i, d_i)*,* $i = 1{,}2$ *metrikus terek,* $K \subset X_1$ sorozatkompakt *halmaz,* $f : K \to X_2$ *folytonos függvény. Ekkor* f *egyenletesen folytonos* K*-n.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos K-n. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyhez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vannak olyan $x_n, y_n \in K$ pontok, melyekre

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \text{ de } d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Mivel az így definiált $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ sorozat egy sorozatkompakt halmazban van, ezért létezik $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozat, melyre

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} := u \in K.$$

A feltétel alapján

$$d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0,\ k \to \infty,$$

ezért

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = u$$

is teljesül. Az f függvény folytonossága miatt (a 4.4. Tételbeli átviteli elv szerint)

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(u)$$

adódik, ami ellentmond a

$$d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}$$

feltételnek. □

Ötödik fejezet

Jordan-mérték $\mathbb{R}^p$-n

Először a $p = 2$ (sík) esettel foglalkozunk. Olyan m területfüggvényt vagy *mérték*et akarunk definiálni, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

I. $m \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$;

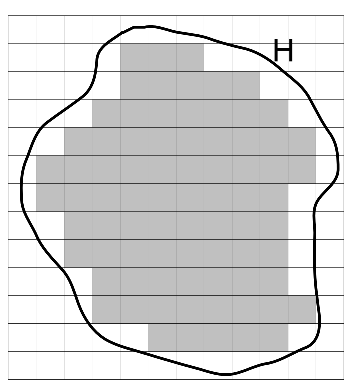
II. egybevágóságra invariáns;

III. additív: ha H és G mérhetőek és egymásba nem nyúlók (vagyis $\mathrm{int}H \cap \mathrm{int}G = \emptyset$), akkor $H \cup G$ is mérhető és $m(H \cup G) = m(H) + m(G)$;

IV. $m(Q) = 1$, ahol Q az egységnégyzet.

Kiindulásképpen definiáljuk a koordinátatengelyekkel párhuzamos, egységnyi oldalú $[0{,}1] \times [0{,}1]$ négyzet területét (mértékét) 1-nek (ld. IV. tulajdonság). A mérték felépítéséből következni fog a többi tulajdonság is. Az I. nyilvánvaló módon (ld. 5.5. Állítást), a III.-t az 5.9. Állításban bizonyítjuk, a II.-t pedig itt nem bizonyítjuk.
Tekintsük a sík koordinátatengelyekkel párhuzamos, $\frac{1}{2^n}$ oldalhosszúságú négyzetekre való rácsfelbontását. Ezen kis négyzetek területét (mértékét) a fentiek alapján $\frac{1}{4^n}$-nak definiáljuk. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}^2$ *korlátos* halmaz. Jelölje $\overline{H}_n$ azon kis zárt négyzetek *unióját* a rácsból, melyek belemetszenek H-ba, $\underline{H}_n$ pedig azon kis zárt négyzetek *unióját*, melyek részei $\mathrm{int}H$-nak. (Az 5.1. és 5.2. ábrákon a szürkével jelölt négyzetek alkotják az n. rácsfelbontáshoz tartozó $\underline{H}_n$ ill. $\overline{H}_n$ halmazokat.) Ezek mértéke $m(\overline{H}_n)$ ill. $m(\underline{H}_n)$ legyen az unióban szereplő négyzetek száma szorozva $\frac{1}{4^n}$-el. Világos, hogy $\underline{H}_n \subset \overline{H}_n$, így

$$m(\underline{H}_n) \leq m(\overline{H}_n),\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$



5.1. ábra. A rácsfelbontáshoz tartozó $\underline{H}_n$ halmaz

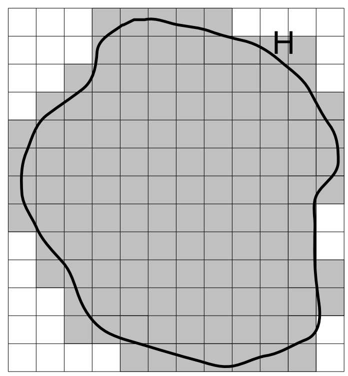
Világos, hogy ha n-et növeljük, a rácsfelbontás sűrűsödik: az $n+1$-dik lépésben az n-dik rácsfelbontáshoz tartozó kis négyzetek mindegyikét 4 egyenlő részre osztjuk. Így könnyen meggondolható, hogy

$$\underline{H}_n \subset \underline{H}_{n+1} \text{ és } \overline{H}_n \supset \overline{H}_{n+1},$$

másrészt

$$m(\underline{H}_n) \leq m(\underline{H}_{n+1}) \text{ és } m(\overline{H}_n) \geq m(\overline{H}_{n+1}).$$

Ebből következik, hogy $(m(\underline{H}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, $\left(m(\overline{H}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, és a H halmaz korlátossága miatt korlátos sorozatok.



5.2. ábra. A rácsfelbontáshoz tartozó $\overline{H}_n$ halmaz

5.1. Definíció. A fentiek alapján definiálhatjuk H *belső* ill. *külső mértékét* mint

$$\underline{m}(H) := \lim_{n\to\infty} m(\underline{H}_n), \quad \overline{m}(H) := \lim_{n\to\infty} m(\overline{H}_n).$$

Az (5.1) egyenlőtlenség alapján

$$\underline{m}(H) \leq \overline{m}(H).$$

5.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz. Azt mondjuk, hogy H *(Jordan-)mérhető*, ha

$$\underline{m}(H) = \overline{m}(H) =: m(H),$$

ahol $m(H)$ jelöli a H *Jordan-mértékét.*

5.3. Példa (Nem mérhető halmazra)**.** Legyen $H := Q \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjai. Világos, hogy H külső mértéke 1, belső mértéke 0.

Mérhető halmazok fontos osztályát alkotják a *nullmértékű* halmazok.

5.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy $H \subset \mathbb{R}^2$ *nullmértékű*, ha H mérhető és $m(H) = 0$.

5.5. Állítás. *$H \subset \mathbb{R}^2$ pontosan akkor nullmértékű, ha $m(\overline{H}_n) \to 0$, $n \to \infty$.*

Bizonyítás. Ha H nullmértékű, akkor a definícióból következik az állítás. Ha $m(\overline{H}_n) \to 0$, akkor $0 \leq m(\underline{H}_n) \leq$ $\leq m(\overline{H}_n)$ alapján $m(\underline{H}_n) \to 0$ is teljesül. ☐

5.6. Következmény. *A H halmaz pontosan akkor nullmértékű, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $G \supset H$ mérhető halmaz, melyre $m(G) < \varepsilon$.*

5.7. Tétel. *$H \subset \mathbb{R}^2$ pontosan akkor mérhető, ha ∂H nullmértékű.*

Bizonyítás.
$$\partial H \subset \overline{H}_n \setminus \underline{H}_n = (\overline{\partial H})_n \text{ minden } n \in \mathbb{N},$$
másrészt
$$m((\overline{\partial H})_n) = m(\overline{H}_n \setminus \underline{H}_n) = m(\overline{H}_n) - m(\underline{H}_n)$$
a definíció miatt.
Ha H mérhető, akkor
$$m((\overline{\partial H})_n) = m(\overline{H}_n) - m(\underline{H}_n) \to 0, n \to \infty,$$
tehát ∂H nullmértékű a fenti állítás miatt.
Ha $m(\partial H) = 0$, akkor szintén a fenti állítás miatt
$$m((\overline{\partial H})_n) = m(\overline{H}_n) - m(\underline{H}_n) \to 0, n \to \infty,$$
vagyis $\overline{m}(H) = \underline{m}(H)$, így H mérhető. □

5.8. Következmény. *Ha $H, G \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmazok, akkor $H \cup G$, $H \cap G$, $H \setminus G$ is mérhetők.*

Bizonyítás. Könnyen igazolható, hogy
$$\partial(H \cup G) \subset \partial H \cup \partial G,$$
$$\partial(H \cap G) \subset \partial H \cup \partial G,$$
$$\partial(H \setminus G) \subset \partial H \cup \partial G.$$
Így a fenti tételből következik az állítás. □

5.9. Állítás. *Ha H és G mérhetőek és egymásba nem nyúlók, akkor*
$$m(H \cup G) = m(H) + m(G).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy
$$m(\overline{(H \cup G)}_n) = m(\overline{H}_n) + m(\overline{G}_n) - m(\overline{(\partial H \cap \partial G)}_n),$$
hiszen a $\partial H \cap \partial G$-be metsző $\frac{1}{2^n}$ oldalú négyzeteket előtte kétszer számoltuk. Másrészt
$$m(\overline{(\partial H \cap \partial G)}_n) \leq m(\overline{\partial H}_n) \to 0,\ n \to \infty,$$
amiből az állítás a definíció szerint következik. □

5.10. Állítás. *Ha H a koordinátatengelyekel párhuzamos oldalú téglalap, akkor mérhető és $m(H) = a \cdot b$, ahol a és b az oldalhosszúságai.*

Bizonyítás. Diadikus racionális koordinátájú csúcspontokkal rendelkező téglalapra a definícióból következik. Más esetben közelítsük a csúcspontok koordinátáit diadikus racionálisokkal – az így kapott téglalapok külső ill. belső mértéke tartani fog az eredeti téglalap külső ill. belső mértékéhez. □

5.11. Állítás. *Ha $f \in C[a, b]$, akkor*
$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$$
nullmértékű halmaz.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Legyen
$$\Phi = \{I_1 \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$$
olyan felosztás, melynek finomsága kisebb, mint δ, vagyis $|I_i| < \delta$ minden i esetén. Definiálja a $G \supset \text{graph}(f)$ halmazt
$$G := \bigcup_{i=1}^{n} \left(I_i \times [\min_{I_i} f, \max_{I_i} f] \right).$$

Ekkor az 5.10. Állítás alapján

$$m(G) = \sum_{i=1}^{n} |I_i| \cdot \left(\max_{I_i} f - \min_{I_i} f \right) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \varepsilon.$$

Az állítás az 5.6. Következményből adódik. □

5.12. Következmény. *A kör(lap), ellipszis stb. mérhető halmazok a síkon.*

Bizonyítás. Következik az 5.7. Tételből és a fenti állításból. □

A továbbiakban tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ esetén bevezethetjük az m_p $\mathbb{R}^p$-beli (Jordan-)mértéket ill. mérhetőséget az $p = 2$ esettel analóg módon. A fentiekhez hasonlóan definiálhatjuk az $\mathbb{R}^p$ tér koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú, $\frac{1}{2^n}$ élhosszúságú p dimenziós „kockákra" való *rácsfelbontását*, vagyis egy kocka

$$\left[\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{i_2}{2^n}, \frac{i_2+1}{2^n}\right] \times \cdots \times \left[\frac{i_p}{2^n}, \frac{i_p+1}{2^n}\right], \quad i_1, \dots, i_p \in \mathbb{Z}$$

alakú. Egy ilyen kis kocka mértéke legyen $\frac{1}{2^{np}}$. Adott $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz esetén jelölje most $\overline{H}_n$ azon kis zárt kockák *unióját* a rácsból, melyek belemetszenek H-ba, $\underline{H}_n$ pedig azon kis zárt kockák *unióját*, melyek részei int$H$-nak. Ezek mértéke $m_p(\overline{H}_n)$ ill. $m_p(\underline{H}_n)$ legyen az unióban szereplő kockák száma szorozva $\frac{1}{2^{np}}$-vel. A fenitekhez hasonlóan meggondolható, hogy

$$\underline{H}_n \subset \underline{H}_{n+1} \text{ és } \overline{H}_n \supset \overline{H}_{n+1},$$

másrészt

$$m_p(\underline{H}_n) \leq m_p(\underline{H}_{n+1}) \text{ és } m_p(\overline{H}_n) \geq m_p(\overline{H}_{n+1}).$$

Ebből következik, hogy $(m_p(\underline{H}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, $\left(m_p(\overline{H}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, korlátos sorozatok. A 2 dimenzióval analóg módon definiálhatjuk az $\underline{m}_p(H)$ és $\overline{m}_p(H)$ n dimenziós *belső* ill. *külső* mértéket mint $\lim_{n\to\infty} m_p(\underline{H}_n)$ ill. $\lim_{n\to\infty} m_p(\overline{H}_n)$.

5.13. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmazt *(Jordan-)mérhető halmaz*nak mondunk, ha külső és belső mértéke megegyezik, és

$$m_p(H) := \overline{m}_p(H) = \underline{m}_p(H)$$

a H *(Jordan-)mértéke.*

Könnyen látható, hogy az 5.5–5.9. Állítások az m_p p dimenziós Jordan-mértékre is érvényben maradnak. Az 5.10. Állítást úgy kell módosítani, hogy ha H egy p dimenziós, (koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú) *tégla*, vagyis

$$H := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p],$$

akkor H mérhető és

$$m_p(H) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_p - a_p).$$

Hatodik fejezet

Riemann-integrál $\mathbb{R}^p$-n

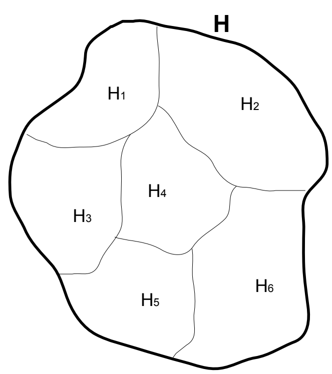
6.1. Az p dimenziós integrál alaptulajdonságai

Az egydimenziós Riemann-integrálhoz hasonlóan, az p dimenziós Jordan-mérték segítségével definiálni fogjuk $f :$ $: H \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ korlátos függvények Riemann-integrálját, ahol H mérhető halmaz.

6.1. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető halmaz *felosztása* egy $\Phi := \{H_1, \dots, H_n\}$ egymásba nem nyúló, nemüres mérhető halmazokból álló rendszer, ahol

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i.$$

A H halmaz felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}(H)$ (ld. 6.1. ábra).

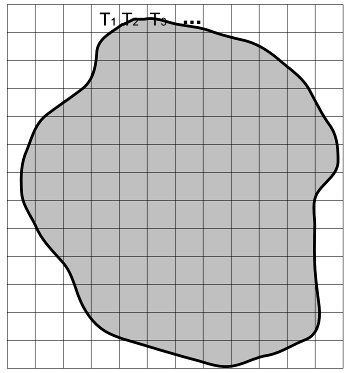


6.1. ábra. A H halmaz egy felosztása

6.2. Példa. Legyenek $T_1, \dots, T_n$ az $\mathbb{R}^p$ tér egy rácsfelbontásának azon téglái, melyekre $T_i \cap H \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$. Legyen $H_i := H \cap T_i$, $i = 1, \dots, n$. Ekkor $\{H_1, \dots H_n\}$ a H halmaz egy *rácsszerű felosztását* adja (ld. 6.2. ábra).

6.3. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\Phi := \{H_1, \dots H_n\}$ a H egy felosztása. Ekkor az f Φ felosztáshoz tartozó *alsó* ill. *felső közelítőösszege*

$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{H_i} f \right) \cdot m_p(H_i)$$



6.2. ábra. A H halmaz egy rácsszerű felosztása

ill.

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{H_i} f \right) \cdot m_p(H_i).$$

Az előző félévben látottakhoz hasonlóan belátható, hogy tetszőleges Φ, Ψ felosztásokra

$$s_f(\Phi) \leq S_f(\Psi).$$

6.4. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Az f *Darboux-féle alsó integrálja*

$$\int_{*H} f := \sup \{ s_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}(H) \},$$

Darboux-féle felső integrálja

$$\int_H^* f := \inf \{ S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}(H) \}.$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy

$$\int_{*H} f \leq \int_H^* f.$$

6.5. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy a Darboux-féle integrálok definíciójában elég rácsszerű felosztásokat venni.

Ezek alapján már definiálhatjuk a Riemann-integrálhatóságot.

6.6. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Azt mondjuk, hogy f *Riemann-integrálható* H-n, ha

$$\int_{*H} f = \int_H^* f.$$

A közös értéket jelölje

$$\int_H f.$$

A H halmazon Riemann-integrálható függvények halmazát jelölje $R(H)$.

A továbbiakban kimondunk egy, az egydimenziós Riemann-integrálnál tanultakhoz analóg integrálhatósági kritériumot. A bizonyítás egy az egyben átvihető p dimenziós integrálra. A tétel kimondásához szükségünk lesz egy definícióra.

6.7. Definíció. Az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény $\Phi = \{H_1, \dots H_n\} \in \mathcal{F}(H)$ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összege*

$$\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in H_i\} \cdot m_p(H_i).$$

6.8. Tétel (Leghasznosabb kritérium)**.** *Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Az f pontosan akkor Riemann-integrálható, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\Phi \in \mathcal{F}(H)$ felosztás, hogy*

$$\Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Az előző félév megfelelő tételének bizonyításával megegyező módon történik. □

Összefoglaljuk a Riemann-integrál legfontosabb tulajdonságait.

6.9. Tétel. *Legyenek $f, g \in R(H)$, $c \in \mathbb{R}$.*

1. *Ekkor $f + g \in R(H)$ és $c \cdot f \in R(H)$, valamint*

$$\int_H (f+g) = \int_H f + \int_H g,$$

$$\int_H (c \cdot f) = c \cdot \int_H f.$$

2. *Ha $f \le g$, akkor*

$$\int_H f \le \int_H g.$$

Bizonyítás. Az egydimenziós esettel analóg módon. □

6.10. Tétel. *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^n$ egymásba nem nyúló mérhető halmazok, $f|_A$ integrálható A-n és $f|_B$ integrálható B-n. Ekkor f integrálható $A \cup B$-n is és*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Bizonyítás. Legyenek $\Phi = \{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{F}(A)$, $\Psi = \{B_1, \dots, B_m\} \in \mathcal{F}(B)$ tetszőleges felosztások. Ekkor

$$\Gamma := \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\} \in \mathcal{F}(A \cup B),$$

továbbá

$$s_f(\Gamma) = s_f(\Phi) + s_f(\Psi) \le \int\limits_{*\atop A\cup B} f \le \int\limits_{A\cup B}^{*} f \le S_f(\Phi) + S_f(\Psi) = S_f(\Gamma).$$

Ebből a bal oldal szuprémumát, a jobb oldal infimumát véve minden $\Phi \in \mathcal{F}(A)$ és $\Psi \in \mathcal{F}(B)$ felosztásra kapjuk, hogy

$$\int_A f + \int_B f = \int\limits_{*\atop A} f + \int\limits_{*\atop B} f \le \int\limits_{*\atop A\cup B} f \le \int\limits_{A\cup B}^{*} f \le \int\limits_{A}^{*} f + \int\limits_{B}^{*} f = \int_A f + \int_B f,$$

amiből az állítás következik. □

Ezen tétel fontos következménye, hogy minden integrál tekinthető téglán vett integrálnak.

6.11. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{R}^p$ tégla, $H \subset T$ mérhető halmaz, $f \in R(H)$. Ekkor az*

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in H; \\ 0, & x \in T \setminus H \end{cases}$$

módon definiált $\tilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény integrálható T-n és

$$\int_T \tilde{f} = \int_H f.$$

Bizonyítás. Mivel H és $T \setminus H$ mérhető, egymásba nem nyúló halmazok, ezért alkalmazható az előző tétel, amiből

$$\int_T \tilde{f} = \int_H \tilde{f} + \int_{T\setminus H} \tilde{f} = \int_H f.$$

□

Szintén a 6.10. Tétel következménye az alábbi állítás.

6.12. Következmény. *Legyenek $B \subset A$ mérhető halmazok, f integrálható A-n. Ekkor $f|_B$ (f megszorítása B-re) integrálható B-n.*

Az egyváltozós esetben láttuk, hogy minden $f \in C[a,b]$ folytonos függvény Riemann-integrálható, és a bizonyításban f egyenletes folytonosságát használtuk fel. Ennek megfelelően p dimenzióban fel kell tenni a H értelmezési tartomány mérhetősége mellett a kompaktságát.

6.13. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető sorozatkompakt (vagyis korlátos és zárt) halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható H-n.*

Bizonyítás. A 6.8. Tételt fogjuk felhasználni. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. Mivel a feltételek miatt a 4.16. Tétel szerint f egyenletesen is folytonos H-n, azért $\frac{\varepsilon}{m_p(H)} > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{m_p(H)}, \text{ ha } d_2(x,y) < \delta,$$

ahol d_2 az p dimenziós euklideszi távolságot jelöli. Válasszunk H-nak egy olyan $\Phi = \{H_1, \dots, H_n\}$ felosztását, amelyben $\operatorname{diam} H_i < \delta$, $i = 1, \dots, n$ (ilyen létezik, pl. vehetünk $\frac{1}{2^k}$ oldalú rácsszerű felosztást, ahol $\frac{\sqrt{p}}{2^k} < \delta$). Ekkor a feltétel szerint

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in H_i\} \cdot m_p(H_i) \le \frac{\varepsilon}{m_p(H)} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_p(H_i) = \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

A következő fontos tételek arról szólnak, hogy mi köze egy korlátos halmaz mértékének a integrálhoz.

6.14. Tétel. *Legyen $H \subset T \subset \mathbb{R}^p$, ahol H tetszőleges (korlátos) halmaz, T tégla. Jelölje*

$$\chi_H(x) := \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \in T \setminus H, \end{cases} \tag{6.1}$$

a H halmaz karakterisztikus függvényét *T-n. Ekkor*

$$\underline{m}_p(H) = \int_{*T} \chi_H, \quad \overline{m}_p(H) = \int^{*}_{T} \chi_H.$$

Bizonyítás. A felső integrálra-külső mértékre vonatkozó állítást bizonyítjuk, a másik hasonlóan megy. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. A külső mérték definíciója szerint található olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy

$$m_p(\overline{H}_k) \le \overline{m}_p(H) + \varepsilon.$$

Világos, hogy ha az $\mathbb{R}^p$ tér $\frac{1}{2^k}$ oldalú kockákra való felbontásának elemeit elmetsszük a T téglával, a kapott $\Phi = \{F_1, \dots, F_n\}$ rendszer a T egy (rácsszerű) felosztását adja, így

$$\int^{*}_{T} \chi_H \le \sum_{i=1}^{n} (\sup_{F_i} \chi_H) \cdot m_p(F_i) = \sum_{i: F_i \cap H \ne \emptyset} 1 \cdot m_p(F_i) + \sum_{i: F_i \cap H = \emptyset} 0 \cdot m_p(F_i) \tag{6.2}$$

$$= \sum_{i: F_i \cap H \ne \emptyset} m_p(F_i) \le m_p(\overline{H}_k) \le \overline{m}_p(H) + \varepsilon. \tag{6.3}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért

$$\int_T^* \chi_H \leq \overline{m}_p(H).$$

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához tekintsük az $\mathbb{R}^p$ egy tetszőleges, $\frac{1}{2^k}$ oldalú rácsfelbontásának elemeit! Jelölje a T téglának az ebből származó rácsszerű felosztását $\Psi = \{G_1, \ldots, G_m\}$. Mivel a G_i halmazok mind mérhetők, ezért

$$\overline{m}_p(H) \leq \overline{m}_p(\bigcup_{i: G_i \cap H \neq \emptyset} G_i) = \sum_{i: G_i \cap H \neq \emptyset} m_p(G_i) = \sum_{i: G_i \cap H \neq \emptyset} 1 \cdot m_p(G_i) + \sum_{i: G_i \cap H = \emptyset} 0 \cdot m_p(G_i) = S_{\chi_H}(\Psi),$$

amiből

$$\overline{m}_p(H) \leq \int_T^* \chi_H.$$

□

6.15. Következmény. *Egy $H \subset T$ (korlátos) halmaz pontosan akkor mérhető, ha a (6.1) szerint definiált χ_H Riemann-integrálható T-n. Ekkor*

$$m_p(H) = \int_T \chi_H.$$

6.16. Tétel (Az integrál geometriai jelentése)**.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Egy $f : H \to \mathbb{R}^+$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha*

$$\text{subgraph}(f) := \{(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) : (x_1, \ldots, x_p) \in H,\ 0 \leq x_{p+1} \leq f(x_1, \ldots, x_p)\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

Jordan-mérhető. Ekkor

$$\int_H f = m_{p+1}\left(\text{subgraph}(f)\right).$$

Bizonyítás. Következik a mérhetőség definíciójából és a 6.5. Megjegyzésből. □

6.2. Fubini tétele

A következőkben az integrálszámítás egy fontos alaptételét, az integrálás sorrendjének felcserélhetőségét bizonyítjuk 2 dimenzióban. A tétel téglán (téglalapon) vett integrálról szól – de a 6.11. Tétel alapján tudjuk, hogy ez nem jelent megszorítást.

6.17. Tétel (Fubini tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ és $[c, d]$ korlátos és zárt intervallumok, jelölje $[a, b] \times [c, d]$ a megfelelő téglalapot.*
(A) változat. Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek az alábbi feltételek:

$$(A) \begin{cases} f \in R([a, b] \times [c, d]), \text{ és} \\ \forall x \in [a, b] \text{ esetén az } y \mapsto f(x, y),\ y \in [c, d] \text{ ún. „szekciófüggvény" Riemann-integrálható } [c, d]\text{-n.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\varphi(x) := \int_c^d f(x, y)dy, \quad x \in [a, b]$$

jelöléssel φ Riemann-integrálható $[a, b]$-n, emellett

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

(B) változat. Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek az alábbi feltételek:

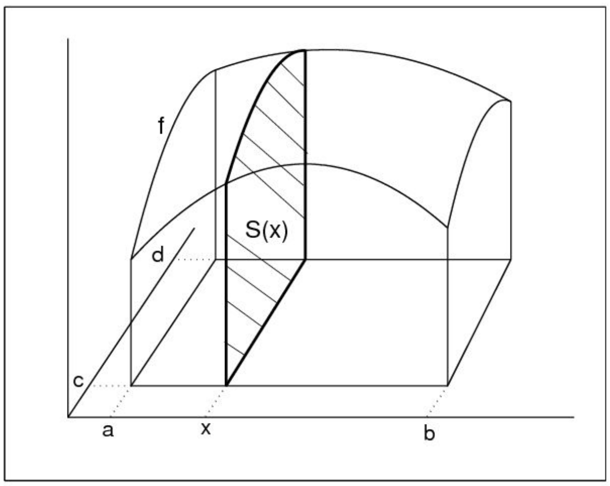
$$(B)\begin{cases} f \in R([a,b]\times[c,d]),\ \textit{és} \\ \forall y\in[c,d]\ \textit{esetén az}\ x\mapsto f(x,y),\ x\in[a,b]\ \textit{ún. „szekciófüggvény" Riemann-integrálható}\ [a,b]\textit{-n.}\end{cases}$$

Ekkor

$$\psi(y) := \int_a^b f(x,y)dx, \quad y\in[c,d]$$

jelöléssel ψ Riemann-integrálható $[c,d]$-n, emellett

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_c^d \psi = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$



6.3. ábra. Egy $x\in[a,b]$ ponthoz tartozó szekciófüggvény

6.18. Következmény. *Ha f-re teljesülnek az (A) és (B) változat feltételei, akkor*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy,$$

vagyis az x és y szerinti integrálás sorrendje felcserélhető, és az így kapott integrálok értékei megegyeznek a függvény kétdimenziós integráljával.

6.19. *Megjegyzés.* Az (A) ill. (B) változat feltételei mindig teljesülnek, ha f folytonos $[a,b]\times[c,d]$-n, ld. 6.13. Tétel.

Fubini-tétel (A) változat bizonyítása. Legyen $\Phi := \{J_1,\dots J_n\}\in\mathcal{F}([a,b])$ az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges felosztása, $\Psi := \{K_1,\dots K_m\}\in\mathcal{F}([c,d])$ a $[c,d]$ intervallum egy tetszőleges felosztása. Ekkor

$$\Phi\times\Psi := \{J_i\times K_l : i=1,\dots,n, l=1,\dots,m\}\in\mathcal{F}([a,b]\times[c,d])$$

az $[a,b]\times[c,d]$ tégla egy (mondhatjuk rácsszerű) felosztását adja.
Könnyen látható, hogy az (A) pontban definiált φ függvényre, $x\in J_i$ esetén

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy = \sum_{l=1}^m \int_{K_l} f(x,y)dy \ge \sum_{l=1}^m \left(\inf_{y\in K_l} f(x,y)\right)\cdot|K_l| \ge \sum_{l=1}^m \left(\inf_{(x,y)\in J_i\times K_l} f(x,y)\right)\cdot|K_l|,$$

tehát

$$\inf_{J_i}\varphi \ge \sum_{l=1}^m \left(\inf_{J_i\times K_l} f\right)\cdot|K_l|.$$

Ebből
$$s_\varphi(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{J_i} \varphi \right) \cdot |J_i| \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left(\inf_{J_i \times K_l} f \right) \cdot |K_l| \cdot |J_i| = s_f(\Phi \times \Psi).$$
Hasonlóan belátható, hogy
$$S_\varphi(\Phi) \leq S_f(\Phi \times \Psi),$$
tehát
$$s_f(\Phi \times \Psi) \leq s_\varphi(\Phi) \leq S_\varphi(\Phi) \leq S_f(\Phi \times \Psi).$$
A kapott egyenlőtlenségeket felhasználva, továbbá f Riemann-integrálhatósága alapján könnyen látható, hogy
$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \sup_{\Phi \in \mathcal{F}([a,b]), \Psi \in \mathcal{F}([c,d])} s_f(\Phi \times \Psi) \leq \sup_{\Phi \in \mathcal{F}([a,b])} s_\varphi(\Phi) = \int_{*a}^{b} \varphi,$$
másrészt
$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \inf_{\Phi \in \mathcal{F}([a,b]), \Psi \in \mathcal{F}([c,d])} S_f(\Phi \times \Psi) \geq \inf_{\Phi \in \mathcal{F}([a,b])} S_\varphi(\Phi) = \int_{a}^{*b} \varphi.$$
Mindebből az állítás következik.
A (B) változat analóg módon bizonyítható. □

6.20. *Megjegyzés.* Fubini tétele általánosítható tetszőleges $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre. Pl. $p = 3$ esetén egy $f \in R([a,b] \times [c,d] \times [s,q])$ függvény integrálja megfelelő feltételek mellett előáll 3 darab egydimenziós integrál iterációjaként.

6.21. Példa (Olyan függvényre, melyre nem teljesül a Fubini-tétel)**.** Legyen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1; \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$
Ekkor
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1 \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} + \left[\frac{1}{x}\right]_{x=y}^{x=1} \right) dy = 1.$$
Másrészt
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(-\frac{1}{x^2}\right) dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2}dy \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x} + \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=x}^{y=1} \right) dx = -1.$$

6.22. Példa (Olyan függvényre, melyre nem teljesül a Fubini-tétel)**.** Ebben a példában egy olyan függvényt mutatunk, mely integrálható a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten, viszont a Fubini-tétel másik feltétele nem teljesül rá, mivel az $\frac{1}{2} \mapsto f(\frac{1}{2}, y)$ nem integrálható $[0,1]$-en. Jelölje D a Dirichlet-függvényt és legyen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2}, \\ D(y), & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
A kívánt feltételek nyilván teljesülnek.

Fubini tételét alkalmazhatjuk egydimenziós integrálok kiszámítására is.

6.23. Példa. Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}dx$$

integrál értékét!

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{y \ln x} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln x} \mathrm{e}^{y \ln x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx.$$

Fubini tétele alapján

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{y+1} x^{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{1}{y+1} dy = \ln 2.$$

Tehát

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \ln 2.$$

A Fubini-tétel következménye az alábbi két állítás.

6.24. Definíció. Legyenek $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$ folytonos függvények, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ minden $x \in [a,b]$. (Kétdimenziós) *normáltartomány* alatt a következő alakú korlátos és zárt (sorozatkompakt) halmazokat értjük:

$$H = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \tag{6.4}$$

vagy

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [a,b] : \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}. \tag{6.5}$$

6.25. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ (6.4) vagy (6.5) alakú normáltartomány, $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor a (6.4) esetben*

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx,$$

a (6.5) esetben

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) dx \right) dy.$$

Bizonyítás. Tekintsük az első esetet! Ekkor $H \subset [a,b] \times [c,d]$, ahol pl. $c = \min_{[a,b]} \varphi_1$, $d = \max_{[a,b]} \varphi_2$. Definiáljuk

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in H; \\ 0, & (x,y) \in ([a,b] \times [c,d]) \setminus H. \end{cases}$$

Az állítás a 6.11. és a 6.17. Tételekből következik. A másik H esete hasonlóan meggondolható. □

6.26. Állítás (Cavalieri-elv). *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty)$ 3 dimenziós testek, és tegyük fel, hogy minden $z \in$ $\in [0,+\infty)$ esetén a z magasságban vett, xy síkkal párhuzamos síkmetszetük területe megegyezik, vagyis minden $z \in [0,+\infty)$ esetén*

$$\varphi_A(z) := m_2\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\right\}\right) = m_2\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in B\right\}\right) = \varphi_B(z).$$

Ekkor $m_3(A) = m_3(B)$, vagyis a két test térfogata is megegyezik.

Bizonyítás. Legyen $T := [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [0,c]$ olyan tégla, melybe A és B is belefoglalható. Definiáljuk A és B karakterisztikus függvényét T-n:

$$\chi_A(x,y,z) := \begin{cases} 1, & (x,y,z) \in A; \\ 0, & (x,y,z) \in T \setminus A. \end{cases}$$

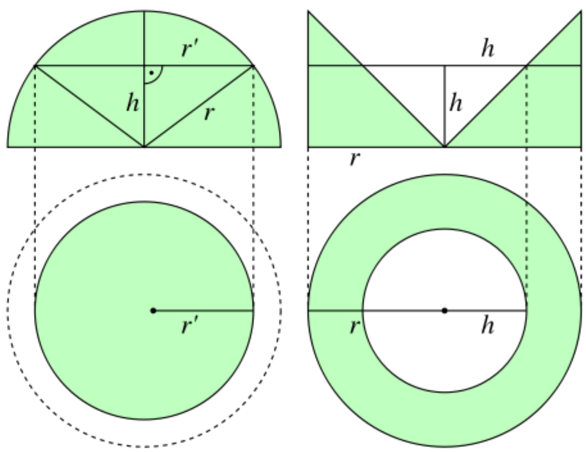
$$\chi_B(x,y,z) := \begin{cases} 1, & (x,y,z) \in B; \\ 0, & (x,y,z) \in T \setminus B. \end{cases}$$

A 6.15. Következmény és a 6.17. Fubini-tétel alapján

$$m_3(A) = \int_T \chi_A = \int_0^c \left(\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \chi_A(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_0^c \varphi_A(z)dz$$
$$= \int_0^c \varphi_B(z)dz = \int_0^c \left(\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \chi_B(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_T \chi_B = m_3(B).$$

□

6.27. Példa (A félgömb térfogata)**.** Az r sugarú félgömb térfogata megegyezik annak a testnek a térfogatával, melyek úgy kapunk, hogy egy r alapsugarú, r magasságú hengerből kiveszünk egy r alapsugarú, r magasságú kúpot. Az alábbi ábrán látható, hogy a h magasságú síkmetszet a gömb esetén egy $\sqrt{r^2 - h^2}$ sugarú körlap, a másik test esetén egy körgyűrű, amit úgy kapunk, hogy egy r sugarú körlapból kiveszünk egy h sugarú körlapot. Tehát a síkmetszet területe mindkét esetben $(r^2 - h^2) \cdot \pi$.



Tárgymutató