ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
1. FELADATSOR

2010. szeptember 17.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

1. Differenciálható-e a következő függvény?

$$f(x) := \begin{cases} \arctan x & \text{ha } |x| \le 1 \\ \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

2. Számítsuk ki az alábbi összeget!

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{e}^{kx}$$

3. Tegyük fel, hogy f differenciálható a-ban! Mivel egyenlő a következő határérték?

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(a+\frac{1}{n^2}\right)+f\left(a+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{n}{n^2}\right)-nf(a)\right)$$

4. Legyen $a > 0$. Számítsuk ki!

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\right)$$

5. Legyenek f és g az $[a,b]$ intervallumon folytonos, (a,b)-ben differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy
$$f(a) = f(b) = 0.$$
Mutassuk meg, hogy ekkor létezik $x \in (a,b)$, melyre
$$g'(x)\cdot f(x) + f'(x) = 0.$$

6. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nem-0 valós számok, és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ páronként különböző valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az
$$a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \cdots + a_nx^{\alpha_n} = 0$$
egyenletnek legfeljebb $n-1$ gyöke van $(0,+\infty)$-en!

7. Legyen f folytonos [0,2]-n, 2-szer differenciálható (0,2)-n. Mutassuk meg, hogy ha
$$f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ és } f(2) = 2,$$
akkor létezik $x_0 \in (0{,}2)$, hogy
$$f''(x_0) = 0.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
2. FELADATSOR

2010. szeptember 24.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

8. Legyen f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, ahol $a > 0$, és differenciálható (a,b)-n. Bizonyítsuk be, hogy létezik $x_1 \in (a,b)$, melyre
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

9. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-szer differenciálható. Legyenek $x, x_0 \in [a,b]$. Bizonyítsuk be a következő integrál-maradéktagos Taylor-formulát!
$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \end{aligned}$$

10. Tegyük fel, hogy $f, g \in C^2([0,1])$, $g'(x) \neq 0, x \in (0,1)$ és $f'(0)g''(0) \neq f''(0)g'(0)$. Jelölje $\theta(x), x \in (0,1)$ a Cauchy-középérték-tétel
$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}$$
alapján létező számot. Határozzuk meg
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\theta(x)}{x}$$
értékét!

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $f''(x)$ létezik, akkor
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

12. Tegyük fel, hogy f'' létezik és korlátos $(0, +\infty)$-n. Bizonyítsuk be, hogy ha
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$
akkor
$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$$

13. Legyen $m \in \mathbb{N}$ és definiálja a P polinomot
$$P(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (-1)^k (x-k)^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Mutassuk meg, hogy $P(x) \equiv 0$.

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
3. FELADATSOR

2010. október 1.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

14. Tegyük fel, hogy
$$|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \le |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Mutassuk meg, hogy ekkor
$$|a_1 + 2a_2 + \cdots na_n| \le 1.$$

15. Legyenek $m, k \in \mathbb{N}$ rögzítve. Mennyi az alábbi határérték?
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \cdots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn \right)$$

16. Legyen f differenciálható a-ban, továbbá (x_n) és (z_n) olyan a-hoz tartó sorozatok, melyekre $x_n \ne a$, $z_n \ne a$ és $x_n \ne z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Adjunk példát olyan f függvényre, melyre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$$
a) egyenlő $f'(a)$-val;
b) nem létezik, vagy létezik, de nem egyenlő $f'(a)$-val.

17. Legyen f differenciálható a-ban, továbbá (x_n) és (z_n) olyan a-hoz tartó sorozatok, melyekre $x_n < a < z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

18. Létezik-e olyan $f : (1,2) \to \mathbb{R}$ függvény, melynek bal oldali deriváltfüggvénye $f'_-(x) = x$, jobb oldali deriváltfüggvénye pedig $f'_+(x) = 2x$, $x \in (1,2)$?

19. Tegyük fel, hogy a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(b - a \ge 4)$ függvény differenciálható (a,b)-n. Igazoljuk, hogy van olyan $x_0 \in (a,b)$, melyre
$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
4. FELADATSOR

2010. október 22.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

20. Legyen f differenciálható $\mathbb{R}$-en. Mely pontokban differenciálható $|f|$?

21. Legyen
$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}; \\ \sin x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Mely pontokban differenciálható f és $|f|$?

22. Igazoljuk az alábbiakat!
a)
$$(\mathrm{e}^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x + n\frac{\pi}{4}), \quad x \in \mathbb{R}, n \geq 1,$$
b)
$$(x^n \ln x)^{(n)} = n! \left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right), \quad x > 0, n \geq 1.$$

23. Tegyük fel, hogy $a_0, a_1, \ldots, a_n$ olyan valós számok, melyekre
$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0.$$
Igazoljuk, hogy a
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
polinomnak van legalább egy gyöke (0,1)-ben!

24. Igazoljuk, hogy a
$$3^x + 4^x = 5^x$$
egyenletnek pontosan egy gyöke van!

25. Tegyük fel az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről az alábbiakat!

    (i) f végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}$-en;

    (ii) létezik $L > 0$, melyre $|f^{(n)}(x)| \leq L$ minden $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ esetén;

    (iii) $f(\frac{1}{n}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

    Igazoljuk, hogy ekkor $f \equiv 0$ $\mathbb{R}$-en!

26. Legyen f háromszor differenciálható $(0, +\infty)$-n. Igaz-e, hogy ha
$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) \right)$$
létezik, akkor létezik $\lim_{x \to \infty} f$?

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
5. FELADATSOR

2010. november 5.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

27. Határozzuk meg a $\sum(a_n x^n)$ hatványsor konvergenciasugarát az alábbi esetekben!
    (a) valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ és $L > 0$ számokra $\lim_{n\to\infty} |a_n n^\alpha| = L$;
    (b) valamely $\alpha, L > 0$ számokra $\lim_{n\to\infty} |a_n \alpha^n| = L$;
    (c) $\lim_{n\to\infty} |a_n n!\,| = L$, $(L > 0)$.

28. Legyen $(s_n)_{n\geq 0}$ a $\sum_{n\geq 0} a_n$ végtelen sor részletösszegeiből álló sorozat, továbbá legyen
$$t_n := \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Igazoljuk, hogy ha (t_n) korlátos sorozat, akkor a
$$\sum(a_n x^n), \quad \sum(s_n x^n), \quad \sum((n+1)t_n x^n)$$
hatványsorok konvergensek $|x| < 1$ esetén!

29. Legyen a $\sum(a_n x^n)$ hatványsor konvergenciasugara 1. Jelölje
$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
az összegfüggvényt. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to 1-0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ és $\lim(n a_n) = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L.$$

30. Fejtsük Taylor-sorba 0 körül az alábbi függvényeket!
    (a)
$$f(x) = \ln(1 + x + x^2), \quad x \in (-1,1);$$
    (b)
$$f(x) = \frac{1}{1 - 5x + 6x^2}, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

31. Fejtsük Taylor-sorba 1 körül az alábbi függvényeket!
    (a)
$$f(x) = (x+1)\cdot \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R};$$
    (b)
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
6. FELADATSOR

2010. november 19.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

32. Legyen $f \in C[0,1]$. Igazoljuk, hogy
$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

33. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét!
$$\int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

34. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, $T > 0$ szerint periodikus függvény. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a < b$ esetén
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(nx)\,dx = \frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

35. Legyen $f \in C[a,b]$. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx; \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx$$

36. Legyen $f \in C[0,\infty)$ és
$$a_n := \int_0^1 f(n+x)\,dx, \quad n = 0,1,\ldots$$
Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Mennyi $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx$?

37. Legyen $f \in C[0,1]$ pozitív függvény. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét!
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$$

38. Legyen f folytonos és páros függvény $[-a,a]$-n $(a > 0)$. Mutassuk meg, hogy ekkor
$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
7. FELADATSOR

2010. november 26.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

39. Mennyi az alábbi határérték?

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin x}\, dx$$

40. Legyen $f \in C[0,1]$. Mennyi a következő határérték?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx$$

41. Legyen f folytonosan differenciálható $[0,1]$-en, $f'(0) \neq 0$. Adott $x \in (0,1]$ számhoz válasszunk $\theta(x)$-et, melyre

$$\int_0^x f(t)\, dt = f(\theta(x)) \cdot x.$$

Mennyi az alábbi határérték?

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\theta(x)}{x}$$

42. Mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x\to\infty} \left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

43. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét!

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$$

44. Számítsuk ki a következő improprius integrál értékét!

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM
8. FELADATSOR

2010. december 10.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

45. Igazoljuk, hogy ha f folytonosan differenciálható [0,1]-en, akkor
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

46. Mutassuk meg, hogy ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor véges sok pontban megváltoztatva az értékét Riemann-integrálható marad, és az integrál értéke sem változik!

47. Legyen $f \in C[a,b]$, és tegyük fel, hogy minden $a \le \alpha < \beta \le b$ esetén
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0.$$
Igazoljuk, hogy $f \equiv 0$ $[a,b]$-n!

48. Legyen $f \in C[a,b]$, és tegyük fel, hogy minden $g \in C[a,b]$ függvény esetén
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$
Igazoljuk, hogy $f \equiv 0$ $[a,b]$-n!

49. Legyen f folytonos $\mathbb{R}$-en. Mutassuk meg, hogy
    a) ha $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f páratlan függvény;
    b) ha $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f páros függvény;
    c) adott $T > 0$-ra, ha $\int_x^{x+T} f(t)\,dt = 2\int_0^T f(t)\,dt$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f periodikus függvény $T > 0$ periódussal!

50. Számítsuk ki az alábbi határértéket!
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1}\,dx\right)$$

51. Számítsuk ki az alábbi határértéket!
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5+1}\,dx\right)$$