# *Analízis IV. 1. előadás*

*Sikolya Eszter*

*2011. február 17.*

## *Ajánlott irodalom*

1. *Thomas-féle kalkulus 3.*, Typotex, 2007.[1]
2. Fekete Z. - Zalay M.: *Többváltozós függvények analízise*, Műszaki Könyvkiadó, 2006.
3. Laczkovich M. - T. Sós Vera: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.

[1] Jól használhatók az 1-2. kötetek is.

## *Ismétlés*

Többváltozós függvények, ezek folytonossága, határértéke
Vektorterek között ható lineáris leképezések, $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés mátrixa

## *1 Differenciálegyenletek*

### *1.1 Radioaktív anyag bomlása (vagy szaporodás)*

$$y'(t) = k \cdot y(t)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \Rightarrow \ln|y(t)| = k \cdot t + \ln c, \quad c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**1.1. Állítás.** *Minden olyan differenciálható $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez, melyre $y' = k \cdot y$, létezik $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Általánosítás

$$y'(x) = f(x)y(x), \quad f \in C(I)$$

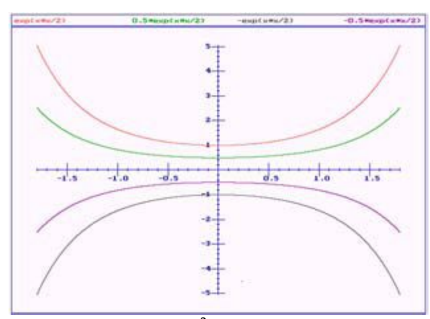
*Megoldások.*

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad F' = f$$

**Példa.**

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

*Megoldások.*



1. ábra: $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$

Kezdetiérték-feladat

$$y'(x) = f(x) \cdot y(x), \quad x \in I$$
$$y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

*Megoldás.* Olyan $F' = f$ primitív függvényt választunk, melyre $F(x_0) = 0$, $c := y_0$,
$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$

**Példa.**

$$\begin{cases} y'(x) = x \cdot y(x), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

*Megoldás.*

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

### 1.2 Inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x), \quad f, g \in C(I)$$

*Megoldások.*

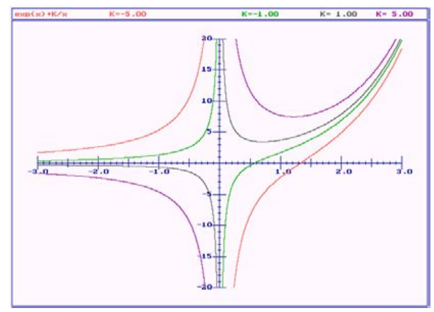
$$y(x) = c \cdot e^{F(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{F(x)-F(t)} g(t)\, dt, \quad c \in \mathbb{R},$$

$F' = f$, $x_0 \in I$ tetszőleges.

**Példa.**

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot e^x$$

*Megoldások.*




2. ábra: $y(x) = e^x + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$

Kezdetiérték-feladat

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x)y(x) + g(x), \quad x \in I \\ y(x_0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Megoldás.*

$$y(x) = y_0 \cdot e^{F(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{F(x)-F(t)} g(t)\, dt,$$

$F' = f$, $F(x_0) = 0$

**Példa.**

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot e^x, \\ y(1) = e. \end{cases}$$

*Megoldás.*

$$y(x) = e^x,\ \mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$$

### 1.3 Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)), \quad f \in C(I), g \in C(J)$$

Tegyük fel, hogy $0 \notin R(g)$ és legyen $G' = \frac{1}{g}$, $F' = f$.

*Megoldások.*

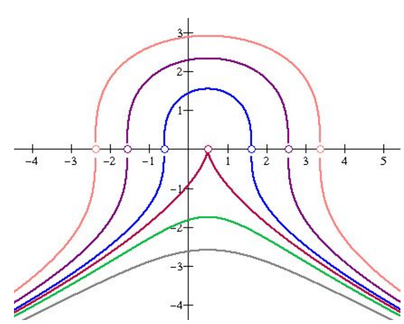
$$G(y(x)) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Szerencsés esetben ebből $y(x)$ ki is fejezhető.

**Példa.**

$$y^2(x) \cdot y'(x) = 1 - 2x$$

*Megoldások.*




3. ábra: $y(x) = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x - x^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R}$