Analízis IV., 11. előadás

Sikolya Eszter

2011. május 5.

9 Primitív függvény létezésének elégséges feltételei

9.1 Folytonos függvény primitív függvénye

9.1. Állítás (22.40)**.** *Ha* $g_1 : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$, $g_2 : [b,d] \to \Omega$ *és* $g_1(b) = g_2(b)$ *ún.* csatolt görbék, *akkor legyen* $g_1 \cup g_2 : [a,d] \to \Omega$ *az ún.* egyesített görbe, *melyre* $(g_1 \cup g_2)_{|_{[a,b]}} = g_1$ *és* $(g_1 \cup g_2)_{|_{[b,d]}} = g_2$. *Ekkor bármely* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *függvényre, ha az integrálok léteznek,*

$$\int_{g_1 \cup g_2} f = \int_{g_1} f + \int_{g_2} f.$$

9.2. Állítás. *Ha* $g : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ *görbe, akkor az* $\overleftarrow{g} : [a,b] \to \Omega$, $\overleftarrow{g}(t) := g(a+b-t)$ *legyen az* ellentétesen irányított *görbe. Ha egy* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *függvény esetén létezik* $\int_g f$, *akkor létezik* $\int_{\overleftarrow{g}} f$ *is, és* $\int_{\overleftarrow{g}} f = -\int_g f$.

9.3. Tétel (22.41)**.** *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *folytonos. Ekvivalensek:*

(i) *Minden* $g : [a,b] \to \Omega$ *zárt görbe (vagyis* $g(a) = g(b)$*) esetén*

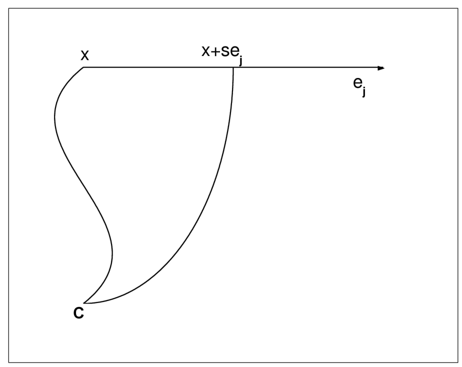
$$\int_g f = 0.$$

(ii) *A vonalintegrál független az úttól, vagyis olyan* $g_1 : [a_1,b_1] \to \Omega$ *és* $g_2 : [a_2,b_2] \to \Omega$ *görbékre, melyekre* $g_1(a_1) = g_2(a_2)$ *és* $g_1(b_1) = g_2(b_2)$,

$$\int_{g_1} f = \int_{g_2} f.$$

(iii) f*-nek létezik primitív függvénye* Ω*-n, vagyis létezik olyan* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény, melyre*

$$D_j F(x) = f_j(x), \quad \forall j = 1,\dots,p, \forall x \in \Omega.$$



1. ábra: A 9.3. Tétel bizonyításához

9.2 Folytonosan differenciálható függvény primitív függvénye

Paraméteres integrál: $h : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $H : [c,d] \to \mathbb{R}$, $H(y) := \int_a^b h(x,y)\,dx$.

9.4. Tétel. *Legyen* $h : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *folytonos. Tegyük fel, hogy* $D_2 h$ *létezik és folytonos* $[a,b] \times [c,d]$*-n. Ekkor a* $H : [c,d] \to \mathbb{R}$, $H(y) := \int_a^b h(x,y)\,dx$ *függvény differenciálható* (c,d)*-n és* $H'(y) = \int_a^b D_2 h(x,y)\,dx$, $y \in (c,d)$.

9.5. Definíció. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *csillagtartomány*, ha létezik olyan $c \in \Omega$ pont, hogy minden $x \in \Omega$ esetén $[c,x] := \{c + t(x-c) \in \mathbb{R}^p : t \in [0,1]\} \subset \Omega$ (a c pontból az Ω minden pontjához el lehet „látni” Ω-ban...).

9.6. Tétel. *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ *csillagtartomány. Legyen* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *folytonosan differenciálható, vagyis* f *differenciálható és minden* $i,j = 1,2,\dots,p$ *esetén* $D_i f_j$ *folytonos* Ω*-n. Ekkor ekvivalensek:*

(i) *Minden* $x \in \Omega$ *esetén* $f'(x) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ *szimmetrikus mátrix, azaz*

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x), \quad \forall i,j = 1,\dots,p.$$

(ii) f*-nek létezik primitív függvénye* Ω*-n, vagyis létezik olyan* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény, melyre*

$$D_j F(x) = f_j(x), \quad \forall j = 1,\dots,p, \forall x \in \Omega.$$