Analízis IV., 12. előadás

Sikolya Eszter

2011. május 19.

10 A Newton-Leibniz tétel további általánosításai

10.1 Green tétele

10.1. Definíció (22.52)**.** Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}(!)$. Azt mondjuk, hogy az f *ívhossz szerinti vonalintegrálja a g görbe mentén* $\int_g f\,ds \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása és ehhez $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számok, melyekre

$$\left| \int_g f\,ds - \sum_{i=1}^{n} f(g(c_i)) \cdot |g(t_i) - g(t_{i-1})| \right| < \varepsilon.$$

10.2. Állítás (22.53)**.** *Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén $g_j' \in R[a, b]$ (pl., g folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor*

$$\int_g f\,ds = \int_a^b f(g(t)) \cdot |g'(t)|\,dt.$$

10.3. Tétel (Green, 22.47, 22.54)**.** *Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ pozitív irányítású egyszerű (azaz, $[a, b)$-n injektív) zárt síkgörbe, mely véges sok, folytonosan differenciálható ívből áll. Jelölje a g által határolt (korlátos) tartományt $A \subset \subset \mathbb{R}^2$, és legyen $\overline{A} \subset G$ nyílt. Ha $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_g fn\,ds = \int_A f',$$

ahol $n(t) = \frac{1}{|g'(t)|}\left(g_2'(t), -g_1'(t)\right)$ a görbe t pontbeli ún. külső normálisa. *Így a fenti formula*

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g_2'(t)\,dt = \int_A D_1 f, \quad \int_a^b f(g(t)) \cdot g_1'(t)\,dt = -\int_A D_2 f.$$

Egyváltozós Newton-Leibniz tétel kétváltozós általánosítása: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\exists f' \in R[a, b] \Rightarrow \int_a^b f' = f(b) - f(a)$, $n(b) = 1$, $n(a) = -1$

10.2 Felület, felszín

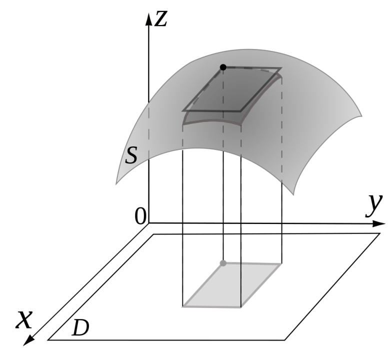
10.4. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető. A $g : A \to \mathbb{R}^p$ leképezés $\mathbb{R}^p$-beli *(paraméterezett) felület*. A felület *folytonos/(folytonosan) differenciálható*, ha g az.
Speciális felület: $g : A \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$, ahol $f : A \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor $\mathcal{R}(g) = \operatorname{graph}(f)$.

$g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe „kétváltozós általánosítása"

Példa. Gömbfelület paraméterezése: $g : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $g(\alpha, \beta) = (R \cdot \sin\beta\cos\alpha, R \cdot \sin\beta\sin\alpha, R \cdot \cos\beta)$.

10.5. Definíció (22.56)**.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és $g : A \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható felület. Azt mondjuk, hogy a g *felszíne létezik és értéke*

$$\int_A |D_1 g \times D_2 g|,$$



1. ábra: Felszín közelítése

ha a $|D_1 g \times D_2 g|$ integrálható A-n, ahol

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\gamma = \sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2 - \langle a, b\rangle^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}^p$$

az a és b vektorok által kifeszített paralelogramma területe (γ a közbezárt szögük.)

10.6. Állítás (22.59)**.** *Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető,* zárt *halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Ekkor f grafikonjának felszíne*

$$F(\operatorname{graph}(f)) = \int_A \sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $g : A \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $D_1 g = (1, 0, D_1 f)$, $D_2 g = (0, 1, D_2 f)$. Ekkor $|D_1 g \times D_2 g| =$

$$= \sqrt{(1 + (D_1 f)^2)(1 + (D_2 f)^2) - (D_1 f)^2 (D_2 f)^2}$$

$$= \sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2}.$$

□

10.3 Integráltételek három dimenzióban

10.7. Definíció (22.60)**.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, $g : A \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható felület és $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}$. Az f *felszíni integrálja*

$$\int_A f \, dF = \int_A (f \circ g) \cdot |D_1 g \times D_2 g|,$$

ha a jobb oldali integrál létezik.

Felszíni integrál = egy területi integrál $\int_g f \, ds = \int_a^b f(g(t)) \cdot |g'(t)| \, dt$ analógja

10.8. Tétel (22.61)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz ∂K határa véges sok, folytonosan differenciálható felületből áll. Ha az $f : \overline{K} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_{\partial K} f n \, dF = \int_K f',$$

ahol $n(x) \in \mathbb{R}^3$ az $x \in \partial K$ pontban a ∂K érintősíkjára merőleges, K-ból kifelé mutató egységvektor: a K ún. külső normálisa. *Így a fenti formula $n = (n_1, n_2, n_3)$ jelöléssel*

$$\int_{\partial K} f n_1 \, dF = \int_K D_1 f, \quad \int_{\partial K} f n_2 \, dF = \int_K D_2 f, \quad \int_{\partial K} f n_3 \, dF = \int_K D_3 f.$$

Egyváltozós Newton-Leibniz tétel háromváltozós általánosítása.

10.9. Tétel (Gauss-Osztrogradszkij, 22.65)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz ∂K határa véges sok, folytonosan differenciálható felületből áll. Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_{\partial K} \langle f, n\rangle \, dF = \int_K \operatorname{div} f,$$

ahol

$$\operatorname{div} f = D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3.$$

10.10. Tétel (Stokes, 22.65)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz ∂K határa véges sok, folytonosan differenciálható felületből áll. Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_{\partial K} (f \times n) \, dF = -\int_K \operatorname{rot} f,$$

ahol

$$\operatorname{rot} f = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$$

és

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, b_1 a_3 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad a, b \in \mathbb{R}^3.$$