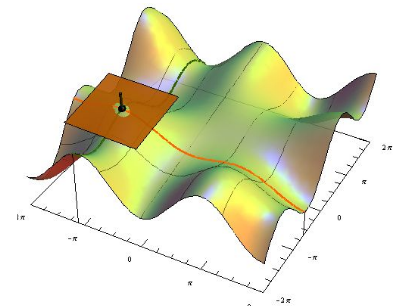
Analízis IV., 3. előadás

Sikolya Eszter

2011. március 3.

3 Differenciálhatóság, folytatás

3.2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset



1. ábra: Kétváltozós függvény deriváltja

3.1. Következmény (19.66)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a,b) \in \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Az f pontosan akkor differenciálható az (a,b) pontban, ha ott léteznek a parciális deriváltjai $D_1f(a,b)$ és $D_2f(a,b)$, továbbá*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - D_1f(a,b)\cdot(x-a) - D_2f(a,b)\cdot(y-b)}{|(x-a,y-b)|} = 0$$

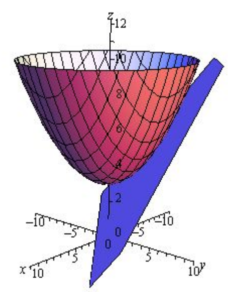
$$\Updownarrow$$

$$f(x,y) = f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b) + \varepsilon(x,y)\cdot|(x-a,y-b)|, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$$

3.2. Tétel (19.69)**.** *(volt) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$, és tegyük fel, hogy a D_1f és D_2f parciális deriváltfüggvények léteznek az (a,b) pont egy környezetében és* folytonosak *(a,b)-ben. Ekkor f differenciálható (a,b)-ben.*

3.3. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt *kétváltozós polinomfüggvénynek* (vagy *polinomnak*) nevezzük, ha az $f(x,y)$ függvényérték $c \cdot x^n \cdot y^m$ ($c \in \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$) alakú tagok összegeként áll elő.
Két kétváltozós polinom hányadosát *kétváltozós racionális törtfüggvénynek* nevezzük.

3.4. Következmény (19.70)**.** *A polinomfüggvények mindenütt differenciálhatók. A racionális törtfüggvények differenciálhatók az értelmezési tartományuk minden pontjában.*



2. ábra: Az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$ függvény egy érintősíkja

3.5. Definíció (19.72)**.** Legyen $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ és f differenciálható (a,b)-ben. Ekkor az f *függvény (a,b) pontbeli érintősíkja* a

$$z = f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b)$$

egyenletű sík. Átrendezve,

$$0 = D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b) + (-1)(z - f(a,b)),$$

tehát az érintősík az $\mathbb{R}^3$ tér egy $(a,b,f(a,b))$ ponton átmenő $(D_1f(a,b), D_2f(a,b), -1)$ normálvektorú síkja.

Megjegyzés. A derivált definíciójából adódik, hogy az érintősík „elég közel" van a függvény grafikonjához, hiszen

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x,y) - (f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b))|}{|(x-a,y-b)|} = 0,$$

ahol a számlálóban az $f(x,y)$ és az érintősík megfelelő pontjának távolsága szerepel.

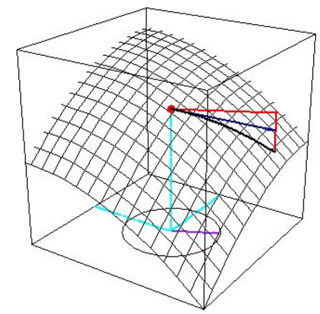
3.6. Definíció (19.74)**.** Legyen $v = (v_1, v_2)$ egy egységvektor, vagyis

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1.$$

Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontbeli v irányú *iránymenti deriváltja* létezik, ha

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b) + t\cdot(v_1,v_2)) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_v f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial v}(a,b)$. Itt tulajdonképpen az történik, hogy a $t \mapsto f((a,b)+t\cdot(v_1,v_2))$ egyváltozós függvényt deriváljuk 0-ban.



3. ábra: Iránymenti derivált

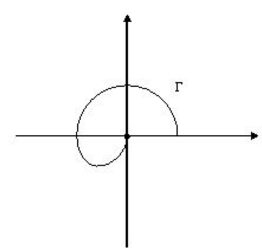
Megjegyzés (19.76)*.* A parciális deriváltak valójában speciális iránymenti deriváltak:

$$D_1 f(a,b) = D_{(1,0)} f(a,b), \quad D_1 f(a,b) = D_{(0,1)} f(a,b)$$

3.7. Tétel (19.75)**.** *Ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a,b) \in$ $\in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, akkor ebben a pontban létezik minden $v = (v_1, v_2)$, $|v| = 1$ irány menti deriváltja $D_v f(a,b)$, továbbá*

$$\begin{aligned} D_v f(a,b) &= \langle f'(a,b), v\rangle = \langle (D_1 f(a,b), D_2 f(a,b)), (v_1, v_2)\rangle \\ &= D_1 f(a,b)\cdot v_1 + D_2 f(a,b)\cdot v_2 \end{aligned}$$

Példa. Olyan függvényre, amelynek minden v irányú deriváltja létezik a (0,0)-ban, de mégcsak nem is folytonos a (0,0)-ban, ld. 4. ábra.



4. ábra: $f(x,y) = 1$, $(x,y) \in \Gamma$, $f(x,y) = 0$, $(x,y) \notin \Gamma$.

3.8. Definíció. Legyenek $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ pontok a síkon. Az $[a,b]$ *szakasz* az

$$[a,b] := \{a + t\cdot(b-a) : t \in [0,1]\} = \{(1-t)\cdot a + t\cdot b : t\in[0,1]\}$$

ponthalmaz.

3.9. Tétel (Lagrange-középértéktétel, 19.77)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a,b]$ szakasz pontjaiban, $a, b \in \mathbb{R}^2$. Ekkor*

(a) az $F(t) := f(a + t\cdot(b-a))$, $t \in [0,1]$ függvény differenciálható $[0,1]$-en és

$$F'(t) = \langle f'(a + t\cdot(b-a)), b-a\rangle, \quad t\in[0,1];$$

(b) létezik olyan $c \in [a,b]$ pont, melyre

$$f(b) - f(a) = \langle f'(c), b-a\rangle = D_1 f(c)\cdot(b_1 - a_1) + D_2 f(c)\cdot(b_2 - a_2).$$