Analízis IV., 4. előadás

Sikolya Eszter

2011. március 10.

3 Differenciálhatóság, folytatás

3.3 $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eset

Könnyen meggondolható, hogy fentiek hogyan általánosíthatók a p változós esetre.

3.1. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *(homogén) lineáris függvény*, ha $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, hogy

$$\ell(x) = \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_p \cdot x_p, \quad x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p.$$

(Itt $\alpha_1 = \ell(1,0,\ldots,0), \ldots, \alpha_p = \ell(0,\ldots,0,1)$.)

3.2. Definíció (19.61)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az a pontban*, ha létezik olyan $\ell = \ell_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \ell(x-a)}{|x-a|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \varepsilon(x) \cdot |x-a|, \ \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

3.3. Tétel (19.65)**.** *A fenti definícióban*

$$\ell(x) = D_1 f(a) \cdot x_1 + \cdots + D_p f(a) \cdot x_p.$$

3.4. Definíció (19.68)**.** Ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a) := (D_1 f(a), \ldots, D_p f(a)) \in \mathbb{R}^p$ vektort a függvény a-beli *deriváltvektorának* vagy *gradiensének* nevezzük.

3.5. Tétel (19.69)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, és tegyük fel, hogy a $D_1 f, \ldots, D_p f$ parciális deriváltfüggvények mind értelmezve vannak az a pont egy környezetében és* folytonosak *a-ban. Ekkor f differenciálható a-ban.*

3.6. Definíció (19.72)**.** Legyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és f differenciálható a-ban. Ekkor az *f függvény a pontbeli érintő hipersíkja* a

$$x_{p+1} = f(a) + D_1 f(a) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + D_p f(a) \cdot (x_p - a_p)$$

egyenletű hipersík. Átrendezve,

$$0 = D_1 f(a) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + D_p f(a) \cdot (x_p - a_p) + (-1)(x_{p+1} - f(a)),$$

tehát az érintő hipersík az $\mathbb{R}^{p+1}$ tér egy $(a_1, \ldots, a_p, f(a))$ ponton átmenő $\big(D_1 f(a), \ldots, D_p f(a), -1\big)$ normálvektorú hipersíkja.

3.7. Definíció (19.74)**.** Legyen $v \in \mathbb{R}^p$ egy egységvektor, vagyis

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_p^2} = 1.$$

Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontbeli v irányú *iránymenti deriváltja* létezik, ha

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_v f(a)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Itt tulajdonképpen az történik, hogy a $t \mapsto f(a + t \cdot v)$ egyváltozós függvényt deriváljuk 0-ban.

3.8. Tétel (19.75)**.** *Ha egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, akkor ebben a pontban létezik minden $v \in \mathbb{R}^p$, $|v| = 1$ irány menti deriváltja $D_v f(a)$, továbbá*

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= \langle f'(a), v\rangle = \langle (D_1 f(a), \dots, D_p f(a)), (v_1, \dots, v_p)\rangle \\ &= D_1 f(a)\cdot v_1 + \dots + D_p f(a)\cdot v_p \end{aligned}$$

3.9. Definíció. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^p$ pontok a síkon. Az $[a, b]$ *(általánosított) szakasz* az

$$[a, b] := \{a + t\cdot(b - a) : t \in [0,1]\} = \{(1 - t)\cdot a + t\cdot b : t \in [0,1]\}$$

ponthalmaz.

3.10. Tétel (Lagrange-középértéktétel, 19.77)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a, b]$ szakasz pontjaiban, $a, b \in \mathbb{R}^p$. Ekkor*

(a) az $F(t) := f(a + t\cdot(b - a))$, $t \in [0,1]$ függvény differenciálható $[0,1]$-en és

$$F'(t) = \langle f'(a + t\cdot(b - a)), b - a\rangle, \quad t \in [0,1];$$

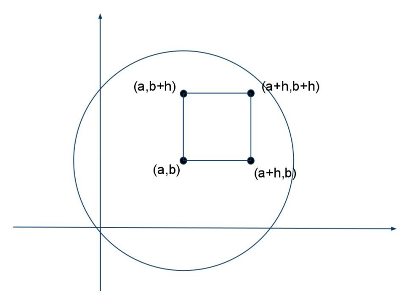
(b) létezik olyan $c \in [a, b]$ pont, melyre

$$f(b) - f(a) = \langle f'(c), b - a\rangle = D_1 f(c)\cdot(b_1 - a_1) + \dots + D_p f(c)\cdot(b_p - a_p).$$

4 Többszörös differenciálás

4.1. Tétel (Young, 19.80)**.** *Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $D_1 f$ és $D_2 f$ parciális deriváltfüggvényei értelmezve vannak az $(a, b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és* differenciálhatók *az (a, b) pontban, akkor*

$$D_{12} f(a, b) = D_{21} f(a, b).$$



1. ábra: Lemma a Young-tételhez

4.2. Lemma (19.81)**.**

1. Ha a $D_1 f$ parciális deriváltfüggvény értelmezve van az $(a, b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálható az (a, b) pontban, akkor

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b + h) - f(a + h, b) - f(a, b + h) + f(a, b)}{h^2} = D_{21} f(a, b). \qquad (1)$$

2. Ha a $D_2 f$ parciális deriváltfüggvény értelmezve van az $(a, b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálható az (a, b) pontban, akkor

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b + h) - f(a + h, b) - f(a, b + h) + f(a, b)}{h^2} = D_{12} f(a, b). \qquad (2)$$

Példa. A Young-tétel nem teljesül az alábbi függvényre:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0), \\ 0, & (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

4.3. Definíció (18.28)**.** Legyen f differenciálható az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltfüggvényei differenciálhatók az (a, b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az (a, b) pontban.