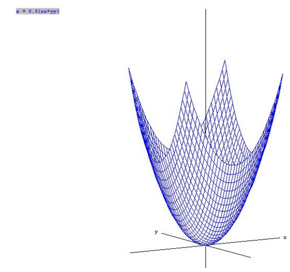
Analízis IV., 6. előadás

Sikolya Eszter

2011. március 24.

5 *A differenciálszámítás alkalmazásai, folytatás*



1. ábra: Kétváltozós konvex függvény, $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

5.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $G \subset \mathbb{R}^2$ halmaz *konvex*, ha minden olyan szakaszt tartalmaz, melynek végpontjai G-ben vannak.

5.2. Definíció (19.101)**.** Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *konvex (konkáv)* a $G \subset \mathcal{D}(f)$ konvex halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in G$ esetén az egyváltozós $t \mapsto f(1-t)x_1 + tx_2)$ függvény konvex (konkáv) [0,1]-en, vagyis minden $x_1, x_2 \in G$ esetén

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (\geq)(1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall t \in [0,1]$$

5.3. Tétel (19.103)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható a $G \subset \subset \mathcal{D}(f)$ konvex nyílt halmazon. Az f függvény akkor és csak akkor konvex (konkáv) G-n, ha minden $(a,b) \in G$ esetén a $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit.*

5.1 $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *eset*

Az eddigiekben tárgyaltak megfelelően általánosíthatók $\mathbb{R}^2$ helyett $\mathbb{R}^p$-re $(p \geq 2)$. Ezek közül az alábbiakban a Taylor-polinommal kapcsolatosak általánosításáról lesz szó.

5.4. Definíció (19.85)**.** Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ *pontbeli k-adrendű parciális deriváltjai, $D_{i_1 \ldots i_k} f(a)$,* $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq p$ $(k \geq 2)$ úgy kaphatók, hogy a $k-1$-edrendű parciális deriváltfüggvényeket: $D_{i_1 \ldots i_{k-1}} f$, $1 \leq \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq p$ deriváljuk valamelyik változó szerint a-ban.

Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény kétszeres differenciálhatóságát ugyanúgy definiáljuk, mint $p = 2$ esetben (minden parciális deriváltja létezik és differenciálható.)

5.5. Definíció (19.86)**.** Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy *k-szor differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$* $(k \geq 3)$ pontban, ha $k-1$-szer differenciálható a-ban, továbbá minden $k-1$-edrendű parciális deriváltja létezik a egy környezetében és differenciálható a-ban.

5.6. Definíció (19.92)**.** Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható a-ban. Ekkor az f *a pont körüli n. Taylor-polinomja*

$$T^f_{n,a}(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} D_i f(a) \cdot (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i_1,i_2=1}^{p} D_{i_1 i_2} f(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) + \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \ldots i_n = 1}^{p} D_{i_1 \cdots i_n} f(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \cdot (x_{i_n} - a_{i_n})$$

$(x \in \mathbb{R}^p)$ legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény. Bevezetve a

$$(\mathrm{d}^k f(a))(x) := \sum_{i_1,\ldots i_k = 1}^{p} D_{i_1 \cdots i_k} f(a) \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

jelölést, a Taylor-polinom az alábbi alakba írható:

$$T^f_{n,a}(x) = f(a) + (\mathrm{d}^1 f(a))(x-a) + \frac{1}{2!}(\mathrm{d}^2 f(a))(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}(\mathrm{d}^n f(a))(x-a).$$

5.7. Tétel (Taylor-fomula Lagrange-maradéktaggal, 19.95)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $n+1$-szer differenciálható az $[a,x]$ szakasz pontjaiban, $a, x \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Ekkor van olyan $c \in [a,x]$ pont, melyre*

$$f(x) = T^f_{n,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!}(\mathrm{d}^{n+1} f(c))(x-a).$$

Ennek segítségével igazolható az alábbi általános tétel.

5.8. Tétel (19.97). *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor*

1.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{|x-a|^n} = 0; \tag{1}$$

2. Ha p olyan legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény, melyre (1) *teljesül, akkor $p = T^f_{n,a}$.*

6 $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálhatósága

6.1 A derivált fogalma

6.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $i \in \{1, \dots, q\}$. Az f függvény *i-dik koordinátafüggvénye*

$$f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad f_i(x) = [f(x)]_i, \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

6.2. Definíció (Ld. lineáris algebra). Az $\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *lineáris leképezés*, ha $\ell(x+y) = \ell(x) + \ell(y)$ és $\ell(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \ell(x)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Ismeretes, hogy ha az $\mathbb{R}^p$ és $\mathbb{R}^q$ vektortereket a szokásos bázissal látjuk el, akkor minden ℓ lineáris leképezéshez *egyértelműen* hozzárendelhető egy $A = (a_{ij})_{q \times p}$ $q \times p$ mátrix, hogy $\ell(x) = A \cdot x$ minden $x \in \mathbb{R}^p$-re, tehát A-t a továbbiakban azonosíthatjuk ℓ-el. Az A mátrix i. sorában éppen az $A_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p$, $x \in \mathbb{R}^p$ i-dik koordinátafüggvény (egy lineáris függvény) együtthatói állnak. Az A mátrix j-dik oszlopában pedig éppen az $A(e_j) \in \mathbb{R}^q$, $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^p$ j-dik bázisvektor képének koordinátái állnak.

6.3. Definíció (20.11). Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az a pontban*, ha létezik olyan $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés (azaz, $q \times p$ mátrix), melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_{\mathbb{R}^q} \tag{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x) \cdot |x-a|, \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0_{\mathbb{R}^q}$$

6.4. Tétel (20.13). *Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, ha f minden f_i ($i \in \{1, \dots, q\}$) koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. Ekkor a (2)-ben szereplő A $q \times p$ mátrixban $a_{ij} = D_j f_i(a)$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, vagyis*

$$A = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} \tag{3}$$

6.5. Következmény (20.14). *Ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor a (2)-ben szereplő A mátrix egyértelmű,* (3) *alakú, és neve: f a pontbeli* Jacobi-mátrixa. *Jelölés: $A = f'(a)$.*

6.6. Tétel (20.16).

1. *Ha f differenciálható a-ban, akkor f folytonos a-ban.*
2. *Ha minden $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, esetén a $D_j f_i$ parciális deriváltfüggvények léteznek a egy környezetében és folytonosak a-ban, akkor f differenciálható a-ban.*

6.2 Differenciálási szabályok

6.7. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ egy lineáris leképezés, a hozzá tartozó mátrix A, akkor f minden $x \in \mathbb{R}^p$ pontban differenciálható, és $f'(x) = A$, $x \in \mathbb{R}^p$.*

6.8. Tétel (20.19)**.** *Ha az $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálhatók az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) \cap \operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, akkor $f + g$ és $\lambda \cdot f$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

6.9. Tétel (Kompozíciófüggvény differenciálhatósága, 20.20)**.** *Legyen $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ differenciálható az $g(a) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $f \circ g$ differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f \circ g)$ pontban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A jobb oldalon egy $s \times q$ és egy $q \times p$ mátrix $s \times q$ szorzata áll, ami a megfelelő lineáris leképezések kompozíciója.

6.10. Lemma. *Minden $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezéshez található egy $K \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre*

$$|A(x) - A(y)| = |A(x-y)| \leq K \cdot |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^p.$$

6.11. Következmény (20.23)**.** *Legyen $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ ($s = 1$ eset) differenciálható a $g(a) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $F = f \circ g$ (ahol $F(x) = f(g_1(x), \ldots, g_q(x))$, $x \in \mathcal{D}(f \circ g)$) differenciálható a-ban, és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén*

$$D_j F(a) = \sum_{i=1}^{q} (D_i f)(g(a)) \cdot D_j g_i(a).$$

Ez a képlet könnyebben megjegyezhető, ha f változóit $(y_1, \ldots, y_q)$-val jelöljük, és $g_1, \ldots, g_q$ helyett is $y_1, \ldots, y_q$-t írunk. Ezzel a jelöléssel a fenti képlet:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_q} \cdot \frac{\partial y_q}{\partial x_j}$$

szokás láncszabály*nak is nevezni.*

6.12. Következmény (20.25)**.** *Ha $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ($q = 1$) függvények differenciálhatók az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) \cap \operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, akkor $f \cdot g$ és $g(a) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ban.*

6.13. Tétel (Inverzfüggvény differenciálhatósága, 20.26)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, és legyen az $f'(a)$ ($p \times p$) mátrix invertálható. Tegyük fel, hogy létezik olyan $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ függvény, mely $f(a)$ egy környezetében van értelmezve, és ott $f(g(x)) = x$. Ekkor g differenciálható $f(a)$-ban, és*

$$g'(f(a)) = [f'(a)]^{-1}.$$