Matematika BSc tanárszak
Analízis IV. előadásjegyzet
2010/2011. tavaszi félév

Sikolya Eszter
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2011. október 11.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet a 2010/2011-es tanév tavaszi félévében tartott matematika tanárszakos Analízis IV. kurzus anyagához készül. A jegyzet a félév során folyamatosan bővül, az utolsó változtatás dátuma a címlapon látható. A jegyzetben bizonyára előfordulhatnak hibák – ezek jelzését örömmel veszem a `seszter@cs.elte.hu` e-mail-címen!

A tételek, állítások, bizonyítások stb. után található számok a Laczkovich M. - T. Sós Vera: *Analízis II.* c. könyv megfelelőire utalnak.

Fontos jelölés: a jegyzet során használom egy $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ vektor hosszára az $|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}$ jelölést. Ez az előző féléves szóhasználattal az x pontnak a $0 \in \mathbb{R}^p$ origótól vett ún. euklideszi távolsága, vagyis

$$|x| = d_2(x,0),$$

ahol d_2 az $\mathbb{R}^p$-beli euklideszi metrikát jelöli.

Néhány szó a tanulásról.

1. Javaslom, hogy ezen jegyzeten kívül az előadásokon készült órai jegyzetet is tanulmányozzák!
2. Az anyag egyszeri, alapos elolvasása a megértést szolgálja – az anyag elsajátításához nem elég. Nagyban megkönnyíti és megrövidíti a vizsgaidőszaki felkészülést, ha a megértés a félév során folyamatosan történik, az anyagban való haladással párhuzamosan.
3. Az anyag első áttanulmányozása után – például a Tárgymutató segítségével – fejből próbálják meg leírni a legfontosabb definíciókat és tételeket! Ha valami nem megy, lapozzák fel egyből a megfelelő részt, és nézzék át újból!
4. Ha a definíciókat és tételeket elsajátították, csak akkor kezdjék el a bizonyítások megtanulását! Ez hasonlóan végezhető, ahogy az előző pontokban leírtam. Minden bizonyításnál elsősorban azokat a lényeges állításokat, tételeket jegyezzék meg, amely(ek) a bizonyítás fő lépéseit alkotják.
5. Végül, hogy az anyag nagyobb összefüggéseit is megértsék, szükség van a teljes anyag újból elolvasására, vagy legalábbis a főbb pontok áttekintésére.

Ajánlott irodalom:

Thomas-féle kalkulus 3., Typotex, 2007. (Jól használhatók az 1-2. kötetek is)
Fekete Z. - Zalay M.: *Többváltozós függvények analízise*, Műszaki Könyvkiadó, 2006.
Laczkovich M. - T. Sós Vera: *Analízis II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.

Első fejezet

Differenciálegyenletek

1.1. Radioaktív anyag bomlása (vagy szaporodás)

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= k \cdot y(t) \\
\frac{y'(t)}{y(t)} &= k \\
\ln |y(t)| &= k \cdot t + \ln c, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad / \exp(\cdot) \\
|y(t)| &= c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}^+ \\
y(t) &= c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

1.1. Állítás. *Minden olyan differenciálható $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez, melyre $y' = k \cdot y$, létezik $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\varphi(t) := y(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt}.$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = y'(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} - ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} = ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} - ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} = 0,$$

tehát φ konstans. □

Általánosítva a fenti problémát, keressük azokat az y, az I intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x)y(x), \tag{1.1}$$

ahol $f \in C(I)$. Világos, hogy ha F egy primitív függvénye f-nek (minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, ld. 2. félév), akkor

$$y(x) := c \cdot \mathrm{e}^{F(x)}, \quad x \in I$$

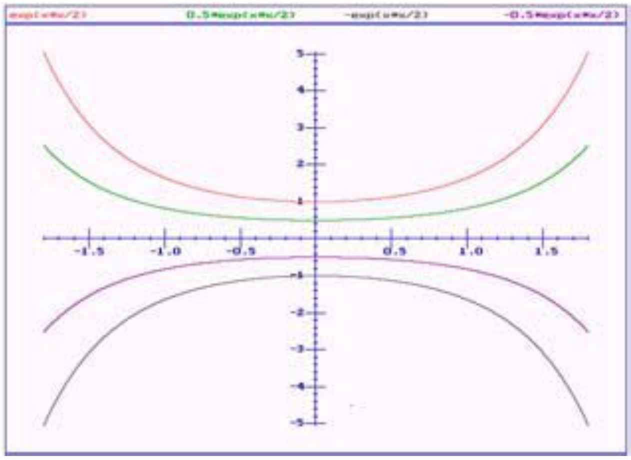
megoldás tetszőleges c valós szám esetén. A fenti 1.1. Állítás bizonyításával analóg módon látható, hogy csak ilyen alakú megoldások léteznek.

1.2. Példa.

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

A megoldások az 1.1. ábrán láthatók.
Kezdetiérték-feladat megoldása
Keresünk olyan differenciálható $y : I \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f(x) \cdot y(x), \quad x \in I \\
y(x_0) &= y_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$



1.1. ábra. $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$

Válasszunk f-nek olyan F primitív függvényét, melyre $F(x_0) = 0$, tehát

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

és legyen $c := y_0$. Ekkor

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

jó megoldás, hiszen

$$y(x_0) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt} = y_0.$$

1.3. Példa.

$$\begin{cases} y'(x) = x \cdot y(x), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ekkor az 1.2. Példa megoldásai közül csak az $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ a megoldás.

1.2. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet

Keressük azokat az y, az I intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x),$$

ahol $f, g \in C(I)$. Megszorozva az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges ρ differenciálható függvénnyel, kapjuk, hogy

$$y'(x)\rho(x) - \rho(x)f(x)y(x) = \rho(x)g(x).$$

Ha elérjük, hogy

$$\rho(x)f(x) = -\rho'(x) \tag{1.2}$$

legyen, akkor a kapott egyenlet

$$[y(x)\rho(x)]' = \rho(x)g(x)$$

alakúvá egyszerűsödik. Az (1.1) megoldásából kapjuk (1.2)-re, hogy

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{-F(x)}$$

egy jó megoldás, ahol F a f egy primitív függvénye. Ebből, mivel $\rho \cdot g \in C(I)$, vagyis Riemann-integrálható is,

$$\begin{aligned}
[y(x)\rho(x)]' &= \rho(x)g(x) \\
y(x)\rho(x) &= c + \int_{x_0}^{x} \rho(t)g(t)\,dt \\
y(x) &= c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + \mathrm{e}^{F(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-F(t)} g(t)\,dt \\
&= c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{F(x)-F(t)} g(t)\,dt,
\end{aligned}$$

ahol $x_0 \in I$ tetszőleges.

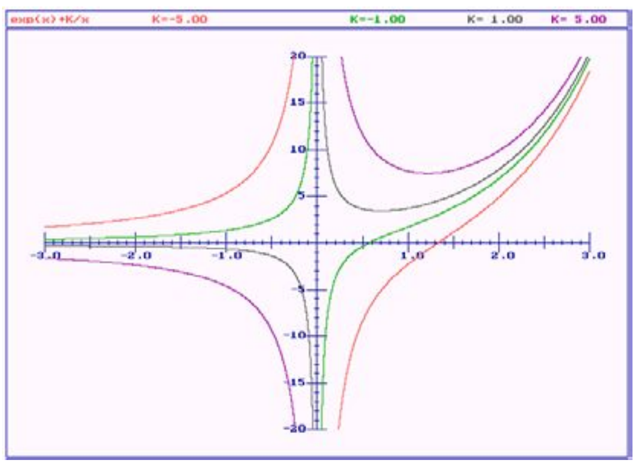
Ha kezdeti érték is adva van, vagyis $y(x_0) = y_0$, akkor válasszuk ismét F-et úgy, hogy $F(x_0) = 0$ legyen, vagyis $F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, és $c := y_0$. Ekkor

$$y(x_0) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{F(x_0)} + \mathrm{e}^{F(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} \mathrm{e}^{-F(t)} g(t)\,dt = y_0.$$

1.4. Példa.

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^{x}$$

A megoldások az 1.2. ábrán láthatók.



1.2. ábra. $y(x) = \mathrm{e}^{x} + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}$

1.5. Példa.

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^{x}, \\ y(1) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Ekkor az 1.4. Példa megoldásai közül csak az $y(x) = \mathrm{e}^{x}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ a megoldás.

1.3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Keressük azokat az $y : I \to J$ intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)),$$

ahol $f \in C(I)$, $g \in C(J)$. Tegyük fel, hogy $0 \notin R(g)$. Ekkor

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Ha G a $\frac{1}{g}$ egy primitív függvénye, vagyis $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt$, akkor mindkét oldalt integrálva

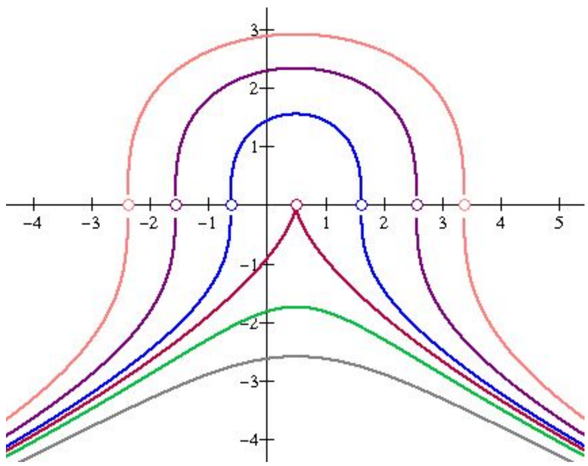
$$G(y(x)) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Szerencsés esetben ebből $y(x)$ ki is fejezhető.

1.6. Példa.

$$y^2(x) \cdot y'(x) = 1 - 2x$$

A megoldások az 1.3. ábrán láthatók.



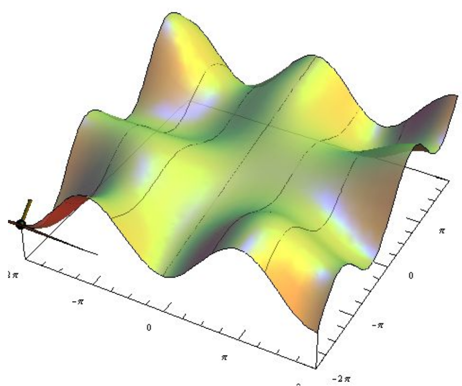
1.3. ábra. $y(x) = \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x - x^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R}$

Második fejezet

Többváltozós differenciálszámítás I.

Emlékeztető

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja



2.1. ábra. Kétváltozós függvény grafikonja

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{D}(f),\ z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

2.1. Parciális derivált

2.1.1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset

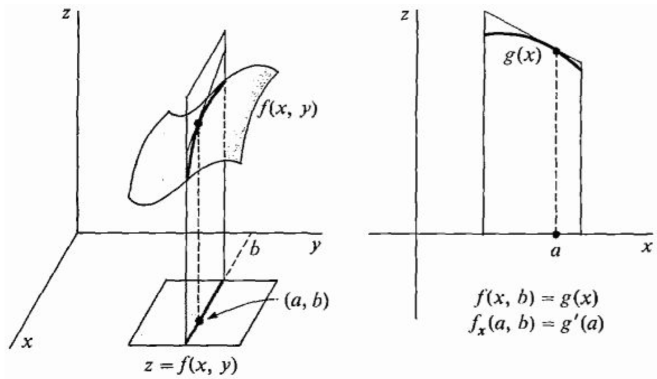
2.1. Definíció (19.54)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Az f függvény *x szerinti* vagy *első változó szerinti parciális deriváltja létezik (a, b)-ben*, ha

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

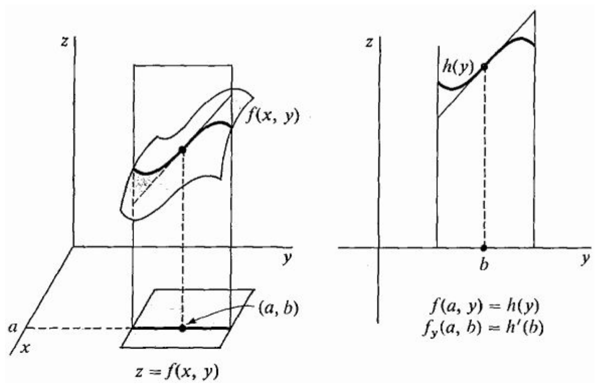
Jelölés: $D_1 f(a, b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ vagy $f'_x(a, b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a, b) pont 2. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $x \mapsto f(x, b)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a-ban.

2.2. Definíció (19.54)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Az f függvény *y szerinti* vagy *második változó szerinti parciális deriváltja létezik (a, b)-ben*, ha

$$\exists \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \in \mathbb{R}.$$



2.2. ábra. x szerinti parciális derivált



2.3. ábra. y szerinti parciális derivált

Jelölés: $D_2 f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ vagy $f'_y(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a,b) pont 1. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $y \mapsto f(a,y)$ egyváltozós függvényt deriváljuk b-ben.

2.3. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *első ill. második parciális deriváltfüggvénye* $D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ill. $D_2 f :$ $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(D_1 f) = \{(x,y) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) : \exists D_1 f(x,y)\}, \quad (D_1 f)(x,y) := D_1 f(x,y)$$
$$\mathcal{D}(D_2 f) = \{(x,y) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) : \exists D_2 f(x,y)\}, \quad (D_2 f)(x,y) := D_2 f(x,y)$$

2.4. Definíció (19.78)**.** Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *másodrendű parciális deriváltjait* az első ill. második parciális deriváltfüggvények további paricális deriváltjaiból nyerjük:

$$D_{11} f := D_1(D_1 f),\ D_{12} f := D_1(D_2 f),\ D_{21} f := D_2(D_1 f),\ D_{22} f := D_2(D_2 f)$$

2.1.2. Lokális szélsőérték és parciális derivált

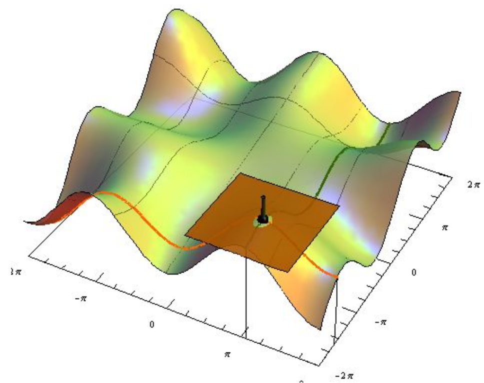
2.5. Definíció (19.57)**.** Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek *lokális minimuma ill. maximuma (lokális szélsőértéke) van az* $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ *pontban*, ha (a,b)-nek létezik olyan $U = B((a,b),r)$ környezete, hogy

$$f(x,y) \geq f(a,b) \text{ ill. } f(x,y) \leq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in U.$$

Az $f(a,b) \in \mathbb{R}$ szám az f *lokális minimuma ill. maximuma* (a,b)-ben.
Ha

$$f(x,y) > f(a,b) \text{ ill. } f(x,y) < f(a,b) \quad \forall (x,y) \in U$$

teljesül, akkor f-nek *szigorú lokális minimuma ill. maximuma (szigorú lokális szélsőértéke) van* (a,b)*-ben.*



2.4. ábra. Lokális maximum

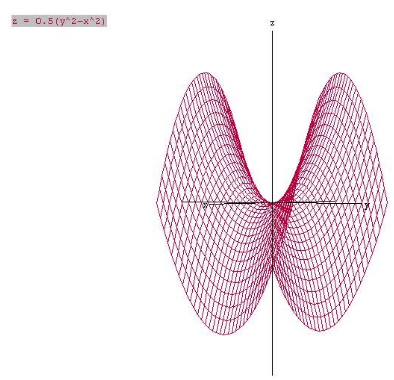
2.6. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele, 19.58)**.** *Ha az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek a parciális deriváltjai* (a,b)*-ben, akkor*

$$D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor az $x \mapsto f(x,b)$ ill. $y \mapsto f(a,y)$ egyváltozós függvényeknek is lokális szélsőértéke van a-ban ill. b-ben. Az állítás a 2.1. és a 2.2. Definíciókból, valamint az egyváltozós differenciálszámítás keretében tanultakból adódik. □

2.7. Példa. Az $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy)$ függvényre $D_1 f(0{,}0) = D_2 f(0{,}0) = 0$, mégsincs lokális szélsőértéke (0,0)-ban.

2.8. Példa. Az $f(x,y) = xy$ (nyeregfelület) függvényre $D_1 f(0{,}0) = D_2 f(0{,}0) = 0$, mégsincs lokális szélsőértéke (0,0)-ban.



2.5. ábra. $f(x,y) = xy$

2.9. Tétel (19.59)**.** *Legyen* f *az* A *korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy* f*-nek léteznek a parciális deriváltjai* $\operatorname{int} A$ *pontjaiban. Ekkor* f *a legkisebb és legnagyobb értékét vagy* ∂A*-n veszi fel, vagy* $\operatorname{int} A$ *egy olyan pontjában, ahol* $D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0$.

Bizonyítás. Az előző félévben láttuk (ld. Általánosított Weierstrass-tétel), hogy f-nek van legkisebb és legnagyobb értéke A-n. A tétel így a 2.6. Tételből adódik. □

2.10. Példa (19.56)**.** Az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0, & (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

függvénynek léteznek a parciális deriváltjai (0,0)-ban, $D_1 f(0{,}0) = D_2 f(0{,}0) = 0$, de a függvény nem folytonos (0,0)-ban (ld. előző félév.)

2.1.3. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eset

A fentiek könnyen általánosíthatók p változós függvényekre. Például:

2.11. Definíció (19.54)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $i \in \{1, \dots, p\}$. Az f függvény *i. változó szerinti parciális deriváltja létezik a-ban*, ha

$$\exists \lim_{t \to a_i} \frac{f(a_1, \dots a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_p)}{t - a_i} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_i f(a)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ vagy $f'_{x_i}(a, b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az a pont összes koordinátáját lerögzítjük az i. kivételével, és az így kapott $t \mapsto f(a_1, \dots a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a_i-ben.

2.2. Differenciálhatóság

2.2.1. Bevezető

2.12. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban*, ha

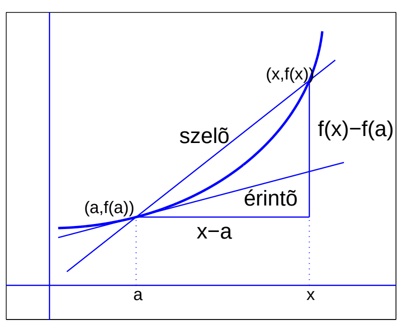
$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)}{x - a} = 0 \tag{2.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x) \cdot (x - a), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{2.2}$$



2.6. ábra. Egyváltozós függvény deriváltja a-ban

2.13. *Megjegyzés.* Az

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

a függvény *a pontbeli érintőjének* egyenlete.

2.14. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *(homogén) lineáris függvény*, ha $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, hogy

$$\ell(x, y) = \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(Itt $\alpha_1 = \ell(1{,}0)$, $\alpha_2 = \ell(0{,}1)$.)

2.2.2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset

2.15. Definíció (19.61)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az (a,b) pontban*, ha létezik olyan $\ell = \ell_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \ell(x-a, y-b)}{|(x-a, y-b)|} = 0 \text{ (vö. (2.1))} \tag{2.3}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y) = f(a,b) + \ell(x-a, y-b) + \varepsilon(x,y) \cdot |(x-a, y-b)|, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0 \text{ (vö. (2.2))} \tag{2.4}$$

2.16. Tétel (19.64)**.** *Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor folytonos is (a,b)-ben.*

Bizonyítás. A (2.4) egyenlet alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$, tehát f folytonos (a,b)-ben. □

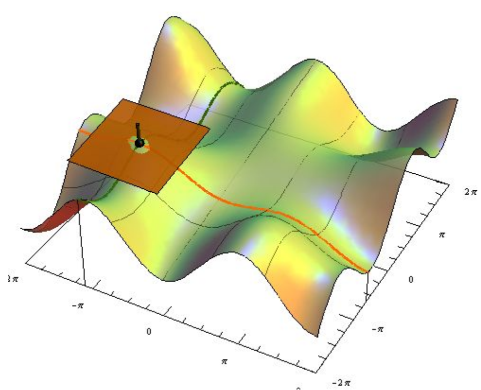
2.17. Tétel (19.65)**.** *Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor f-nek léteznek a parciális deriváltjai (a,b)-ben, és a fenti definícióban*

$$\ell(x,y) = D_1 f(a,b) \cdot x + D_2 f(a,b) \cdot y.$$

Bizonyítás. Tekintsük a differenciálhatóság (2.3) definícióját és rögzítsük le $y = b$-t! Ekkor $\ell(x,y) = \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot y$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b) - \alpha_1 \cdot (x-a)}{|x-a|} = 0,$$

amiből a 2.1. Definíció alapján következik, hogy $\exists D_1 f(a,b) = \alpha_1$. A $\exists D_2 f(a,b) = \alpha_2$ hasonlóan adódik. □



2.7. ábra. Kétváltozós függvény deriváltja

2.18. Következmény (19.66)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Az f pontosan akkor differenciálható az (a,b) pontban, ha ott léteznek a parciális deriváltjai $D_1 f(a,b)$ és $D_2 f(a,b)$, továbbá*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - D_1 f(a,b) \cdot (x-a) - D_2 f(a,b) \cdot (y-b)}{|(x-a, y-b)|} = 0 \tag{2.5}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y) = f(a,b) + D_1 f(a,b) \cdot (x-a) + D_2 f(a,b) \cdot (y-b) + \varepsilon(x,y) \cdot |(x-a, y-b)|, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$$

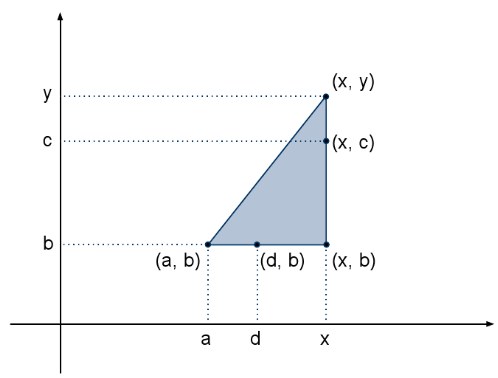
2.19. Definíció (19.68)**.** Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor az $f'(a,b) := (D_1 f(a,b), D_2 f(a,b)) \in \mathbb{R}^2$ vektort a függvény (a,b)-beli *deriváltvektorának* vagy *gradiensének* nevezzük.

2.20. Tétel (19.69)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény,* $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$*, és tegyük fel, hogy a* $D_1 f$ *és* $D_2 f$ *parciális deriváltfüggvények léteznek az* (a, b) *pont egy környezetében és* folytonosak (a, b)*-ben. Ekkor* f *differenciálható* (a, b)*-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Megmutatjuk, hogy létezik $\delta > 0$, hogy ha $|(x, y) - (a, b)| < \delta$, akkor

$$|f(x, y) - f(a, b) - D_1 f(a, b) \cdot (x - a) - D_2 f(a, b) \cdot (y - b)| < \varepsilon \cdot |(x - a, y - b)|,$$

amivel a 2.18. Következmény alapján az állítást beláttuk.



2.8. ábra.

A $D_1 f$ és $D_2 f$ parciális deriváltfüggvények folytonossága miatt létezik $\delta > 0$, hogy ha $|(x, y) - (a, b)| < \delta$, akkor

$$|D_1 f(x, y) - D_1 f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } |D_2 f(x, y) - D_2 f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Rögzítsünk le egy $|(x, y) - (a, b)| < \delta$ tulajdonságú (x, y) pontot és alkalmazzuk az $t \mapsto f(x, t)$ függvényre az egyváltozós Lagrange-középértéktételt a $[b, y]$ (vagy $[y, b]$) szakaszon! Eszerint létezik $c = c(x, y) \in [b, y]$ pont, melyre

$$f(x, y) - f(x, b) = D_2 f(x, c) \cdot (y - b). \tag{2.7}$$

Alkalmazva most a $t \mapsto f(t, b)$ függvényre az egyváltozós Lagrange-középértéktételt a $[a, x]$ (vagy $[x, a]$) szakaszon kapjuk, hogy létezik $d = d(x, y) \in [a, x]$ pont, melyre

$$f(x, b) - f(a, b) = D_1 f(d, b) \cdot (x - a). \tag{2.8}$$

A feltételekből adódik, hogy

$$|(x, c) - (a, b)| < \delta \text{ és } |(d, b) - (a, b)| < \delta$$

is teljesül, amiből (2.6) alapján

$$|D_2 f(x, c) - D_2 f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ és } |D_1 f(d, b) - D_1 f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

A (2.7), (2.8) és (2.9) felhasználásával

$$\begin{aligned}
&|f(x, y) - f(a, b) - D_1 f(a, b) \cdot (x - a) - D_2 f(a, b) \cdot (y - b)| \\
&\le |f(x, y) - f(x, b) - D_2 f(a, b) \cdot (y - b)| + |f(x, b) - f(a, b) - D_1 f(a, b) \cdot (x - a)| \\
&= |D_2 f(x, c) \cdot (y - b) - D_2 f(a, b) \cdot (y - b)| + |D_1 f(d, b) \cdot (x - a) - D_1 f(a, b) \cdot (x - a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot |y - b| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x - a| < \varepsilon \cdot |(x - a, y - b)|,
\end{aligned}$$

amivel a bizonyítás kész. □

2.21. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt *kétváltozós polinomfüggvénynek* (vagy *polinomnak*) nevezzük, ha az $f(x, y)$ függvényérték $c \cdot x^n \cdot y^m$ $(c \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{N})$ alakú tagok összegeként áll elő.
Két kétváltozós polinom hányadosát *kétváltozós racionális törtfüggvénynek* nevezzük.

2.22. Következmény (19.70)**.** *A polinomfüggvények mindenütt differenciálhatók. A racionális törtfüggvények differenciálhatók az értelmezési tartományuk minden pontjában.*

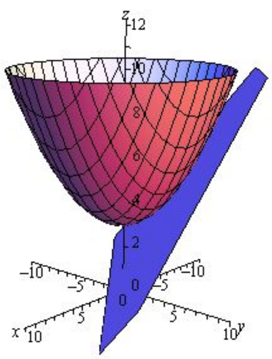
2.23. Definíció (19.72)**.** Legyen $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ és f differenciálható (a,b)-ben. Ekkor az f *függvény* (a,b) *pontbeli érintősíkja* a

$$z = f(a,b) + D_1 f(a,b)\cdot(x-a) + D_2 f(a,b)\cdot(y-b)$$

egyenletű sík. Átrendezve,

$$0 = D_1 f(a,b)\cdot(x-a) + D_2 f(a,b)\cdot(y-b) + (-1)(z - f(a,b)),$$

tehát az érintősík az $\mathbb{R}^3$ tér egy $(a,b,f(a,b))$ ponton átmenő $(D_1 f(a,b), D_2 f(a,b), -1)$ normálvektorú síkja.



2.9. ábra. Az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$ függvény egy érintősíkja

2.24. *Megjegyzés.* A derivált definíciójából adódik, hogy az érintősík „elég közel” van a függvény grafikonjához, hiszen

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x,y) - (f(a,b) + D_1 f(a,b)\cdot(x-a) + D_2 f(a,b)\cdot(y-b))|}{|(x-a, y-b)|} = 0,$$

ahol a számlálóban az $f(x,y)$ és az érintősík megfelelő pontjának távolsága szerepel.

2.2.3. Iránymenti derivált, Lagrange-középértéktétel

2.25. Definíció (19.74)**.** Legyen $v = (v_1, v_2)$ egy egységvektor, vagyis

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1.$$

Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontbeli v irányú *iránymenti deriváltja* létezik, ha

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b) + t\cdot(v_1,v_2)) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a,b)}{t} \in \mathbb{R}.$$

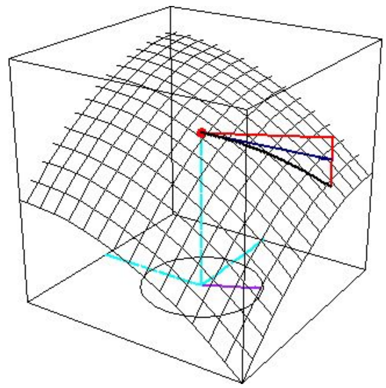
Jelölés: $D_v f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial v}(a,b)$. Itt tulajdonképpen az történik, hogy a $t \mapsto f((a,b) + t\cdot(v_1,v_2))$ egyváltozós függvényt deriváljuk 0-ban.

2.26. *Megjegyzés* (19.76). A parciális deriváltak valójában speciális iránymenti deriváltak:

$$D_1 f(a,b) = D_{(1,0)} f(a,b), \quad D_2 f(a,b) = D_{(0,1)} f(a,b)$$

2.27. Tétel (19.75)**.** *Ha egy* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ *pontban, akkor ebben a pontban létezik minden* $v = (v_1, v_2)$, $|v| = 1$ *irány menti deriváltja* $D_v f(a,b)$, *továbbá*

$$\begin{aligned} D_v f(a,b) &= \langle f'(a,b), v\rangle = \langle (D_1 f(a,b), D_2 f(a,b)), (v_1, v_2)\rangle \\ &= D_1 f(a,b)\cdot v_1 + D_2 f(a,b)\cdot v_2 \end{aligned}$$



2.10. ábra. Iránymenti derivált

Bizonyítás. A bizonyításban az egyszerűség kedvéért (a,b) helyett írjunk a-t, (x,y) helyett pedig x-et. Ekkor a 2.18. Következmény alapján f differenciálhatósága a-ban azt jelenti, hogy létezik olyan ε függvény, melyre

$$f(x) = f(a) + \langle f'(a), x-a\rangle + \varepsilon(x)\cdot |x-a|, \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Írjunk x helyébe $a + t\cdot v$-t! Ekkor

$$f(a+t\cdot v) = f(a) + \langle f'(a), t\cdot v\rangle + \varepsilon(a+t\cdot v)\cdot |t|\cdot |v|.$$

Mivel a skaláris szorzás lineáris, valamint $|v| = 1$, ezért ebből

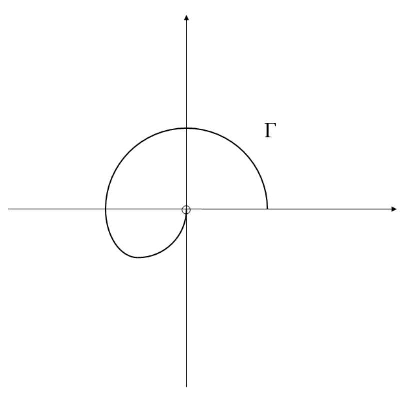
$$\frac{f(a+t\cdot v) - f(a)}{t} = \langle f'(a), v\rangle \pm \varepsilon(a+t\cdot v). \tag{2.10}$$

Elvégezve a $\lim_{t\to 0}$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$D_v f(a) = \langle f'(a), v\rangle.$$

□

2.28. Példa. Olyan függvényre, amelynek minden v irányú deriváltja létezik a (0,0)-ban, de mégcsak nem is folytonos a (0,0)-ban, ld. 2.11. ábra.



2.11. ábra. $f(x,y) = 1$, $(x,y)\in\Gamma$, $\qquad f(x,y) = 0$, $(x,y)\notin\Gamma$.

2.29. Definíció. Legyenek $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ pontok a síkon. Az $[a,b]$ *szakasz* az

$$[a,b] := \{a + t\cdot(b-a) : t\in[0,1]\} = \{(1-t)\cdot a + t\cdot b : t\in[0,1]\}$$

ponthalmaz.

2.30. Tétel (Lagrange-középértéktétel, 19.77)**.** *Legyen az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a,b]$ szakasz pontjaiban, $a,b\in\mathbb{R}^2$. Ekkor*

(a) az $F(t):=f(a+t\cdot(b-a))$, $t\in[0,1]$ függvény differenciálható $[0,1]$-en és

$$F'(t)=\langle f'(a+t\cdot(b-a)),b-a\rangle,\quad t\in[0,1];$$

(b) létezik olyan $c\in[a,b]$ pont, melyre

$$f(b)-f(a)=\langle f'(c),b-a\rangle=D_1f(c)\cdot(b_1-a_1)+D_2f(c)\cdot(b_2-a_2).$$

Bizonyítás. (a) Legyen $t\in[0,1]$ rögzítve. Azt kell belátnunk, hogy

$$\exists\lim_{h\to0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\langle f'(a+t\cdot(b-a)),b-a\rangle.$$

Definíció szerint $F(t+h)=f(a+(t+h)\cdot(b-a))=f(a+t\cdot(b-a)+h\cdot(b-a))$. Jelölje $\tilde a:=a+t\cdot(b-a)$, $v:=b-a$. Ekkor a belátandó állítás

$$\exists\lim_{h\to0}\frac{f(\tilde a+h\cdot v)-f(\tilde a)}{h}=\langle f'(\tilde a),v\rangle,$$

ami adódik a 2.27. Tétel bizonyításában szereplő (2.10) egyenlőségből, az ott látottakkal teljesen analóg módon. (Könnyen meggondolható, hogy a bizonyítás a $|v|=1$ feltétel nélkül is működik.)
(b) Az (a) pont jelölésével $f(b)=F(1)$, $f(a)=F(0)$. Mivel F differenciálható $[0,1]$-en, ezért az egyváltozós Lagrange-középértéktétel szerint létezik $u\in(0,1)$, melyre

$$f(b)-f(a)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=F'(u)=\langle f'(a+u\cdot(b-a)),b-a\rangle$$

az (a) pont alapján. Ebből $c:=a+u\cdot(b-a)\in[a,b]$ jelöléssel következik az állítás. □

2.2.4. $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ eset

Könnyen meggondolható, hogy fentiek hogyan általánosíthatók a p változós esetre.

2.31. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ *(homogén) lineáris függvény*, ha $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$, hogy

$$\ell(x)=\alpha_1\cdot x_1+\dots+\alpha_p\cdot x_p,\quad x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p.$$

(Itt $\alpha_1=\ell(1,0,\dots,0),\dots,\alpha_p=\ell(0,\dots,0,1)$.)

2.32. Definíció (19.61)**.** Legyen $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ függvény, $a=(a_1,\dots,a_p)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az a pontban*, ha létezik olyan $\ell=\ell_a:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-\ell(x-a)}{|x-a|}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)=f(a)+\ell(x-a)+\varepsilon(x)\cdot|x-a|,\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

2.33. Tétel (19.64)**.** *Ha $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ differenciálható a-ban, akkor folytonos is a-ban.*

2.34. Tétel (19.65)**.** *A fenti definícióban*

$$\ell(x)=D_1f(a)\cdot x_1+\dots+D_pf(a)\cdot x_p.$$

2.35. Definíció (19.68)**.** Ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a):=(D_1f(a),\dots,D_pf(a))\in\mathbb{R}^p$ vektort a függvény a-beli *deriváltvektorának* vagy *gradiensének* nevezzük.

2.36. Tétel (19.69)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, és tegyük fel, hogy a $D_1 f, \ldots, D_p f$ parciális deriváltfüggvények mind értelmezve vannak az a pont egy környezetében és* folytonosak *a-ban. Ekkor f differenciálható a-ban.*

2.37. Definíció (19.72)**.** Legyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és f differenciálható a-ban. Ekkor az f *függvény a pontbeli érintő hipersíkja* a

$$x_{p+1} = f(a) + D_1 f(a) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + D_p f(a) \cdot (x_p - a_p)$$

egyenletű hipersík. Átrendezve,

$$0 = D_1 f(a) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + D_p f(a) \cdot (x_p - a_p) + (-1)(x_{p+1} - f(a)),$$

tehát az érintő hipersík az $\mathbb{R}^{p+1}$ tér egy $(a_1, \ldots, a_p, f(a))$ ponton átmenő $(D_1 f(a), \ldots, D_p f(a), -1)$ normálvektorú hipersíkja.

2.38. Definíció (19.74)**.** Legyen $v \in \mathbb{R}^p$ egy egységvektor, vagyis

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_p^2} = 1.$$

Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontbeli v irányú *iránymenti deriváltja* létezik, ha

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Jelölés: $D_v f(a)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Itt tulajdonképpen az történik, hogy a $t \mapsto f(a + t \cdot v)$ egyváltozós függvényt deriváljuk 0-ban.

2.39. Tétel (19.75)**.** *Ha egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor ebben a pontban létezik minden $v \in \mathbb{R}^p$, $|v| = 1$ irány menti deriváltja $D_v f(a)$, továbbá*

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= \langle f'(a), v \rangle = \langle (D_1 f(a), \ldots, D_p f(a)), (v_1, \ldots, v_p) \rangle \\ &= D_1 f(a) \cdot v_1 + \cdots + D_p f(a) \cdot v_p \end{aligned}$$

2.40. Definíció. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^p$ pontok a síkon. Az $[a, b]$ *(általánosított) szakasz* az

$$[a, b] := \{a + t \cdot (b - a) : t \in [0,1]\} = \{(1 - t) \cdot a + t \cdot b : t \in [0,1]\}$$

ponthalmaz.

2.41. Tétel (Lagrange-középértéktétel, 19.77)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a, b]$ szakasz pontjaiban, $a, b \in \mathbb{R}^p$. Ekkor*

(a) az $F(t) := f(a + t \cdot (b - a))$, $t \in [0,1]$ függvény differenciálható $[0,1]$-en és

$$F'(t) = \langle f'(a + t \cdot (b - a)), b - a \rangle, \quad t \in [0,1];$$

(b) létezik olyan $c \in [a, b]$ pont, melyre

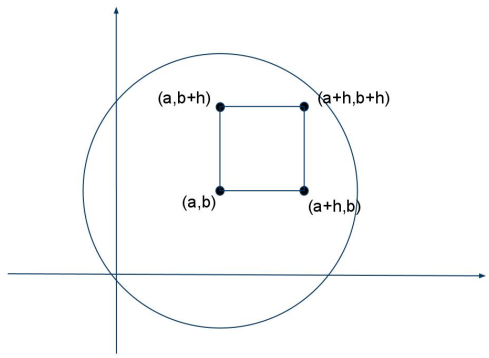
$$f(b) - f(a) = \langle f'(c), b - a \rangle = D_1 f(c) \cdot (b_1 - a_1) + \cdots + D_p f(c) \cdot (b_p - a_p).$$

2.3. A Young-tétel

Az alábbi tétel arról szól, hogy mikor cserélhető fel az egyes változók szerinti deriválás sorrendje.

2.42. Tétel (Young, 19.80)**.** *Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $D_1 f$ és $D_2 f$ parciális deriváltfüggvényei értelmezve vannak az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és* differenciálhatók *az (a, b) pontban, akkor*

$$D_{12} f(a, b) = D_{21} f(a, b).$$



2.12. ábra. Lemma a Young-tételhez

2.43. Lemma (19.81)**.**

1. *Ha a $D_1 f$ parciális deriváltfüggvény értelmezve van az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálható az (a,b) pontban, akkor*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)}{h^2} = D_{21} f(a,b). \tag{2.11}$$

2. *Ha a $D_2 f$ parciális deriváltfüggvény értelmezve van az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálható az (a,b) pontban, akkor*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)}{h^2} = D_{12} f(a,b). \tag{2.12}$$

Bizonyítás. Az 1. pontot bizonyítjuk, a 2. teljesen hasonlóan megy. A differenciálhatóság 2.18. Következménybeli definícióját felírva a D_1 függvényre (a,b)-ben kapjuk, hogy

$$D_1 f(x,y) = D_1 f(a,b) + D_{11} f(a,b) \cdot (x-a) + D_{21} f(a,b) \cdot (y-b) + \varepsilon(x,y) \cdot |(x-a, y-b)|, \tag{2.13}$$

ahol $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$. Rögzített $h > 0$ esetén jelölje

$$u_h(x) := f(x, b+h) - f(x,b) \tag{2.14}$$

egyváltozós függvényt. Ekkor a lemma állításában szereplő kifejezésre

$$f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b) = u_h(a+h) - u_h(a). \tag{2.15}$$

Mivel f az első változója szerint differenciálható (a,b) egy környezetében, ezért kis h esetén $u_h := u$ is differenciálható az a pont egy környezetében. Alkalmazzuk egy ilyen u-ra az egyváltozós Lagrange-középértéktételt $[a, a+h]$-n! Eszerint létezik $\alpha = \alpha(h) \in [a, a+h]$, melyre

$$u(a+h) - u(a) = u'(\alpha) \cdot h = (D_1 f(\alpha, b+h) - D_1 f(\alpha, b)) \cdot h \tag{2.16}$$

az u (2.14) definíciója alapján. Most írjuk fel a (2.13) egyenlőséget (x,y) helyett $(\alpha, b+h)$-ra ill. (α, b)-re! Ebből

$$\begin{aligned} D_1 f(\alpha, b+h) &= D_1 f(a,b) + D_{11} f(a,b) \cdot (\alpha - a) + D_{21} f(a,b) \cdot h + \varepsilon(\alpha, b+h) \cdot |(\alpha - a, h)|; \\ D_1 f(\alpha, b) &= D_1 f(a,b) + D_{11} f(a,b) \cdot (\alpha - a) + D_{21} f(a,b) \cdot 0 + \varepsilon(\alpha, b) \cdot |\alpha - a|. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Összevetve a (2.15), (2.16) és (2.17) egyenlőségeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)}{h^2} &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h^2} = \frac{D_1 f(\alpha, b+h) - D_1 f(\alpha, b)}{h} \\ &= D_{21} f(a,b) + \varepsilon(\alpha, b+h) \cdot \frac{|(\alpha - a, h)|}{h} - \varepsilon(\alpha, b) \cdot \frac{|\alpha - a|}{h}. \end{aligned}$$

Mivel $|\alpha - a| \le h$, ezért az utolsó két tagban a törtek korlátosak, $h \to 0$ esetén $\alpha = \alpha(h) \to a$, így $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$ miatt $\lim_{h\to 0} \varepsilon(\alpha, b+h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(\alpha, b) = 0$. Ebből

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)}{h^2} = D_{21}f(a,b),$$

és ezt kellett belátnunk. □

Bizonyítás. (Young-tételé) Mivel a Young-tétel feltételei alapján a Lemma mindkét pontjának feltétele teljesül, ezért szükségképpen $D_{12}f(a,b) = D_{21}f(a,b)$. □

2.44. Példa. A Young-tétel nem teljesül az alábbi függvényre:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0{,}0), \\ 0, & (x,y) = (0{,}0). \end{cases}$$

2.45. Definíció (18.28)**.** Legyen f differenciálható az $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltfüggvényei differenciálhatók az (a,b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az (a,b) pontban.

A definícióból nyilvánvaló, hogy ha f kétszer differenciálható (a,b)-ben, akkor teljesül rá a Young-tétel.

2.4. A Taylor-polinom

2.46. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a,b) pontbeli 1. *Taylor-polinomja*

$$T^f_{1,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b)$$

az a legfeljebb elsőfokú polinomfüggvény, melynek grafikonja az érintősík.

A (2.5) képlet alapján

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - T^f_{1,(a,b)}(x,y)}{|(x-a, y-b)|} = 0,$$

amit úgy is mondhatunk, hogy az 1. Taylor-polinom *elsőrendben közelíti* f-et, mivel a nevezőben az $(x-a, y-b)$ vektor hosszának első hatványa szerepel.

2.47. Definíció (19.92)**.** Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a,b) pontbeli 2. *Taylor-polinomja*

$$\begin{aligned} T^f_{2,(a,b)}(x,y) &= f(a,b) + D_1f(a,b)\cdot(x-a) + D_2f(a,b)\cdot(y-b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\big(D_{11}f(a,b)\cdot(x-a)^2 + D_{21}f(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b) + D_{12}f(a,b)\cdot(x-a)\cdot(y-b) + D_{22}f(a,b)\cdot(y-b)^2\big) \end{aligned}$$

egy legfeljebb másodfokú polinomfüggvény.

Jelölés. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Jelölje $\mathrm{d}^1 f(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $\mathrm{d}^2 f(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ az alábbi (kétváltozós) függvényeket:

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{d}^1 f(a,b)\big)(x,y) &:= D_1f(a,b)\cdot x + D_2f(a,b)\cdot y; \\ \big(\mathrm{d}^2 f(a,b)\big)(x,y) &:= D_{11}f(a,b)\cdot x^2 + D_{21}f(a,b)\cdot x\cdot y + D_{12}f(a,b)\cdot x\cdot y + D_{22}f(a,b)\cdot y^2 \\ &= D_{11}f(a,b)\cdot x^2 + 2D_{21}f(a,b)\cdot x\cdot y + D_{22}f(a,b)\cdot y^2 \end{aligned}$$

Ezzel a jelöléssel

$$T^f_{2,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + (\mathrm{d}^1 f(a,b))(x-a,y-b) + \frac{1}{2!}(\mathrm{d}^2 f(a,b))(x-a,y-b) \tag{2.18}$$

Ez nagyon hasonlít az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények 2. Taylor-polinomjának alakjához:

$$T^f_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2.$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a 2. Taylor-polinom *másodrendben közelíti* a függvényt.

2.48. Tétel (19.91)**.**

$$T^f_{2,(a,b)}(a,b) = f(a,b), \quad D_i T^f_{2,(a,b)}(a,b) = D_i f(a,b), \quad D_{ij} T^f_{2,(a,b)}(a,b) = D_{ij} f(a,b),\ i,j = 1{,}2.$$

Továbbá, ha p olyan legfeljebb másodfokú polinomfüggvény, melyre a fentiek teljesülnek, akkor $p = T^f_{2,(a,b)}$.

Bizonyítás. A tétel első része egyszerű számolással ellenőrizhető. A második részt nem bizonyítjuk. □

2.49. Tétel (19.97)**.** *Legyen az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a,b)\in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor*

1. $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - T^f_{2,(a,b)}(x,y)}{|(x-a,y-b)|^2} = 0, \tag{2.19}$$

   vagyis $T^f_{2,(a,b)}$ másodrendben közelíti a függvényt.

2. *Ha p olyan legfeljebb másodfokú polinomfüggvény, melyre* (2.19) *teljesül, akkor $p = T^f_{2,(a,b)}$.*

Bizonyítás. Az 1. pontot bizonyítjuk, a 2-t nem. Jelölje $g(x,y) := f(x,y) - T^f_{2,(a,b)}(x,y)$. A 2.48. Tétel szerint

$$g(a,b) = 0,\ D_i g(a,b) = 0,\ D_{ij} g(a,b) = 0, \quad i,j = 1{,}2. \tag{2.20}$$

Mivel f és $T^f_{2,(a,b)}$ differenciálható az (a,b) egy környezetében, így g is. Legyen (x,y) ebből a környezetből, és alkalmazzuk g-re a 2.30. Lagrange-középértéktételt az $[(a,b),(x,y)]$ szakaszon! Eszerint létezik $c = (c_1,c_2) \in$ $\in [(a,b),(x,y)]$, melyre

$$g(x,y) = g(x,y) - g(a,b) = D_1 g(c)\cdot(x-a) + D_2 g(c)\cdot(y-b). \tag{2.21}$$

Mivel f kétszer differenciálható (a,b)-ben, $T^f_{2,(a,b)}$ pedig akárhányszor differenciálható a síkon (hiszen polinom), ezért g is kétszer differenciálható (a,b)-ben. Definíció szerint és (2.20) alapján

$$\begin{aligned}
D_1 g(x,y) &= D_1 g(a,b) + D_{11} g(a,b)\cdot(x-a) + D_{21} g(a,b)\cdot(y-b) + \varepsilon_1(x,y)\cdot|(x-a,y-b)| \\
&= \varepsilon_1(x,y)\cdot|(x-a,y-b)| \\
D_2 g(x,y) &= D_2 g(a,b) + D_{12} g(a,b)\cdot(x-a) + D_{22} g(a,b)\cdot(y-b) + \varepsilon_2(x,y)\cdot|(x-a,y-b)| \\
&= \varepsilon_2(x,y)\cdot|(x-a,y-b)|.
\end{aligned}$$

Ezeket felírva (x,y) helyett $c = (c_1,c_2)$-re kapjuk, hogy

$$D_1 g(c) = \varepsilon_1(c)\cdot|(c_1-a,c_2-b)|, \quad D_2 g(c) = \varepsilon_2(c)\cdot|(c_1-a,c_2-b)|.$$

A kapott kifejezéseket (2.21)-be helyettesítve

$$g(x,y) = \varepsilon_1(c)\cdot|(c_1-a,c_2-b)|\cdot(x-a) + \varepsilon_2(c)\cdot|(c_1-a,c_2-b)|\cdot(y-b).$$

A c pont választása miatt $(x,y)\to(a,b)$ esetén $c = (c_1,c_2)\to(a,b)$. Továbbá, nyilván $|(c_1-a,c_2-b)| \le |(x-$ $-a,y-b)|$, $|x-a| \le |(x-a,y-b)|$ és $|y-b| \le |(x-a,y-b)|$. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - T^f_{2,(a,b)}(x,y)}{|(x-a,y-b)|^2} &= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y)}{|(x-a,y-b)|^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\varepsilon_1(c)\cdot\frac{|(c_1-a,c_2-b)|\cdot(x-a)}{|(x-a,y-b)|^2} + \varepsilon_2(c)\cdot\frac{|(c_1-a,c_2-b)|\cdot(y-b)}{|(x-a,y-b)|^2}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

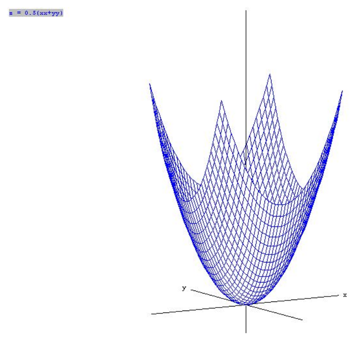
mivel az utolsó két tagban a törtek korlátosak és $\lim_{(x,y)\to(a,b)}\varepsilon_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)}\varepsilon_2(x,y) = 0$. □

2.5. Kétszer differenciálható függvény szélsőértéke, konvexitása

A továbbiakban célunk, hogy - az egyváltozós esethez hasonlóan - elégséges feltételt adjunk kétszer differenciálható függvények lokális szélsőértékének létezésére ill. konvexitására. Ehhez szükségünk lesz a kvadratikus alak fogalmára.

2.50. Definíció. Legyen $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinom. Azt mondjuk, hogy q *kvadratikus alak*, ha

$$q(x, y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2. \tag{2.22}$$

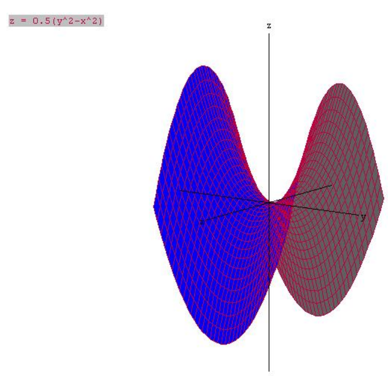


2.13. ábra. Pozitív definit kvadratikus alak, $q(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

2.51. Példa. Kvadratikus alakra: f kétszer differenciálható (a, b)-ben, $q = \mathrm{d}^2 f(a, b)$

$$\left(\mathrm{d}^2 f(a, b)\right)(x, y) = D_{11}f(a, b) \cdot x^2 + D_{21}f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{12}f(a, b) \cdot x \cdot y + D_{22}f(a, b) \cdot y^2. \tag{2.23}$$

2.52. Definíció (19.98)**.** Egy $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak *pozitív ill. negatív definit*, ha minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0{,}0)\}$ esetén $q(x, y) > 0$ ill. $q(x, y) < 0$. A kvadratikus alakot *pozitív ill. negatív szemidefinit*nek hívjuk, ha az előbbiekben egyenlőség is meg van engedve. Egy $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak *indefinit*, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.



2.14. ábra. Indefinit kvadratikus alak, $q(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$

2.53. *Megjegyzés.* A fenti definícióban a feltételek teljesülését elég egy abszolút értékű (hosszú) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektorokra megkövetelni.
Továbbá, lineáris algebrából ismeretes, hogy egy q kvadratikus alak definitsége a (2.22) egyenletben szereplő együtthatókból képezett

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix definitségével egyezik meg. Ha $\det C > 0$ és $c_{11} > 0$, akkor C *pozitív definit*, ha $\det C > 0$ és $c_{11} < 0$, akkor C *negatív definit.* A $c_{21} = c_{12}$ (*szimmetrikus* mátrix) esetben ha $\det C = 0$, akkor C *(pozitív vagy negatív) szemidefinit*, ha $\det C < 0$, akkor C *indefinit.* (Ebben az esetben a $\det C > 0$, $c_{11} = 0$ nem fordulhat elő.)

Az alábbi tétel arról szól, hogy ha egy függvény kétszer differenciálható (a,b)-ben, akkor a $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ kvadratikus alak definitsége hasonló szerepet játszik a lokális szélsőérték létezésében, mint egyváltozós függvények esetén az adott pontbeli második derivált előjele.

2.54. Tétel (Lokális szélsőérték létezése, 19.99)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy $D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0$.*

1. *Ha f-nek (a,b)-ben lokális minimuma ill. maximuma van, akkor a (2.23)-ban definiált $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív ill. negatív szemidefinit.*
2. *Ha a (2.23)-ban definiált $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív ill. negatív definit, akkor f-nek (szigorú) lokális minimuma ill. maximuma van (a,b)-ben.*

Bizonyítás. A bizonyítás elején gondoljuk meg, hogy a q kvadratikus alak (2.22) definíciója alapján tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós számra

$$q(t \cdot x) = t^2 \cdot q(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.24}$$

A bizonyítás során az egyszerűség kedvéért (a,b) helyett a-t, (x,y) helyett pedig x-et írunk. Mindkét pont bizonyítása a (2.19) Taylor-formulán alapul, mely a (2.18) jelölés valamint a $D_1 f(a,b) = D_2 f(a,b) = 0$ feltétel felhasználásával az alábbi alakot ölti:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)}{|x-a|^2} = 0. \tag{2.25}$$

Mindkét pontban a lokális minimum esetét bizonyítjuk, a lokális maximum esete hasonlóan megy.
1. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathrm{d}^2 f(a)$ nem pozitív szemidefinit, tehát található olyan $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $|x_0| = 1$ vektor, melyre $\mathrm{d}^2 f(a)(x_0) < 0$. Legyen

$$\varepsilon := -\frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2} > 0.$$

A (2.25) határérték alapján ε-hoz létezik $\delta_1 > 0$, hogy ha $0 < |x-a| < \delta_1$, akkor

$$\frac{\left|f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)\right|}{|x-a|^2} < \varepsilon = -\frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2}. \tag{2.26}$$

Másrészt, mivel f-nek a-ban lokális minimuma van, ezért létezik olyan $\delta_2 > 0$, hogy ha $|x-a| < \delta_2$, akkor $f(x) \geq$ $\geq f(a)$. Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ és $0 < t < \delta$ tetszőleges. Ekkor az $x := a + t \cdot x_0$ pontra $|x-a| = t < \delta$ teljesül. Erre felírva (2.26)-ot kapjuk, hogy

$$\left|f(a + t \cdot x_0) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(t \cdot x_0)\right| < -\frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2} \cdot t^2.$$

Ebből, felhasználva (2.24)-et,

$$f(a + t \cdot x_0) - f(a) < t^2 \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x_0) - \frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2} \cdot t^2 = 0,$$

ami ellentmond $f(a + t \cdot x_0) \geq f(a)$-nak.

2. Tegyük fel, hogy a $\mathrm{d}^2 f(a)$ kvadratikus alak pozitív definit. Mivel $\mathrm{d}^2 f(a)$ egy (kétváltozós) polinom, így folytonos az egész síkon, ezért az (általánosított) Weierstrass-tétel szerint az

$$S := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\right\}$$

kompakt halmazon van minimuma – ez legyen $m := \min_S \mathrm{d}^2 f(a) > 0$, a feltétel alapján. A (2.25) határérték alapján $\varepsilon := \frac{m}{2}$-höz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor

$$\frac{\left|f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)\right|}{|x-a|^2} < \varepsilon = \frac{m}{2},$$

amiből

$$-f(x)+f(a)<\frac{m}{2}\cdot|x-a|^2-\frac{1}{2}\mathrm{d}^2f(a)(x-a).$$

A (2.24) felhasználásával, m definíciója szerint

$$\mathrm{d}^2f(a)(x-a)=|x-a|^2\cdot\mathrm{d}^2f(a)\left(\frac{x-a}{|x-a|}\right)\geq m\cdot|x-a|^2.$$

Így

$$-f(x)+f(a)<\frac{m}{2}\cdot|x-a|^2-\frac{1}{2}\mathrm{d}^2f(a)(x-a)\leq\frac{m}{2}\cdot|x-a|^2-\frac{1}{2}m\cdot|x-a|^2=0,$$

vagyis ha $0<|x-a|<\delta$, akkor $f(a)<f(x)$, tehát f-nek szigorú lokális minimuma van a-ban. □

2.55. *Megjegyzés.* A 2.53. Megjegyzés alapján $\mathrm{d}^2f(a,b)$ definitsége eldönthető a

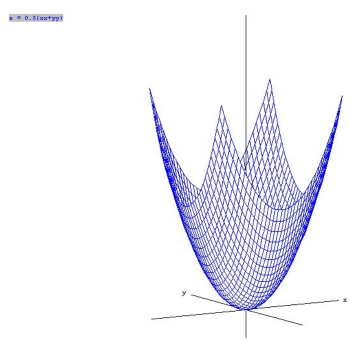
$$\begin{pmatrix} D_{11}f(a,b) & D_{21}f(a,b) \\ D_{12}f(a,b) & D_{22}f(a,b) \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

(a feltételek alapján szimmetrikus) mátrix definitsége alapján.

2.56. *Megjegyzés.* A fenti tétel egyik állítása sem megfordítható! (Ld. egyváltozós eset.)

Térjünk most rá a konvexitásra!

2.57. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $G\subset\mathbb{R}^2$ halmaz *konvex*, ha minden olyan szakaszt tartalmaz, melynek végpontjai G-ben vannak.



2.15. ábra. Kétváltozós konvex függvény, $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

2.58. Definíció (19.101)**.** Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény *konvex (konkáv)* a $G\subset\mathcal{D}(f)$ konvex halmazon, ha minden $x_1,x_2\in G$ esetén az egyváltozós $t\mapsto f((1-t)x_1+tx_2)$ függvény konvex (konkáv) [0,1]-en, vagyis minden $x_1,x_2\in G$ esetén

$$f((1-t)x_1+tx_2)\leq(\geq)(1-t)f(x_1)+tf(x_2),\quad\forall t\in[0,1]$$

2.59. Tétel (19.103)**.** *Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható a $G\subset\mathcal{D}(f)$ konvex nyílt halmazon. Az f függvény akkor és csak akkor konvex (konkáv) G-n, ha minden $(a,b)\in G$ esetén a $\mathrm{d}^2f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk – a 2.54. Tétel bizonyításában használt technikák felhasználásával igazolható. □

2.6. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eset

Az eddigiekben tárgyaltak megfelelően általánosíthatók $\mathbb{R}^2$ helyett $\mathbb{R}^p$-re ($p \geq 2$).

2.60. Definíció (19.85)**.** Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontbeli k-adrendű parciális deriváltjai,* $D_{i_1 \dots i_k} f(a)$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq p$ ($k \geq 2$) úgy kaphatók, hogy a $k-1$-edrendű parciális deriváltfüggvényeket: $D_{i_1 \dots i_{k-1}} f$, $1 \leq$ $\leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq p$ deriváljuk valamelyik változó szerint a-ban.

Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény a pontbeli kétszeres differenciálhatóságát ugyanúgy definiáljuk, mint $p = 2$ esetben (differenciálható a egy környezetében, és minden parciális deriváltja differenciálható a-ban.)

2.61. Tétel (Young-tétel, 19.84)**.** *Ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor*

$$D_{ij} f(a) = D_{ji} f(a), \quad i, j = 1, \dots, p.$$

2.62. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Az

$$f''(a) := \begin{pmatrix} D_{11} f(a) & D_{21} f(a) & \dots & D_{p1} f(a) \\ D_{12} f(a) & D_{22} f(a) & \dots & D_{p2} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1p} f(a) & D_{2p} f(a) & \dots & D_{pp} f(a) \end{pmatrix}$$

$p \times p$ mátrix neve *Hesse-mátrix.*

Az (általánosított) Young-tétel alapján a Hesse-mátrix szimmetrikus. A (2.27) képletben szereplő mátrix egy $f :$ $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény Hesse-mátrixa. Az előző alfejezet alapján a Hesse-mátrix definitségéből következtethetünk lokális szélsőérték létezésére, illetve a függvény konvexitására/konkávitására. Ezek a tételek is megfelelő módon általánosíthatók p változós függvényekre.

A következőkben a Taylor-polinommal kapcsolatban tanultak általánosításáról lesz szó.

2.63. Definíció (19.86)**.** Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy *k-szor differenciálható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ ($k \geq 3$) pontban, ha $k-1$-szer differenciálható az a pont egy környezetében, továbbá minden $k-1$-edrendű parciális deriváltja differenciálható a-ban.

2.64. Definíció (19.92)**.** Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható a-ban. Ekkor az f *a pont körüli n. Taylor-polinomja*

$$\begin{aligned} T^f_{n,a}(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^{p} D_i f(a) \cdot (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{p} D_{i_1 i_2} f(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n = 1}^{p} D_{i_1 \cdots i_n} f(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \cdot (x_{i_n} - a_{i_n}) \end{aligned}$$

($x \in \mathbb{R}^p$) legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény. Bevezetve a

$$(\mathrm{d}^k f(a))(x) := \sum_{i_1, \dots i_k = 1}^{p} D_{i_1 \cdots i_k} f(a) \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

jelölést, a Taylor-polinom az alábbi alakba írható:

$$T^f_{n,a}(x) = f(a) + (\mathrm{d}^1 f(a))(x-a) + \frac{1}{2!} (\mathrm{d}^2 f(a))(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} (\mathrm{d}^n f(a))(x-a).$$

2.65. Tétel (Taylor-fomula Lagrange-maradéktaggal, 19.95)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $n+1$-szer differenciálható az $[a, x]$ szakasz pontjaiban, $a, x \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Ekkor van olyan $c \in [a, x]$ pont, melyre*

$$f(x) = T^f_{n,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!} (\mathrm{d}^{n+1} f(c))(x-a).$$

Ennek segítségével igazolható az alábbi általános tétel, mely szerint f n-dik Taylor-polinom n-edrendben közelíti f-et.

2.66. Tétel (19.97)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor*

1.
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{|x-a|^n} = 0,$$

vagyis $T^f_{n,a}$ n-edrendben közelíti a függvényt.

2. *Ha p olyan legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény, melyre* (2.19) *teljesül, akkor $p = T^f_{n,a}$.*

Harmadik fejezet

Többváltozós differenciálszámítás II.

3.1. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálhatósága

3.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $i \in \{1, \dots, q\}$. Az f függvény *i-dik koordinátafüggvénye*

$$f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad f_i(x) = [f(x)]_i, \quad x \in \mathcal{D}(f),$$

ahol $[f(x)]_i \in \mathbb{R}$ jelöli az $f(x) \in \mathbb{R}^q$ vektor i-dik koordinátáját.

3.2. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *lineáris leképezés*, ha $\ell(x+y) = \ell(x)+\ell(y)$ és $\ell(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \ell(x)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.
Ismeretes, hogy ha az $\mathbb{R}^p$ és $\mathbb{R}^q$ vektortereket a szokásos bázissal látjuk el, akkor minden ℓ lineáris leképezéshez *egyértelműen* hozzárendelhető egy $A = (a_{ij})_{q \times p}$ $q \times p$ mátrix, melyre $\ell(x) = A \cdot x$ minden $x \in \mathbb{R}^p$-re, tehát A-t a továbbiakban azonosíthatjuk ℓ-el. Az A mátrix i. sorában éppen az $A_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $A_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p$, $x \in \mathbb{R}^p$ i-dik koordinátafüggvény (egy lineáris függvény) együtthatói állnak. Az A mátrix j-dik oszlopában pedig éppen az $A(e_j) \in \mathbb{R}^q$, $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^p$ j-dik bázisvektor képének koordinátái állnak.

3.3. Definíció (20.11)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az a pontban*, ha létezik olyan $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés (azaz, $q \times p$ mátrix), melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_{\mathbb{R}^q} \tag{3.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x) \cdot |x-a|, \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0_{\mathbb{R}^q} \tag{3.2}$$

3.4. Tétel (20.13)**.** *Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, ha f minden f_i ($i \in \{1, \dots, q\}$) koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. Ekkor a (3.1)-ben szereplő A $q \times p$ mátrixban $a_{ij} = D_j f_i(a)$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, vagyis*

$$A = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \dots & D_p f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \dots & D_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_q(a) & D_2 f_q(a) & \dots & D_p f_q(a) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Bizonyítás. Világos, hogy a (3.1)-ben

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_{\mathbb{R}^q} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f_i(x) - f_i(a) - A_i(x-a)}{|x-a|} = 0 \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, q.$$

Mivel A linearitása esetén A_i lineáris, ill. megfordítva, ha A_i lineáris minden i-re, akkor a belőlük mint koordinátafüggvényekből képezett A függvény is lineáris, a tétel első részét a 2.32. Definíció alapján beláttuk.
Szintén a fenti ekvivalencia alapján kapjuk, hogy a mátrix alakja szükségképpen (3.3), hiszen a 2.34. Tétel szerint az egyes A_i koordinátafüggvényeket meghatározó együtthatók éppen $(D_1 f_i(a), \dots, D_p f_i(a))$. □

3.5. Következmény (20.14)**.** *Ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor a (3.1)-ben szereplő A mátrix egyértelmű,* (3.3) *alakú, és neve: f a pontbeli* Jacobi-mátrixa. *Jelölés: $A = f'(a)$.*

3.6. Tétel (20.16)**.**

1. *Ha f differenciálható a-ban, akkor f folytonos a-ban.*

2. *Ha minden $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, p$, esetén a $D_j f_i$ parciális deriváltfüggvények léteznek a egy környezetében és folytonosak a-ban, akkor f differenciálható a-ban.*

Bizonyítás. 1. A 3.4. Tétel szerint minden f_i koordinátafüggvény differenciálható a-ban, így a 2.33. Tétel alapján folytonos is a-ban. Könnyen látható, hogy ekkor f folytonos a-ban.
2. A 2.36. Tételből következik, hogy minden f_i koordinátafüggvény differenciálható a-ban, így a 3.4. Tétel alapján nyerjük az állítást. □

3.2. Differenciálási szabályok

A következő állítás annak az általánosítása, hogy egyváltozós esetben a lineáris ($a{\cdot}\mathrm{id}$) függvények deriváltja konstans.

3.7. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ egy lineáris leképezés, a hozzá tartozó mátrix A, akkor f minden $x \in \mathbb{R}^p$ pontban differenciálható, és $f'(x) = A$, $x \in \mathbb{R}^p$.*

Bizonyítás. Egyszerűen következik abból, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = \lim_{x\to a} \frac{A(x) - A(a) - A(x-a)}{|x-a|} = \lim_{x\to a} \frac{0}{|x-a|} = 0_{\mathbb{R}^q}.$$

□

3.8. Tétel (20.19)**.** *Ha az $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálhatók az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f) \cap \operatorname{int} \mathcal{D}(g)$ pontban, akkor $f + g$ és $\lambda \cdot f$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető a differenciálhatóság definíciójából. □

3.9. Tétel (Kompozíciófüggvény differenciálhatósága, 20.20)**.** *Legyen $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(g)$ pontban, $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ differenciálható az $g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $f \circ g$ differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \circ g)$ pontban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A jobb oldalon egy $s \times q$ és egy $q \times p$ mátrix $s \times p$ szorzata áll, ami a megfelelő lineáris leképezések kompozíciójával azonosítható.

3.10. Lemma. *Minden $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezéshez található olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre*

$$|A(x) - A(y)| = |A(x-y)| \le K \cdot |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Bizonyítás. Pl. $K = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ megfelelő – ld. lineáris algebra ill. előző félév. □

Bizonyítás. (Tételé) A bizonyítás teljesen az egyváltozós eset analógjára történik. Jelölje $A := g'(a)$, $B := f'(g(a))$. Ekkor a differenciálhatóság (3.2) definíciója alapján léteznek olyan ε és η függvények, hogy

$$g(x) = g(a) + A(x-a) + \varepsilon(x) \cdot |x-a|, \tag{3.4}$$

$$f(y) = f(g(a)) + B(y - g(a)) + \eta(y) \cdot |y - g(a)|, \tag{3.5}$$

és $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$, $\lim_{y\to g(a)}\eta(y)=\eta(g(a))=0$ (η folytonossága is feltehető). Mivel g differenciálható, ezért folytonos is a-ban, így létezik olyan $\delta>0$, hogy ha $|x-a|<\delta$, akkor $g(x)\in\mathcal{D}(f)$ (itt kihasználtuk, hogy $g(a)\in\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$), tehát $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f\circ g)$ teljesül. Ilyen x-ekre tehát $y=g(x)$ helyettesíthető (3.5)-be, tehát felhasználva (3.4)-et, kapjuk

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(a))+B\left(A(x-a)+\varepsilon(x)\cdot|x-a|\right)+\eta(g(x))\cdot|g(x)-g(a)| \\ &= f(g(a))+(B\circ A)(x-a)+B(\varepsilon(x))\cdot|x-a|+\eta(g(x))\cdot|A(x-a)+\varepsilon(x)\cdot|x-a||, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk a B linearitását. Ahhoz, hogy $\exists(f\circ g)'(a)=B\circ A$ elég belátni, hogy

$$r(x):=B(\varepsilon(x))\cdot|x-a|+\eta(g(x))\cdot|A(x-a)+\varepsilon(x)\cdot|x-a||$$

jelöléssel létezik olyan θ függvény, melyre

$$|r(x)|\le\theta(x)\cdot|x-a| \text{ és } \lim_{x\to a}\theta(x)=0.$$

A 3.10. Lemma alapján létezik olyan $K>0$, melyre $|A(x-a)|\le K\cdot|x-a|$, így

$$|r(x)|\le(|B(\varepsilon(x))|+|\eta(g(x))|\cdot(K+|\varepsilon(x)|))\cdot|x-a|:=\theta(x)\cdot|x-a|.$$

Ha $x\to a$, akkor $\varepsilon(x)\to 0$, és mivel B lineáris, így folytonos is, ezért $B(\varepsilon(x))\to B(0)=0$. Felhasználva g folytonosságát a-ban és a $\lim_{y\to g(a)}\eta(y)=\eta(g(a))=0$-t kapjuk, hogy $\lim_{x\to a}\eta(g(x))=0$. Ebből $\lim_{x\to a}\theta(x)=0$ következik, és ezt akartuk belátni. □

3.11. Következmény (20.23)**.** *Legyen $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ differenciálható az $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, $f:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}$ ($s==1$ eset) differenciálható a $g(a)\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $F=f\circ g$ (ahol $F(x)=f(g_1(x),\dots,g_q(x))$, $x\in\mathcal{D}(f\circ g)$) differenciálható a-ban, és minden $j=1,\dots,p$ esetén*

$$D_jF(a)=\sum_{i=1}^{q}(D_if)(g(a))\cdot D_jg_i(a).$$

Ez a képlet könnyebben megjegyezhető, ha f változóit $y_1,\dots,y_q$-val jelöljük, és $g_1,\dots,g_q$ helyett is $y_1,\dots,y_q$-t írunk. Ezzel a jelöléssel a fenti képlet:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\dots+\frac{\partial f}{\partial y_q}\cdot\frac{\partial y_q}{\partial x_j}$$

szokás láncszabály*nak is nevezni.*

3.12. Következmény (20.25)**.** *Ha $f,g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ ($q=1$) függvények differenciálhatók az $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)\cap\operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, akkor $f\cdot g$ és $g(a)\neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ban.*

Bizonyítás. Jelölje $T:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^2$, $T(x):=(f(x),g(x))$, valamint legyen $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\varphi(x,y):=x\cdot y$. Világos, hogy $f\cdot g=\varphi\circ T$. Mivel T koordinátafüggvényei f és g differenciálhatók a-ban, így a 3.4. Tétel szerint T is az. φ differenciálhatósága következik abból, hogy polinom. Ezért a 3.9. Tétel alapján $f\cdot g$ is differenciálható.
Az $\frac{f}{g}$ esetén $\varphi(x,y):=\frac{x}{y}$-t kell választani, amely racionális törtfüggvény lévén az $y\neq 0$ halmazon differenciálható. Az állítás az előbbihez hasonlóan adódik. □

A következő tétel annak az egyváltozós differenciálszámításból ismert állításnak az általánosítása, hogy ha egy invertálható, folytonos f függvény esetén $\exists f'(a)\neq 0$, akkor $\exists(f^{-1})'(f(a))=1/f'(a)$.

3.13. Tétel (Inverzfüggvény differenciálhatósága, 20.26)**.** *Legyen $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ differenciálható az $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, és legyen az $f'(a)$ ($p\times p$) mátrix invertálható. Tegyük fel, hogy létezik olyan $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ folytonos függvény, mely $f(a)$ egy környezetében van értelmezve, és ott $f(g(x))=x$, $g(f(a))=a$. Ekkor g differenciálható $f(a)$-ban, és*

$$g'(f(a))=[f'(a)]^{-1}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $a = f(a) = 0$ (a továbbiakban az egyszerűség kedvéért $0_{\mathbb{R}^p}$ helyett 0-t írunk). Ugyanis, ha ez nem így volna, akkor f helyett a $\tilde{f}(x) := f(x+a) - f(a)$ függvényt tekintve, a bizonyítás $\tilde{f}$-re érvényes, és ebből egyszerűen meggondolható f-re is.
Ezután két lépésben járunk el.
I. Tegyük fel, hogy $f'(0) = I$ az $\mathbb{R}^p$ identitás-leképezése. Azt kell belátnunk, hogy ha a 0 egy környezetében $f(g(x)) = x$, g folytonos, akkor $\exists g'(0) = I$. Az f 0 pontbeli differenciálhatósága és $f(0) = 0$ alapján

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - I(x-0)}{|x-0|} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x}{|x|} = 0.$$

Mivel $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$ és $g \neq 0$ a 0 egy kipontozott környezetében ($f(g(x)) = x$ miatt), ezért a fenti határértékben a kompozíciófüggvény határértékéről szóló tétel szerint írhatunk x helyett $g(x)$-et, vagyis

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(g(x)) - g(x)}{|g(x)|} = \lim_{x\to 0} \frac{x - g(x)}{|g(x)|} = 0. \tag{3.6}$$

Ahhoz, hogy a $\exists g'(0) = I$ állítást belássuk, az kell, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0) - I(x-0)}{|x-0|} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - x}{|x|} = 0. \tag{3.7}$$

Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy a 0 egy kipontozott környezetében

$$\frac{g(x) - x}{|x|} = \frac{g(x) - x}{|g(x)|} \cdot \frac{|g(x)|}{|x|}.$$

Felhasználva a (3.6) határértéket, elég belátni, hogy a 0 egy elég kicsi kipontozott környezetében $\frac{|g(x)|}{|x|}$ korlátos. A (3.6) határérték alapján, $\varepsilon = 1/2$-hez létezik olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x| < \delta$ esetén

$$\frac{|g(x) - x|}{|g(x)|} < \frac{1}{2},$$

amiből

$$|g(x)| \leq |g(x) - x| + |x| < \frac{1}{2}|g(x)| + |x| \Rightarrow \frac{|g(x)|}{|x|} < \frac{1}{2}\frac{|g(x)|}{|x|} + 1,$$

így $0 < |x| < \delta$ esetén $\frac{|g(x)|}{|x|} < 2$. Ezzel a kívánt (3.7) határértéket beláttuk, így $\exists g'(0) = I$.
II. Ha $f'(0) = A$ egy tetszőleges invertálható mátrix, akkor definiálja $\tilde{f} := A^{-1} \circ f$. A 3.9. Tétel és a 3.7. Állítás alapján

$$\tilde{f}'(0) = (A^{-1})'(f(0)) \cdot f'(0) = A^{-1} \cdot A = I.$$

Ezért $\tilde{f}$-ra alkalmazható az I. rész bizonyítása a $\tilde{g} := g \circ A$ függvénnyel, hiszen

$$\tilde{f}(\tilde{g}(x)) = A^{-1}(f(g(Ax))) = A^{-1}(Ax) = x.$$

Így kapjuk, szintén a 3.9. Tétel és a 3.7. Állítás alapján,

$$I = \tilde{g}'(0) = (g \circ A)'(0) = g'(A(0)) \cdot A'(0) = g'(0) \cdot A.$$

Ebből $g'(0) = A^{-1}$ következik. □

Térjünk most vissza egy tétel erejéig a többváltozós integrálszámításhoz! A Jacobi-mátrix segítségével általánosíthatjuk az egyváltozós helyettesítéses integrálásról tanultakat.

3.14. Definíció (20.31). Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvénye *folytonosan differenciálható* az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, ha f differenciálható az a pont egy környezetében, és koordinátafüggvényeinek parciális deriváltjai folytonosak a-ban.

3.15. Tétel (Integráltranszformáció, 22.23)**.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető halmaz, $g : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható és injektív* $\operatorname{int} H$*-ban. Ekkor $g(H)$ is mérhető, és ha $f : g(H) \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor*

$$\int_{g(H)} f = \int_H (f \circ g) \cdot |\det g'|$$

(az egyik oldal pontosan akkor létezik, ha a másik, és ekkor egyenlők).

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

3.16. Példa. Legyen $g(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $(r, \varphi) \in H$ az ún. *polártranszformáció*. Ekkor

$$\begin{aligned} \det g' &= \left| \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r. \end{aligned}$$

Negyedik fejezet

Implicit és inverz függvények

4.1. Egyváltozós implicitfüggvény-tétel, Lagrange-multiplikátorok

Probléma. Az $f(x, y) = 0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e az y az x segítségével? Vagyis: van-e olyan φ függvény, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0\ \forall x \in D(\varphi)$?

4.1. Példa.

$$f_1(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$

Világos, hogy csak $x = 1$ és $y = 2$ esetén teljesül.

$$f_2(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

Könnyen látható, hogy a

$$\varphi_1 : [0,2] \to [2,3], \quad \varphi_1(x) = \sqrt{2x - x^2} + 2$$

és

$$\varphi_2 : [0,2] \to [1,2], \quad \varphi_2(x) = -\sqrt{2x - x^2} + 2$$

függvényre is igaz, hogy $f_2(x, \varphi_1(x)) = 0\ \forall x \in D(\varphi_1)$ és $f_2(x, \varphi_2(x)) = 0\ \forall x \in D(\varphi_2)$.

4.2. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel, 20.28)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $f(a, b) = 0$, $(a, b) \in \in \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy f folytonos az (a, b) pont egy környezetében és $\exists D_2 f \neq 0$ ebben a környezetben. Ekkor létezik a-nak ill. b-nek olyan $K(a) \subset \mathbb{R}$ ill. $K(b) \subset \mathbb{R}$ környezete, hogy*

1. *Minden $x \in K(a)$ esetén $\exists!\, \varphi(x) \in K(b)$, melyre*

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$

2. *A $\varphi : K(a) \to K(b)$ függvény folytonos $K(a)$-n, $\varphi(a) = b$.*

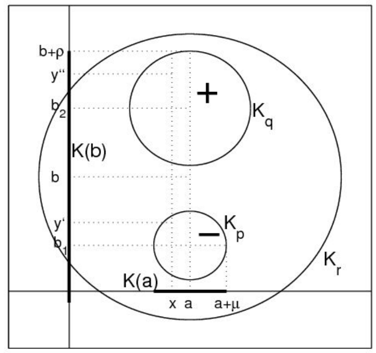
3. *Ha f folytonosan differenciálható (a, b)-ben, akkor φ differenciálható is az a pontban, és*

$$\varphi'(a) = -\frac{D_1 f(a, b)}{D_2 f(a, b)}.$$

Megjegyezzük, hogy a tétel csak a φ implicit függvény létezéséről szól, általában nem tudjuk ezt a függvényt előállítani. Ennek ellenére a φ deriváltját ki tudjuk számítani az a pontban…!

Bizonyítás. A tételnek az 1. részét bizonyítjuk abban az esetben, mikor f folytonosan differenciálható (a, b)-ben. Ekkor a $D_2 f$ parciális deriváltfüggvény is folytonos (a, b)-ben, és $D_2 f(a, b) \neq 0$. Legyen például $D_2 f(a, b) > 0$ (a $D_2 f(a, b) < 0$ eset hasonlóan meggondolható). Ekkor $D_2 f$ folytonossága miatt létezik az $(a, b) \in D(f)$ pontnak olyan $r > 0$ sugarú $K_{\mathrm{r}}(a, b) \subset D(f)$ környezete, hogy

$$\forall (x, y) \in K_{\mathrm{r}}(a, b) \text{ esetén } D_2 f(x, y) > 0. \tag{4.1}$$



4.1. ábra. Implicitfüggvény-tétel

Tekintsük az

$$f_a : y \mapsto f(a, y)$$

függvényt! Mivel

$$f_a(b) = f(a, b) = 0, \text{ és } (f_a)'(b) = D_2 f(a, b) > 0,$$

ezért f_a lokálisan növő b-ben, így léteznek olyan $b_1 < b < b_2$ számok, hogy

$$f(a, b_1) = f_a(b_1) < 0 < f_a(b_2) = f(a, b_2),$$

és feltehető, hogy $(a, b_1), (a, b_2) \in K_\mathrm{r}(a, b)$. Az f függvény folytonossága miatt van olyan $p > 0$ és $q > 0$, hogy

$$\forall (x', y') \in K_\mathrm{p}(a, b_1) \text{ és } \forall (x'', y'') \in K_\mathrm{q}(a, b_2) \text{ esetén } f(x', y') < 0 < f(x'', y''). \tag{4.2}$$

A p és q elegendően kicsire választásával feltehető, hogy

$$K_\mathrm{p}(a, b_1) \subset K_\mathrm{r}(a, b),\ K_\mathrm{q}(a, b_2) \subset K_\mathrm{r}(a, b).$$

Legyen

$$\mu := \min\{\mathrm{p}, \mathrm{q}\}, \text{ és } K(a) := (a - \mu, a + \mu),$$

vagyis $K(a)$ tartalmazza K_p és K_q közül a kisebb sugarú (az ábrán K_p) vetületét az x-tengelyen. Legyen

$$\rho := \max\{b - (b_1 - \mathrm{p}), b_2 + \mathrm{q} - b\}, \text{ és } K(b) := (b - \rho, b + \rho),$$

vagyis $K(b)$ tartalmazza K_p és K_q közül a nagyobb sugarú (az ábrán K_q) vetületét az y-tengelyen.

Rögzítsünk most egy tetszőleges $x \in K(a)$ pontot, definiálni fogjuk hozzá a megfelelő $\varphi(x) \in K(b)$ értéket. Jelölje

$$f_x : y \mapsto f(x, y),$$

mely f folytonossága következtében egy valós változós folytonos függvény.
A (4.2) alapján

$$f(x, b_1) = f_x(b_1) < 0 < f_x(b_2) = f(x, b_2),$$

mivel $x \in K(a)$ miatt $(x, b_1) \in K_\mathrm{p}(a, b_1)$ és $(x, b_2) \in K_\mathrm{q}(a, b_2)$. Alkalmazva f_x-re a Bolzano-tételt $[b_1, b_2]$-n, létezik olyan $y \in (b_1, b_2)$, amelyre

$$f_x(y) = f(x, y) = 0.$$

Csak egyetlen ilyen y létezik, ugyanis, ha $y^* \neq y$ is olyan lenne, hogy

$$f_x(y^*) = f(x, y^*) = 0,$$

akkor f_x-re alkalmazva a Rolle-tételt $[y, y^*]$-on (vagy $[y^*, y]$-on), létezne olyan c az y és y^* között, hogy

$$(f_x)'(c) = D_2 f(x, c) = 0$$

lenne. Ez pedig lehetetlen, hiszen $(x, c) \in K_{\mathrm{r}}(a, b)$, és (4.1) miatt $D_2 f(x, c) > 0$ kellene legyen.

Tehát bármely $x \in K(a)$ számhoz egyértelműen rendelhető olyan $y \in K(b)$ szám, hogy $f(x, y) = 0$, azaz létezik olyan

$$\varphi : K(a) \to K(b),\ \varphi(x) := y$$

függvény, hogy

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \ \ \forall x \in K(a).$$

Az egyértelműség miatt $\varphi(a) = b$ is teljesül.

□

4.3. Példa. A fenti tétel feltételeinek szükségessége könnyen látható az alábbi egyszerű példán. Legyen

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1.$$

Világos, hogy az $f(x, y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok az (origó középpontú) egységkörvonal pontjai. Vegyünk egy (a, b) (egységkörvonalon lévő) pontot, melyre $f(a, b) = 0$! Ha $a \in (-1{,}1)$, $b > 0$ (vagyis (a, b) a felső félsíkban fekvő köríven van), akkor $D_2 f(a, b) = 2b > 0$, és az implicitfüggvény-tétel alapján egyértelműen létező $\varphi : K(a) \to K(b)$ függvényre

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ha $a \in (-1{,}1)$, $b < 0$ (vagyis (a, b) a alsó félsíkban fekvő köríven van), akkor $D_2 f(a, b) = 2b < 0$, és az implicitfüggvény-tétel alapján egyértelműen létező $\varphi : K(a) \to K(b)$ függvényre

$$\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Mi a helyzet, ha $a = \pm 1$ és $b = 0$? Világos, hogy nem tudunk olyan $K(a)$ és $K(b)$ környezeteket megadni, melyekre $x \in K(a)$ és $y \in K(b)$ esetén az $f(x, y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok egy függvény grafikonját alkotnák. Tehát nem létezik a kívánt φ függvény. Egy ilyen pontban $D_2 f(a, b) = 2b = 0$, tehát az implicitfüggvény-tétel feltétele nem teljesül.

A következőkben ún. feltételi halmazokon keresünk szélsőértéket.

4.4. Definíció. Legyenek $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $(q < p)$ függvények, továbbá

$$H := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_q(x) = 0\}.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0,\ \ldots,\ g_q = 0$ feltétel mellett *feltételes szélsőértéke* van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f_{|H}$ függvénynek lokális szélsőértéke van.

4.5. Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer, 20.43)**.** *Legyenek $f, g_1, g_2,\ \ldots,\ g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, $q < p$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0$,..., $g_q = 0$ feltétel mellett feltételes szélsőértéke van az $a \in \mathcal{D}(f)$ pontban. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} D_1 g_1(a) & D_2 g_1(a) & \ldots & D_p g_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 g_q(a) & D_2 g_q(a) & \ldots & D_p g_q(a) \end{pmatrix} = q.$$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ számok, hogy az

$$F := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_q g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

függvényre $F'(a) = 0_{\mathbb{R}^p}$ – vagyis, az $f'(a), g_1'(a), \ldots, g_q'(a)$ vektorok lineárisan összefüggők. Tehát

$$\begin{aligned} D_1 f(a) + \lambda_1 D_1 g_1(a) + \cdots + \lambda_q D_1 g_q(a) &= 0 \\ D_2 f(a) + \lambda_1 D_2 g_1(a) + \cdots + \lambda_q D_2 g_q(a) &= 0 \\ &\vdots \\ D_p f(a) + \lambda_1 D_p g_1(a) + \cdots + \lambda_q D_p g_q(a) &= 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítást $p = 2$, $q = 1$ és feltételes minimum esetén végezzük el (a feltételes maximum esete hasonlóan gondolható meg), az a helyett pedig (a, b)-t írunk.
A feltételek alapján a $g := g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és az (a, b) pontban $g(a, b) = 0$. Ebben a pontban a rangfeltétel

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} D_1g(a,b), & D_2g(a,b) \end{pmatrix} = 1$$

azt jelenti, hogy például $D_2g(a, b) \neq 0$. Ekkor a 4.2. Egyváltozós implicitfüggvény-tétel szerint létezik a-nak $K(a)$ és b-nek $K(b)$ környezete, és létezik olyan $\varphi : K(a) \to K(b)$ differenciálható függvény, amelyre

$$\forall x \in K(a) \text{ esetén } g(x, \varphi(x)) = 0,$$

és $\varphi(a) = b$. Ez azt jelenti, hogy a

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} \supset \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in K(a)\} =: H^*. \tag{4.3}$$

Továbbá

$$\varphi'(a) = -\frac{D_1g(a, b)}{D_2g(a, b)},$$

azaz

$$D_1g(a, b) + \varphi'(a)D_2g(a, b) = 0. \tag{4.4}$$

Mivel az $f_{|H}$ függvénynek lokális minimuma van az $(a, b) \in H$ pontban, ezért létezik $r > 0$, hogy az (a, b) pont $K_r(a, b)$ környezetében

$$\forall (x, y) \in K_r(a, b) \cap H \text{ esetén } f(x, y) \geq f(a, b). \tag{4.5}$$

A (4.3) alapján $x \in K(a)$ esetén $(x, \varphi(x)) \in H^* \subset H$. Felhasználva, hogy φ folytonos $K(a)$-n, meggondolható, hogy létezik olyan $K^*(a) \subset K(a)$ környezet, hogy

$$\forall x \in K^*(a) \text{ esetén } (x, \varphi(x)) \in K_r(a, b) \cap H.$$

Így (4.5)-ből

$$\forall x \in K^*(a) \text{ esetén } f(x, \varphi(x)) \geq f(a, \varphi(a)) = f(a, b).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$h : K^*(a) \to \mathbb{R},\ h(x) := f(x, \varphi(x))$$

valós függvénynek lokális minimuma van az a pontban. A h függvény differenciálható (differenciálható függvények kompozíciója), ezért $h'(a) = 0$. A kompozíciófüggvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x, \varphi(x)) \cdot (x', \varphi'(x)) \\ &= \langle \begin{pmatrix} D_1f(x, \varphi(x)), & D_2f(x, \varphi(x)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & \varphi'(x) \end{pmatrix} \rangle \\ &= D_1f(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)D_2f(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Ezért

$$h'(a) = D_1f(a, b) + \varphi'(a)D_2f(a, b) = 0. \tag{4.6}$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ egyelőre tetszőleges szám, és szorozzuk meg λ-val az (4.4) egyenlőséget, majd adjuk össze a (4.6) egyenlőséggel. Ekkor

$$D_1f(a, b) + \lambda D_1g(a, b) + \varphi'(a)[D_2f(a, b) + \lambda D_2g(a, b)] = 0. \tag{4.7}$$

A λ megválasztható úgy, hogy

$$D_2f(a, b) + \lambda^* D_2g(a, b) = 0 \tag{4.8}$$

(látható, hogy a $\lambda^* := -\frac{D_2f(a,b)}{D_2g(a,b)}$ megfelelő.) Ha a λ^* esetén (4.7)-ben a szögletes zárójelben lévő tényező 0, akkor

$$D_1f(a, b) + \lambda^* D_1g(a, b) = 0 \tag{4.9}$$

is teljesül. Összesítve az eredményeket, azt kaptuk, hogy ha az f függvénynek feltételes minimuma van a $g = 0$ feltétel mellett az $a = (a, b)$ pontban, akkor az $F := f + \lambda^* g$ függvénynek az első változó szerinti parciális deriváltja 0 (ezt mutatja (4.9)), és a második változó szerinti parciális deriváltja is 0 (ezt mutatja (4.8)).
Tehát

$$F'(a) = F'(a, b) = \begin{pmatrix} D_1 F(a, b), & D_2 F(a, b) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

□

4.2. Implicit- és inverzfüggvény-tételek

4.6. Tétel (Folytonos lokális inverz létezése). *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható a b pont egy környezetében, itt $g'(y) \neq 0$. Ekkor g-nek létezik a $g(b) = a$ egy $K_\delta(a)$ környezetében értelmezett folytonos (jobb)inverze, φ, melyre $g(\varphi(x)) = x$ minden $x \in K_\delta(a)$.*

Bizonyítás. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt $f(x, y) := x - g(y)$. A feltételek alapján f-re teljesülnek a 4.2. Egyváltozós implicitfüggvény-tétel feltételei az (a, b) pontban, így létezik olyan folytonos $\varphi : K(a) \to K(b)$ függvény, melyre

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \Rightarrow g(\varphi(x)) = x, \; x \in K(a).$$

□

Az alábbi tétel annak az egyváltozós differenciálszámításból ismert állításnak a megfelelője, hogy ha $f'(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban nem lehet lokális szélsőértéke.

4.7. Tétel (Lokális injektivitás, 20.32). *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(p \leq q)$ folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés injektív (vagyis, az $f'(a)$ $q \times p$ mátrix rangja p). Ekkor f is injektív az a pont egy környezetében.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

4.8. Tétel (Lokális szürjektivitás, 20.35). *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(p \geq q)$ folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés szürjektív (vagyis, az $f'(a)$ $q \times p$ mátrix rangja q). Ekkor az $\mathcal{R}(f)$ értékkészlet tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.*

Bizonyítás. A bizonyításnak csak egy alapötletét ismertetjük. Legyen b „elég közel” $f(a)$-hoz, és definiálja $h(x) := = b - f(x) + x$. Belátható, hogy h kontrakció a $\overline{B}(a, \delta)$ zárt gömbön (megfelelő δ-ra). A Banach-féle fixponttétel alapján így h-nak létezik egyetlen $x^* \in \overline{B}(a, \delta)$ fixpontja, melyre

$$h(x^*) = b - f(x^*) + x^* = x^*,$$

amiből $f(x^*) = b$, tehát $b \in \mathcal{R}(f)$. □

4.9. Következmény (Nyílt leképezés tétele, 20.37). *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(p \geq q)$ folytonosan differenciálható a $H \subseteq \mathcal{D}(f)$ nyílt halmazon, és tegyük fel, hogy minden $x \in H$ esetén az $f'(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés szürjektív (vagyis, az $f'(x)$ $q \times p$ mátrix rangja q). Ekkor az $f(H) := \{f(h) : h \in H\}$ képhalmaz nyílt halmaz.*

4.10. Tétel (Inverzfüggvény-tétel, 20.38). *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés injektív (vagyis, $\det f'(a) \neq 0$). Ekkor létezik olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$, hogy*

1. *$\forall\, x \in B(f(a), \delta)$ esetén $\exists!\; \varphi(x) \in B(a, \eta) : f(\varphi(x)) = x$;*
2. *a $\varphi : B(f(a), \delta) \to B(a, \eta)$ függvény differenciálható $B(f(a), \delta)$-n;*
3. *$f'(x)$ injektív (vagyis, $\det f'(x) \neq 0$) minden $x \in B(a, \eta)$ esetén és*

$$\varphi'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}, \quad x \in B(a, \eta).$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. A tétel 3. pontjában szereplő képlet a 3.13. Tételben szereplő képlettel azonos. □

4.11. Tétel (Többváltozós implicitfüggvény-tétel, 20.40)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$ *folytonosan differenciálható a* $c = (a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pont egy környezetében, ahol* $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, *és* $f(c) = f(a, b) = 0_{\mathbb{R}^q}$. *Tegyük fel, hogy az* $f_a : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, $f_a(y) = f(a, y)$ *függvényre* $(f_a)'(b)$ *injektív (vagyis,* $\det f_a'(b) \neq 0$.*) Ekkor létezik olyan* $\delta > 0$ *és* $\eta > 0$*, hogy*

1. $\forall\ x \in B(a, \delta)$ *esetén* $\exists!\ \varphi(x) \in B(b, \eta) : f(x, \varphi(x)) = 0_{\mathbb{R}^q}$*;*
2. *a* $\varphi : B(a, \delta) \to B(b, \eta)$ *függvény folytonosan differenciálható* $B(a, \delta)$*-n;*
3. *az* $f^b : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $f^b(x) = f(x, b)$ *jelöléssel*

$$\varphi'(x) = -\left[f_a'(x)\right]^{-1} \cdot (f^b)'(\varphi(x)), \quad x \in B(a, \delta).$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

Ötödik fejezet

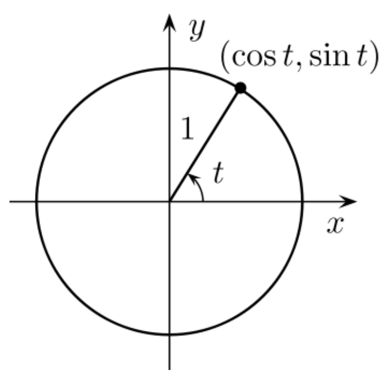
Ívhossz, vonalintegrál, primitív függvény

Ebben a fejezetben ismét integrálszámításról lesz szó, mégpedig a fizikában gyakran használatos ún. vektormezők görbe menti integráljáról. Ez a fogalom fizikailag úgy interpretálható mint az a munkavégzés, mely egy pont erőhatás által való mozgatása során történik.

5.1. Görbe

5.1. Definíció. Egy $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ leképezést *görbé*nek nevezünk. $p = 2$ esetben *síkgörbé*ről, $d = 3$ esetben *térgörbé*ről beszélünk.
Speciális síkgörbe: $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t, f(t))$, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor $\mathcal{R}(g) = \operatorname{graph}(f)$.

Nagyon fontos, hogy a görbét, melyet leképezésként definiáltunk, ne keverjük össze az értékkészlethalmazával – bár inkább ez utóbbi felelne meg a mindennapos szóhasználat „görbe” elnevezésének.



5.1. ábra. A $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$ síkgörbe értékkészlete

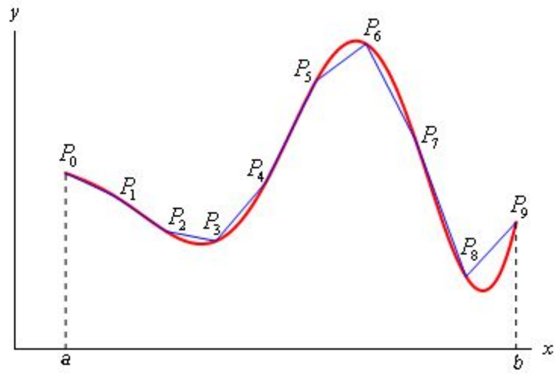
Világos, hogy ha az 5.1. ábrán a g leképezést $[0,4\pi]$-n - vagy akár $[0,3\pi]$-n - definiáljuk, akkor is ugyanehhez az értékkészlethalmazhoz jutunk.

5.2. Definíció. Egy $[x, y] \subset \mathbb{R}^p$ halmazt $\mathbb{R}^p$-beli *szakasz*nak hívunk, ha

$$[x, y] = \{t \cdot x + (1 - t) \cdot y : t \in [0,1]\}.$$

Egy $\mathbb{R}^p$-beli *poligon* (vagy *töröttvonal*) egymáshoz csatlakozó szakaszok uniója.

A görbe ívhosszát úgy fogjuk definiálni mint (az értékkészlethalmazának) „beírt” poligonjai hosszainak szupremumát.



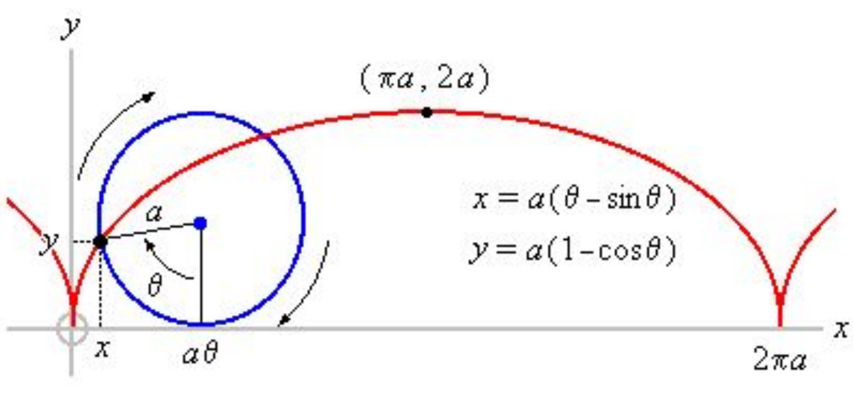
5.2. ábra. Görbe ívhosszának közelítése poligonnal

5.3. Definíció (14.15)**.** Egy $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *ívhossza* az

$$s(g) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\} \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{5.1}$$

Itt $|g(t_i) - g(t_{i-1})| = |[g(t_{i-1}), g(t_i)]|$ szakasz hossza.
A $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *rektifikálható*, ha $s(g) < \infty$.

5.4. Definíció. A g görbe *egyszerű ív*, ha $\mathcal{R}(g)$-nek létezik bijektív folytonos paraméterezése.



5.3. ábra. Cikloisgörbe értékkészlete

5.5. Állítás (14.19)**.** *Ha g_1 és g_2 ugyanannak az egyszerű ívnek a bijektív folytonos paraméterezései, akkor $s(g_1) =$ $= s(g_2)$.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha a görbék $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ és $g_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^p$, akkor $h = g_2^{-1} \circ g_1 : [a, b] \to [c, d]$ bijektív, folytonos, tehát szigorúan monoton. Ebből egyszerűen meggondolható, hogy a g_1 és g_2 görbéknek ugyanazok a beírt poligonjai, így $s(g_1) = s(g_2)$. □

5.6. Definíció (14.16)**.** A $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *folytonos/(folytonosan) differenciálható/Lipschitz-tulajdonságú*, ha minden $j = 1, \ldots, p$ esetén a $g_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ koordinátafüggvény folytonos/(folytonosan) differenciálható ill. Lipschitz-tulajdonságú.

Megjegyezzük, hogy ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, akkor minden $x, y \in [a, b]$, $x < y$ esetén a Lagrange-középértéktétel alapján létezik olyan $c = c(x, y) \in [x, y]$, melyre

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$|f(y) - f(x)| \le \sup_{[a,b]} |f'| \cdot |y - x|, \quad x, y \in [a, b],$$

vagyis f Lipschitz-tulajdonságú $L := \sup_{[a,b]} |f'| \in \mathbb{R}$ konstanssal. Ebből következik, hogy ha egy $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe folytonosan differenciálható, akkor Lipschitz-tulajdonságú is.

5.7. Tétel (14.20)**.** *Ha a $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe Lipschitz-tulajdonságú (pl. folytonosan differenciálható), akkor g rektifikálható.*

Bizonyítás. A Lipschitz-tulajdonság miatt léteznek olyan $K_j > 0$, $j = 1, \dots, p$ konstansok, hogy

$$|g_j(y) - g_j(x)| \le K_j \cdot |y - x|, \quad x, y \in [a, b].$$

Legyen $K := \max_{1 \le j \le p} K_j$. Ekkor az (5.1)-ben szereplő tetszőleges $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztásra

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(g_1(t_i) - g_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (g_p(t_i) - g_p(t_{i-1})^2} \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{K^2 \cdot p \cdot (t_i - t_{i-1})^2} = K \cdot \sqrt{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = K \cdot \sqrt{p} \cdot (b - a), \quad x, y \in [a, b].\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $s(g) \le K \cdot \sqrt{p} \cdot (b - a)$, így g rektifikálható. □

5.8. Tétel (14.21)**.** *Ha a $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \dots, p$ esetén $g_j' \in R[a, b]$ (pl., ha g folytonosan differenciálható), akkor*

$$s(g) = \int_a^b |g'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2 + \dots + (g_p'(t))^2} \, dt. \tag{5.2}$$

Bizonyítás. A tételt csak „közelítőleg" bizonyítjuk, mégpedig úgy, hogy az $s(g)$ számot az (5.1)-ben szereplő, valamely $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztáshoz tartozó $\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|$ alakú összeggel közelítjük. Használjuk fel, hogy minden $j = 1, \dots, p$ esetén g_j differenciálható. Így az adott felosztás $[t_{i-1}, t_i]$ részintervallumain alkalmazva a(z egyváltozós) Lagrange-középértéktételt kapjuk, hogy léteznek $c_{1,i}, \dots, c_{p,i} \in [t_{i-1}, t_i]$ számok, melyekre

$$g_1(t_i) - g_1(t_{i-1}) = g_1'(c_{1,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}), \ \dots \ , g_p(t_i) - g_p(t_{i-1}) = g_p'(c_{p,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(g_1(t_i) - g_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (g_p(t_i) - g_p(t_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{g_1'(c_{1,i})^2 \cdot (t_i - t_{i-1})^2 + \dots + g_p'(c_{p,i})^2 \cdot (t_i - t_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{g_1'(c_{1,i})^2 + \dots + g_p'(c_{p,i})^2} \cdot (t_i - t_{i-1}),\end{aligned}$$

ami éppen a $\int_a^b |g'(t)|$ egy integrál-közelítőösszege. □

5.9. *Megjegyzés* (14.13). A fenti tétel speciális esete, ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t, f(t))$, és így f grafikonjának ívhossza

$$s(g) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt.$$

5.10. Példa. A $g : [0{,}2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ cikloisgörbe ívhossza:

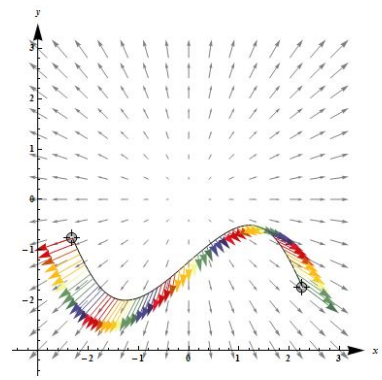
$$s(g) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, dt = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 4a \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a$$

5.2. Vonalintegrál

Most rátérünk a vektormező görbe menti integráljára. Az integrál definícióját a Riemann-összeghez hasonló közelítés segítségével mondjuk ki.

5.11. Definíció (22.28)**.** Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$. Azt mondjuk, hogy az f *vonalintegrálja a g görbe mentén* $\int_g f \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása és ehhez $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számok, melyekre

$$\left| \int_g f - \sum_{i=1}^{n} \langle f(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle \right| < \varepsilon. \tag{5.3}$$



5.4. ábra. Görbe menti vektormező

5.12. Tétel (22.35)**.** *Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén $g_j' \in R[a, b]$ (pl., g folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Ekkor*

$$\int_g f = \int_a^b \langle f(g(t)), g'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{p} f_j(g(t)) \cdot g_j'(t) \right) \, dt. \tag{5.4}$$

Bizonyítás. Ezt a tétel ismét csak „közelítőleg” bizonyítjuk úgy, hogy az $\int_g f$ számot az (5.3)-ban szereplő, valamely $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztáshoz és $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számokhoz tartozó $\sum_{i=1}^{n} \langle f(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle$ összeggel közelítjük . Használjuk fel, hogy minden $j = 1, \ldots, p$ esetén g_j differenciálható. Így az adott felosztás $[t_{i-1}, t_i]$ részintervallumain alkalmazva a(z egyváltozós) Lagrange-középértéktételt kapjuk, hogy léteznek $d_{1,i}, \ldots, d_{p,i} \in [t_{i-1}, t_i]$ számok, melyekre

$$g_1(t_i) - g_1(t_{i-1}) = g_1'(d_{1,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}), \ \ldots \ , g_p(t_i) - g_p(t_{i-1}) = g_p'(d_{p,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle f(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1}) \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left[f_1(g(c_i)) \cdot (g_1(t_i) - g_1(t_{i-1})) + \cdots + f_p(g(c_i)) \cdot (g_p(t_i) - g_p(t_{i-1})) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[f_1(g(c_i)) \cdot g_1'(d_{1,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \cdots + f_p(g(c_i)) \cdot g_p'(d_{p,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[f_1(g(c_i)) \cdot g_1'(d_{1,i}) + \cdots + f_p(g(c_i)) \cdot g_p'(d_{p,i}) \right] \cdot (t_i - t_{i-1}),
\end{aligned}$$

ami éppen az $\int_a^b \langle f(g(t)), g'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{p} f_j(g(t)) \cdot g_j'(t) \right) \, dt$ egy integrál-közelítőösszege. □

5.3. Primitív függvény

Ebben az alfejezetben a többváltozós primitív függvény fogalmáról lesz szó, valamint arról, hogy a Riemann-integrálnál megismert Newton-Leibniz-formulát hogyan általánosíthatjuk vonalintegrálra.

5.13. Definíció (22.36)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $\Omega \subset \mathcal{D}(f)$ nyílt. Azt mondjuk, hogy a $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *primitív függvénye f-nek Ω-n*, ha F differenciálható Ω-n és minden $x \in \Omega$ esetén

$$F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow D_j F(x) = f_j(x),\ j = 1, \dots, p.$$

5.14. Tétel (Newton-Leibniz formula vonalintegrálra, 22.38)**.** *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvénynek van $F : \Omega \to \mathbb{R}$ primitív függvénye Ω-n. Ekkor tetszőleges $g : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ folytonos és rektifikálható görbére*

$$\int_g f = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Bizonyítás. A tételt csak „közelítőleg" bizonyítjuk úgy, hogy az $\int_g f$ számot megint az (5.3)-ban szereplő, valamely $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztáshoz és $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \dots, n$ számokhoz tartozó $\sum_{i=1}^n \langle f(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle$ összeggel közelítjük. Mivel F differenciálható Ω-n és $g : [a, b] \to \Omega$, ezért az adott felosztáshoz tartozó $[g(t_{i-1}), g(t_i)]$ szakaszokon alkalmazva a 2.30. Többváltozós Lagrange-középértéktételt F-re kapjuk, hogy léteznek $d_i \in [g(t_{i-1}), g(t_i)]$ pontok, melyekre

$$F(g(t_i)) - F(g(t_{i-1})) = \langle F'(d_i), g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ebből

$$F(g(b)) - F(g(a)) = \sum_{i=1}^n [F(g(t_i)) - F(g(t_{i-1}))] = \sum_{i=1}^n \langle F'(d_i), g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle.$$

A primitív függvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \langle f(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle F'(g(c_i)), g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle \\ &\approx \sum_{i=1}^n \langle F'(d_i), g(t_i) - g(t_{i-1})\rangle = F(g(b)) - F(g(a)).\end{aligned}$$

A $\approx$ közelítő egyenlőség igaz, ha a $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztás elég sűrű. Ugyanis ekkor mivel g rektifikálható és folytonos, $g(c_i)$, $t_{i-1} < c_i < t_i$ „elég közel van" a $d_i \in [g(t_{i-1}), g(t_i)]$ ponthoz. Másrészt, mivel $F' = f$ folytonos, ezért $F'(g(c_i))$ is „elég közel van" $F'(d_i)$-hez. $\square$

5.15. *Megjegyzés* (22.39). Ha a $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \dots, p$ esetén $g_j' \in R[a, b]$ (pl., g folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$ pedig folytonos, és primitív függvénye F, akkor az 5.12. és a 3.9. Tételek alapján

$$\int_g f = \int_a^b \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_a^b (F \circ g)'(t)\, dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

az egyváltozós Newton-Leibniz-tételből adódik.

5.16. Definíció. A $g : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *zárt görbe*, ha $g(a) = g(b)$.

5.17. Következmény. *Ha az $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^p$) folytonos függvénynek van primitív függvénye, akkor tetszőleges $g : [a, b] \to \Omega$ folytonos és rektifikálható* zárt *görbe mentén vett vonalintegrálja 0. Továbbá, tetszőleges folytonos és rektifikálható görbe mentén vett vonalintegrálja független az „úttól".*

5.18. Tétel (22.44)**.** *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^p$) differenciálható Ω-n. Ha f-nek van primitív függvénye Ω-n, akkor minden $x \in \Omega$ esetén*

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x), \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Bizonyítás. Mivel f differenciálható, ezért tetszőleges F primitív függvénye kétszer differenciálható, tehát alkalmazható rá a 2.42. Young-tétel (illetve, ennek egy megfelelően általánosított változata $\mathbb{R}^p$-re). Ebből minden $x \in \Omega$ esetén

$$D_i(D_jF)(x) = D_{ij}F(x) = D_{ji}F(x) = D_j(D_iF)(x) \Rightarrow D_if_j(x) = D_jf_i(x), \quad i,j = 1,\dots,p.$$

□

5.4. Folytonos függvény primitív függvénye létezésének elégséges feltétele

Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy milyen elégséges feltételt tudunk adni arra, hogy egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvénynek létezzen primitív függvénye. Ehhez szükségünk lesz még néhány görbékre vonatkozó fogalomra, valamint a vonalintegrál néhány egyszerű tulajdonságára.

5.19. Állítás (22.40)**.** *Ha $g_1 : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$, $g_2 : [b,d] \to \Omega$ és $g_1(b) = g_2(b)$ ún.* csatolt görbék*, akkor legyen*

$$g_1 \cup g_2 : [a,d] \to \Omega$$

az ún. egyesített görbe*, melyre*

$$(g_1 \cup g_2)_{|_{[a,b]}} = g_1 \text{ és } (g_1 \cup g_2)_{|_{[b,d]}} = g_2.$$

Ekkor bármely $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ függvényre

$$\int_{g_1 \cup g_2} f = \int_{g_1} f + \int_{g_2} f,$$

ha az integrálok léteznek.

Bizonyítás. Könnyen adódik a vonalintegrál definíciójából. □

5.20. Állítás. *Ha $g : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ görbe, akkor az*

$$\overleftarrow{g} : [a,b] \to \Omega, \quad \overleftarrow{g}(t) := g(a+b-t)$$

legyen az ellentétesen irányított *görbe. Ha egy $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ függvény esetén létezik $\int_g f$, akkor létezik $\int_{\overleftarrow{g}} f$ is, és*

$$\int_{\overleftarrow{g}} f = -\int_g f.$$

Bizonyítás. Mivel az $\int_{\overleftarrow{g}} f$ (5.3) definíciójában

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(\overleftarrow{g}(c_i)), \overleftarrow{g}(t_i) - \overleftarrow{g}(t_{i-1})\rangle, \tag{5.5}$$
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b, \ c_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

alakú közelítőösszegek szerepelnek, ezért elég meggondolni, hogy minden ilyen közelítőösszeg egyenlő egy, az $\int_g f$ integrált közelítő összeg mínusz egyszeresével, és fordítva. Mivel $\overleftarrow{g}(t) = g(a+b-t)$ teljesül, azért a fenti (5.5) közelítőösszeg az alábbival egyenlő:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(g(\tilde{c}_i)), g(\tilde{t}_i) - g(\tilde{t}_{i-1})\rangle,$$
$$a = \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} < \cdots \tilde{t}_i < \tilde{t}_{i-1} < \cdots \tilde{t}_0 = b, \ \tilde{c}_i \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i-1}],$$

ahol $\tilde{s} = a+b-s$. Így

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(\overleftarrow{g}(c_i)), \overleftarrow{g}(t_i) - \overleftarrow{g}(t_{i-1})\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle f(g(\tilde{c}_i)), g(\tilde{t}_{i-1}) - g(\tilde{t}_i)\rangle,$$

ahol

$$a = \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} < \cdots \tilde{t}_i < \tilde{t}_{i-1} < \cdots \tilde{t}_0 = b,\ \tilde{c}_i \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i-1}].$$

Tehát az osztópontok átsorszámozása után az $\int_g f$ egy közelítő összegének mínusz egyszeresét kapjuk. A megfordítás ugyanígy meggondolható. $\square$

Korábban beláttuk a vonalintegrálra vonakozó 5.14. Newton-Leibniz formulát, mely szerint ha $g : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ folytonos és rektifikálható görbe, továbbá $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ olyan folytonos függvény, melynek az $F : \Omega \to \mathbb{R}$ primitív függvénye Ω-n (vagyis F differenciálható és $F' = f$ Ω-n), akkor

$$\int_g f = F(g(b)) - F(g(a)). \tag{5.6}$$

Az állításnak megfogalmaztuk két közvetlen következményét is. Az egyik, hogy primitív függvénnyel rendelkező folytonos függvény zárt görbén vett vonalintegrálja 0. A másik pedig, hogy ilyen függvény vonalintegrálja „független az úttól", vagyis ugyanolyan végpontokkal rendelkező görbéken vett vonalintegráljai megegyeznek.
Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ezen állítások mindegyike megfordítható, vagyis bármelyikből következik, hogy f-nek van primitív függvénye. A továbbiakban görbe alatt mindig folytonos és rektifikálható görbét értünk.

5.21. Tétel (22.41)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Ekkor ekvivalensek:*

(i) Minden $g : [a, b] \to \Omega$ folytonos, rektifikálható zárt görbe (vagyis $g(a) = g(b)$) esetén

$$\int_g f = 0.$$

(ii) Minden olyan $g_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ és $g_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ folytonos, rektifikálható görbék esetén, melyekre $g_1(a_1) = g_2(a_2)$ és $g_1(b_1) = g_2(b_2)$ is igaz (vagyis a két görbe értékkészletének „végpontjai" megegyeznek), teljesül, hogy

$$\int_{g_1} f = \int_{g_2} f.$$

(Másképp: a vonalintegrál független az úttól.)

(iii) f-nek létezik primitív függvénye Ω-n, vagyis létezik olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre

$$D_j F(x) = f_j(x), \quad \forall j = 1, \ldots, p, \forall x \in \Omega.$$

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii).
Legyenek $g_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ és $g_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ olyan görbék, melyekre $g_1(a_1) = g_2(a_2)$ és $g_1(b_1) = g_2(b_2)$. Feltehető, hogy $a_2 = b_1$ (pl. g_2 átparaméterezésével). Ekkor az 5.20. Állítás szerint a

$$\overleftarrow{g_2} : [a_2, b_2] \to \Omega, \quad \overleftarrow{g_2}(t) := g_2(a_2 + b_2 - t)$$

ellentétesen irányított görbével a

$$g_1 \cup \overleftarrow{g_2} : [a_1, b_2] \to \Omega$$

zárt görbe lesz, ugyanis

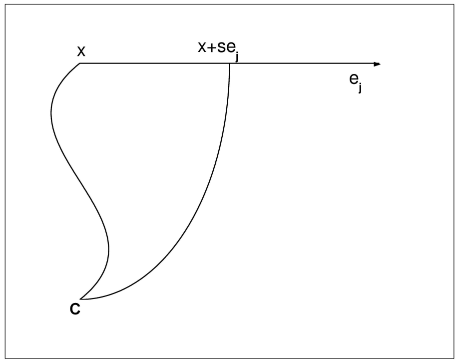
$$(g_1 \cup \overleftarrow{g_2})(a_1) = g_1(a_1) \text{ és } (g_1 \cup \overleftarrow{g_2})(b_2) = \overleftarrow{g_2}(b_2) = g_2(a_2),$$

és a feltétel szerint $g_1(a_1) = g_2(a_2)$. Így (i), az 5.19 és az 5.20. Állítás alapján

$$0 = \int_{g_1 \cup \overleftarrow{g_2}} f = \int_{g_1} f + \int_{\overleftarrow{g_2}} f = \int_{g_1} f - \int_{g_2} f,$$

tehát

$$\int_{g_1} f = \int_{g_2} f.$$



5.5. ábra.

(ii) ⇒ *(iii)*.
Rögzítsünk egy $c \in \Omega$ pontot. Legyen

$$F : \Omega \to \mathbb{R}, \; F(x) := \int_{g_{c,x}} f,$$

ahol $g_{c,x}$ jelöljön egy c-t x-szel összekötő sima görbét. Legyen $e_j \in \mathbb{R}^p$ $(j = 1,2,\ldots,p)$ az j-edik egységvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} D_j F(x) &= \lim_{s\to 0} \frac{F(x+se_j) - F(x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \left(\int_{g_{c,x+se_j}} f - \int_{g_{c,x}} f \right) = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_{g_{x,x+se_j}} f. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy a $g_{x,x+se_j}(t) = x + t \cdot e_j$, $t \in [0,s]$ görbe folytonosan differenciálható, $g'_{x,x+se_j}(t) = e_j$, az 5.12. Tétel alapján kapjuk, hogy

$$D_j F(x) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s \langle f(x+te_j), e_j \rangle \mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s f_j(x+te_j)\mathrm{d}t.$$

Az egyváltozós Riemann-integrál középértéktétele alapján egy $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez létezik olyan $\theta \in [a,b]$, melyre

$$\int_a^b h = h(\theta) \cdot (b-a),$$

(vagyis a függvény alatti terület egy $b-a$ és $h(\theta)$ oldalhosszúságú téglalap területével egyezik meg). Felhasználva, hogy a $[0,s] \ni t \mapsto f_j(x+te_j)$ függvény folytonos (mivel f az), létezik olyan $\vartheta = \vartheta(s) \in [0,s]$, melyre

$$D_j F(x) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \int_0^s f_j(x+te_j)\mathrm{d}t = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} f_j(x+\vartheta e_j) \cdot s = \lim_{s\to 0} f_j(x+\vartheta e_j) = f_j(x),$$

mivel $s \to 0$ esetén $\vartheta(s) \to 0$ és f_j folytonos. Tehát

$$D_j F(x) = f_j(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Mivel j tetszőleges volt, és f_j folytonos, ebből az is következik, hogy $D_j F$ folytonos Ω-n minden j-re. Így következik, hogy F differenciálható Ω-n és $F' = f$.

(iii) ⇒ *(i)*
Ld. az 5.17. Következményt. □

5.22. *Megjegyzés.* A fenti bizonyítás *(ii)* ⇒ *(iii)* részében felhasználtuk, hogy bármely $c, x \in \Omega$ esetén létezik c-t x-szel összekötő, Ω-ban futó sima görbe. Ez csak akkor igaz, ha Ω-ról feltesszük, hogy ún. *összefüggő* halmaz. Ha Ω nem összefüggő, akkor az egyes *összefüggőségi komponenseire* alkalmazva a bizonyítást, az F primitív függvény az így kapott függvényekből előállítható. Ennek meggondolását itt tovább nem részletezzük.

5.5. Folytonosan differenciálható függvény primitív függvénye létezésének elégséges feltétele

Az előző fejezetben láttuk, hogy a zárt görbéken 0 vonalintegrállal rendelkező folytonos függvényeknek van primitív függvénye. Ezt a feltételt azonban a gyakorlatban igen nehéz ellenőrizni, hiszen minden lehetséges zárt görbén vett integrált ki kellene számolni. Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy egy elég sima (folytonosan differenciálható) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ függvény primitív függvénye létezésére milyen könnyebben ellenőrizhető feltételt tudunk adni. Kiderül, hogy a korábban belátott 5.18. Tétel megfordítása megfelelő tulajdonságú tartományon alkalmazható. Az állítás bizonyításához szükségünk lesz a paraméteres integrál fogalmára.

5.5.1. Paraméteres integrál

Legyen $h : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol most $[a, b]$ és $[c, d]$ valós intervallumok). A

$$H : [c, d] \to \mathbb{R},\ H(y) := \int_a^b h(x, y)\, dx$$

függvényt *paraméteres integrál*nak nevezzük (y a „paraméter”).

5.23. Tétel. *Legyen $h : [a, b]\times[c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy D_2h létezik és folytonos $[a, b]\times[c, d]$-n. Ekkor a $H : [c, d] \to \mathbb{R}$,*

$$H(y) := \int_a^b h(x, y)\, dx$$

függvény differenciálható (c, d)-n és minden $y \in (c, d)$ esetén

$$H'(y) = \int_a^b D_2h(x, y)\, dx.$$

Bizonyítás. Legyen $y \in (c, d)$ tetszőleges. Ekkor $\forall s \in (c, d),\ s \neq y$ esetén

$$\begin{aligned}
&\frac{H(s) - H(y)}{s - y} - \int_a^b D_2h(x, y)\, dx = \\
&= \frac{1}{s - y}\left(\int_a^b h(x, s)\, dx - \int_a^b h(x, y)\, dx\right) - \int_a^b D_2h(x, y)\, dx = \\
&= \frac{1}{s - y}\int_a^b (h(x, s) - h(x, y))\, dx - \int_a^b D_2h(x, y)\, dx = \\
&= \frac{1}{s - y}\int_a^b D_2h(x, \eta)(s - y)\, dx - \int_a^b D_2h(x, y)\, dx = \\
&= \int_a^b (D_2h(x, \eta) - D_2h(x, y))\, dx,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti sorban alkalmaztuk a Lagrange-középértéktételt h-ra a 2. változóban, $\eta \in (s, y)$ vagy $\eta \in (y, s)$ (és η tulajdonképpen függ x-től, de ennek a továbbiakban nem lesz szerepe). Mivel D_2h folytonos $[a, b] \times [c, d]$-n, ezért $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, hogy $\forall(x, s), (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, amelyre

$$|(x, s) - (x, y)| = |s - y| < \delta,$$

teljesül, hogy $|D_2h(x, s) - D_2h(x, y)| < \varepsilon$.
Legyen $s \in (c, d),\ s \neq y$ olyan, hogy $|s - y| < \delta$. Mivel η az y és s között van, így $|\eta - y| < \delta$ is fennáll, amiből

$$|D_2h(x, \eta) - D_2h(x, y)| < \varepsilon$$

is következik. Ekkor a fenti egyenlőség alapján

$$\left|\frac{H(s) - H(y)}{s - y} - \int_a^b D_2h(x, y)\, dx\right| \le \int_a^b |D_2h(x, \eta) - D_2h(x, y)|\, dx < \int_a^b \varepsilon\, dx = \varepsilon(b - a).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\exists \lim_{s\to y} \frac{H(s)-H(y)}{s-y}$ és

$$H'(y) = \lim_{s\to y} \frac{H(s)-H(y)}{s-y} = \int_a^b D_2 h(x,y)\,dx.$$

□

Ezt a tételt a „paraméteres integrál deriválása” néven szokták emlegetni, és formálisan azt mondja, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b h(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

azaz kellően sima függvény esetén az integrál paraméter szerinti deriválását az integrál alatt is el lehet végezni.

5.5.2. Folytonosan differenciálható függvény csillagtartományon

Most a korábban belátott az 5.18. Tétel tétel megfordítását fogjuk igazolni. Meggondoltuk, hogy ha $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ *differenciálható*, és f-nek létezik $F:\Omega\to\mathbb{R}$ primitív függvénye, akkor

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x), \quad \forall i,j = 1,\dots,p,\ \forall x\in\Omega. \tag{5.7}$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha Ω ún. *csillagtartomány* és f *folytonosan differenciálható* Ω-n, akkor a fenti (5.7) feltételből következik, hogy f-nek van primitív függvénye.

5.24. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. Az Ω tartomány *csillagtartomány*, ha létezik olyan $c\in\Omega$ pont, hogy minden $x\in\Omega$ esetén

$$[c,x] := \{c + t(x-c) \in \mathbb{R}^p : t\in[0{,}1]\} \subset \Omega$$

(a c pontból az Ω minden pontjához el lehet „látni” Ω-ban…).

5.25. Tétel. *Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^p$ csillagtartomány. Legyen $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható, vagyis f differenciálható és minden $i,j=1{,}2,\dots,p$ esetén $D_i f_j$ folytonos Ω-n. Ekkor ekvivalensek:*

(i) Minden $x\in\Omega$ esetén

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x), \quad \forall i,j=1,\dots,p,$$

azaz $f'(x)\in\mathbb{R}^{p\times p}$ szimmetrikus mátrix.

(ii) f-nek létezik primitív függvénye Ω-n, vagyis létezik olyan $F:\Omega\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre

$$D_j F(x) = f_j(x), \quad \forall j=1,\dots,p,\ \forall x\in\Omega.$$

Bizonyítás. (i) ⇒ (ii)
Legyen $x\in\Omega,\ x\neq c$ tetszőleges. Legyen a c pontot x-szel összekötő görbe az a

$$g_{c,x}(t) := c + t(x-c)\in\Omega,\ t\in[0{,}1].$$

Az $g_{c,x}$ görbén vett vonalintegrál legyen a F függvény x-beli értéke, azaz definiálja az $F:\Omega\to\mathbb{R}$ függvényt

$$F(x) := \int_{g_{c,x}} f, \quad x\in\Omega.$$

Ekkor az 5.12. Tétel alapján

$$F(x) = \int_0^1 \langle f(c+t(x-c)), x-c\rangle\,dt,$$

mivel $g'_{c,x}(t) = x-c$. Megmutatjuk, hogy F primitív függvénye az f-nek. Legyen $j\in\{1{,}2,\dots,p\}$ tetszőleges index. Ekkor minden $x\in\Omega$ esetén

$$D_j F(x) = D_j\int_0^1 \langle f(c+t(x-c)), x-c\rangle\,dt = D_j\int_0^1\left(\sum_{i=1}^p f_i(c+t(x-c))(x_i-c_i)\right)dt.$$

Most alkalmazzuk a paraméteres integrál deriválásáról szóló 5.23. Tételt. A „paraméter” ezúttal x_j, az j. változó lesz. Így folytatva a számolást:

$$D_jF(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^p \{D_j f_i(c+t(x-c)) \cdot t\} \cdot (x_i - c_i) + f_j(c+t(x-c)) \cdot 1 \right) dt,$$

hiszen ha $i \neq j$, akkor $D_j(x_i - c_i) = 0$. Most használjuk ki, hogy $D_j f_i = D_i f_j$. Így kapjuk, hogy

$$D_jF(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^p \{D_i f_j(c+t(x-c)) \cdot t\} \cdot (x_i - c_i) + f_j(c+t(x-c)) \right) dt. \tag{5.8}$$

Tekintsük a

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \Phi(t) := f_j(c+t(x-c)) \cdot t$$

függvényt! A feltevések miatt Φ differenciálható (mivel f_j az), és a 3.9. Kompozícióföggvény deriválási szabálya, valamint az egyváltozós szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \langle f_j'(c+t(x-c)), (x-c)\rangle \cdot t + f_j(c+t(x-c)) \\ &= \sum_{i=1}^p D_i f_j(c+t(x-c)) \cdot t \cdot (x_i - c_i) + f_j(c+t(x-c)).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az (5.8) integrál alatt éppen $\Phi'(t)$ áll. Ezért:

$$D_jF(x) = \int_0^1 \Phi'(t)\, dt = [\Phi(t)]_0^1 = \Phi(1) - \Phi(0) = f_j(c+x-c) - 0 = f_j(x).$$

Tehát $D_jF(x) = f_j(x)$. Mivel f_j folytonos Ω-n, ezért D_jF folytonos minden j-re, amiből már következik, hogy F differenciálható. Így valóban F az f primitív függvénye.

$(ii) \Rightarrow (i)$
Az állítás a már bizonyított 5.18. Tétel. □

5.6. A Newton-Leibniz tétel további általánosításai

Láttuk, hogy az 5.14. Tétel a Riemann-integrál elméletéből ismeretes Newton-Leibniz tétel általánosítása vonalintegrálra. Ebben a fejezetben olyan, a differenciálgeometriában és a fizikában fontos szerepet játszó összefüggéseket ismertetünk (bizonyítás nélkül), melyek szintén felfoghatók mint a Newton-Leibniz tétel általánosításai. Az 5.28. Green-tétel tulajdonképpen a Newton-Leibniz tétel kétváltozós, az 5.34. Tétel pedig a háromváltozós variánsa. Ez utóbbinak fontos következménye az 5.35. Gauss-Osztrogradszkij és az 5.36. Stokes-tétel.

5.6.1. Green tétele

A tétel kimondásához szükségünk lesz egy görbén értelmezett valós értékű függvény úgynevezett ívhossz szerinti vonalintegráljának fogalmára.

5.26. Definíció (22.52). Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}(!)$. Azt mondjuk, hogy az f *ívhossz szerinti vonalintegrálja a g görbe mentén* $\int_g f\, ds \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az $[a,b]$ intervallumnak olyan $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása és ehhez $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számok, melyekre

$$\left| \int_g f\, ds - \sum_{i=1}^n f(g(c_i)) \cdot |g(t_i) - g(t_{i-1})| \right| < \varepsilon.$$

A következő állítás az 5.8. Tétel megfelelője ívhossz szerinti vonalintegrálra.

5.27. Állítás (22.53). *Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1,\dots,p$ esetén $g_j' \in R[a,b]$ (pl., g folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor*

$$\int_g f\,ds = \int_a^b f(g(t)) \cdot |g'(t)|\,dt. \tag{5.9}$$

A Green-tétel arról szól, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ valós értékű, folytonosan differenciálható függvény, akkor f'-nek egy $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sima görbe által határolt tartományon vett területi integrálja előáll mint az $f \cdot n$ leképezésnek a tartomány határán vett (ívhossz szerinti) vonalintegrálja. Itt n a tartomány határának kifelé mutató normálisa, vagyis ha g sima görbe, akkor

$$n : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad n(t) = \frac{1}{|g'(t)|}\left(g_2'(t), -g_1'(t)\right).$$

5.28. Tétel (Green, 22.47, 22.54). *Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ pozitív irányítású egyszerű (azaz, $[a,b)$-n injektív) zárt síkgörbe, mely véges sok folytonosan differenciálható ívből áll. Jelölje a g által határolt (korlátos) tartományt $A \subset \mathbb{R}^2$, és legyen $\overline{A} \subset G$ nyílt. Ha $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_g fn\,ds = \int_A f',$$

ahol $n(t) = \frac{1}{|g'(t)|}\left(g_2'(t), -g_1'(t)\right)$ a görbe t pontbeli ún. külső normálisa. *Így a fenti formula az 5.27. Állítás alapján*

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g_2'(t)\,dt = \int_A D_1 f, \qquad \int_a^b f(g(t)) \cdot g_1'(t)\,dt = -\int_A D_2 f.$$

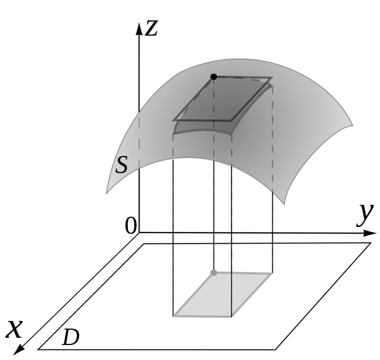
A Green-tétel joggal tekinthető az egyváltozós Newton-Leibniz-tétel kétváltozós általánosításának. Ugyanis, az utóbbi arról szól, hogy egy f' függvény $[a,b]$ intervallumon vett Riemann-integrálja egyenlő $f(b) - f(a)$-val. Nyilván nevezhetjük az 1 vektort (számot) az $[a,b]$ intervallum b pontjában vett külső normálisának, a -1 vektort pedig az a pontban vett külső normálisának, és így $f(b) - f(a) = f(b) \cdot n(b) + f(a) \cdot n(a)$.

5.6.2. Felület, felszín

A felületet tekinthetjük a görbe kétváltozós általánosításának.

5.29. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető. A $g : A \to \mathbb{R}^p$ leképezés $\mathbb{R}^p$-beli *(paraméterezett) felület*. A felület *folytonos/(folytonosan) differenciálható*, ha g az.
Speciális felület: $g : A \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (x, y, f(x,y))$, ahol $f : A \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor $\mathcal{R}(g) = \operatorname{graph}(f)$.

5.30. Példa. Gömbfelület paraméterezése: $g : [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $g(\alpha,\beta) = (R\cdot\sin\beta\cos\alpha, R\cdot\sin\beta\sin\alpha, R\cdot\cos\beta)$.



5.6. ábra. Felszín közelítése

A felület felszínét – a technikai nehézségek elkerülése végett – egy felületi integrállal definiáljuk. A képlet hasonlít a folytonosan differenciálható görbe ívhosszára vonatkozó (5.2) formulára.

5.31. Definíció (22.56)**.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és $g : A \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható felület. Azt mondjuk, hogy a *g felszíne létezik és értéke*

$$\int_A |D_1 g \times D_2 g| \, ,$$

ha a $|D_1 g \times D_2 g|$ integrálható A-n, ahol

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\gamma = \sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2 - \langle a, b\rangle^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}^p$$

az a és b vektorok által kifeszített paralelogramma területe (γ a közbezárt szögük.)

5.32. Állítás (22.59)**.** *Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető,* zárt *halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Ekkor f grafikonjának felszíne*

$$F(\text{graph}\,(f)) = \int_A \sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $g : A \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$ a graph (f)-et paraméterező felület. Ekkor $D_1 g = (1{,}0, D_1 f)$, $D_2 g = (0{,}1, D_2 f)$. Így

$$|D_1 g \times D_2 g| = \sqrt{(1 + (D_1 f)^2)(1 + (D_2 f)^2) - (D_1 f)^2 (D_2 f)^2} = \sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2},$$

amiből az állítás a fenti definíció alapján adódik. □

5.6.3. Integráltételek három dimenzióban

Egy felületen (egész pontosan, annak értékkészletén) értelmezett valós függvény felszíni integrálját a felület felszínéhez hasonlóan nem közelítőösszegekkel, hanem egy területi integrállal definiáljuk. A formula az ívhossz szerinti integrálra vonatkozó (5.9) formula analógja.

5.33. Definíció (22.60)**.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, $g : A \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható felület és $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}$. Az *$f$ felszíni integrálja*

$$\int_A f \, dF = \int_A (f \circ g) \cdot |D_1 g \times D_2 g| \, ,$$

ha a jobb oldali integrál létezik.

A következő tétel – hasonló meggondolással, mint ahogy az 5.28. Green-tételnél láttuk – a Newton-Leibniz formula háromdimenziós variánsának tekinthető.

5.34. Tétel (22.61)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz ∂K határa véges sok, folytonosan differenciálható felületből áll. Ha az $f : \overline{K} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_{\partial K} f n \, dF = \int_K f',$$

ahol $n(x) \in \mathbb{R}^3$ az $x \in \partial K$ pontban a ∂K érintősíkjára merőleges, K-ból kifelé mutató egységvektor: a K ún. külső normálisa. *Így a fenti formula $n = (n_1, n_2, n_3)$ jelöléssel*

$$\int_{\partial K} f n_1 \, dF = \int_K D_1 f, \quad \int_{\partial K} f n_2 \, dF = \int_K D_2 f, \quad \int_{\partial K} f n_3 \, dF = \int_K D_3 f.$$

Az alábbi két tétel alapvető fontosságú a fizikában, ezen belül is az elektrodinamikában és a folyadékáramlások elméletében. Mindkettő a fenti tétel egyszerű következményeként bizonyítható.

5.35. Tétel (Gauss-Osztrogradszkij, 22.65)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz ∂K határa véges sok, folytonosan differenciálható felületből áll. Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_{\partial K} \langle f, n\rangle \, dF = \int_K \text{div} f,$$

ahol

$$\text{div} f = D_1 f_1 + D_2 f_2 + D_3 f_3.$$

5.36. Tétel (Stokes, 22.65)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz ∂K határa véges sok, folytonosan differenciálható felületből áll. Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor*

$$\int_{\partial K} (f \times n) \, dF = - \int_K \mathrm{rot} f,$$

ahol

$$\mathrm{rot} f = (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$$

és

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, b_1 a_3 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad a, b \in \mathbb{R}^3.$$

Tárgymutató