Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 2.

I. RÉSZ: BEUGRÓ FELADATOK

Név:

Az I. részre 30 perc van. Eldöntendő kérdésre csak igen/nem-el válaszoljon! A 12-ből 9 pontot kell elérni. Csak erre az oldalra, lehetőleg a pontozott részre írjon!

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2y^3, x^2 + \mathrm{e}^{xy}, \cos y)$. Mi lesz f-nek a $(2, 3)$ pontbeli Jacobi-mátrixában a 2. sor 1. eleme?

   ....

2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Igaz-e, hogy ha $\exists D_1 f(a, b)$, $\exists D_2 f(a, b)$, akkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ esetén $\exists D_v f(a, b)$?

   ....

3. Igaz-e, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban és a $\mathrm{d}^2 f(a, b)$ kvadratikus alak pozitív definit, akkor f-nek lokális minimuma van (a, b)-ben?

   ....

4. Legyen $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$. $q(t \cdot x) =?$ ....

5. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. $T^f_{1,(a,b)}(x, y) =?$

   ....

6. Alkalmazható-e az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (folytonosan differenciálható) függvényre az implicitfüggvény-tétel az $(1, 0)$ pontban? Válaszát fél mondatban indokolja!

   ....

7. Rektifikálható-e a $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t^3, \mathrm{e}^{-t^2})$ (sík)görbe? ....

8. Legyen h, $D_2 h : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos. Mi a $(c, d) \ni y \mapsto \int_a^b h(x, y)\, dx$ függvény deriváltja?

   ....

9. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, legyen $g : B(f(a), \varepsilon) \to \mathbb{R}^p$ folytonos, $f(g(x)) = x$, $g(f(a)) = a$. Milyen feltétellel alkalmazható az inverzfüggvény deriváltjára vonatkozó tétel?

   ....

10. $F(x) := f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x)) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$, legyen minden g_j és f differenciálható. $D_j F(x) =?$

    ....

11. Legyen $y'(x) = f(x) \cdot y(x)$, $F'(x) = f(x)$ I-n. $y(x) =?$

    ....

12. Melyik fontos, ebben a félévben tanult tételen múlt a Lagrange-féle multiplikátorelv bizonyítása?

    ....

Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 2.

II. RÉSZ: VIZSGAKÉRDÉSEK

Név:

A II. részre 90 perc van és 60 pontot ér. Várható pontozás: 24− 2, 33− 3, 42− 4, 51− 5.

1. (a) Definiálja egy kétszer differenciálható függvény (a, b) pontbeli 2. Taylor-polinomját! Mondja ki azt a tételt, ami arról szól, hogy ez a Taylor-polinom hogyan közelíti a függvényt! (Elég az 1. állítás.) (5 pont)

   (b) Bizonyítsa az állítást! (12 pont)

2. Definiálja egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény (pontbeli) deriváltjának fogalmát! Definiálja a Jacobi-mátrixot! (3+3 pont)

3. Mondja ki és bizonyítsa a görbe ívhosszát meghatározó formuláról szóló tételt!(4+6 pont)

4. Mondja ki az egyváltozós implicitfüggvény-tételt! Mondja ki a Lagrange-féle multiplikátor módszerről szóló tételt! Definiálja azt a fontos fogalmat, amiről ez utóbbi tétel szól!

   (8+6+2 pont)

5. Definiálja a primitív függvény fogalmát! Mivel ekvivalens egy folytonosan differenciálható függvény primitív függvényének létezése? Mondja ki a tanult tételt! A tétel bizonyításának „könnyebbik” iránya melyik állításból következik és hogyan? (3+5+3 pont)