Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 2.

I. rész: Beugró feladatok - megoldás

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2y^3, x^2 + \mathrm{e}^{xy}, \cos y)$. Mi lesz f-nek a $(2, 3)$ pontbeli Jacobi-mátrixában a 2. sor 1. eleme?

   Válasz: $4 + 3\mathrm{e}^6$

   (Számolás: A kérdéses elem $D_1f_2(2, 3) = (2x + y\mathrm{e}^{xy})(2, 3) = 4 + 3\mathrm{e}^6$.)

2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Igaz-e, hogy ha $\exists D_1f(a, b)$, $\exists D_2f(a, b)$, akkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ esetén $\exists D_vf(a, b)$?

   Válasz: Nem.

   (Indoklás: Egyszerű ellenpélda egy olyan függvény, mely a tengelyek mentén 1, azon kívül 0 – ez, a koordinátatengelyeket kivéve, semmilyen irány mentén nem folytonos, így nem is differenciálható... Dehát a tételt sem véletlenül úgy mondtuk ki, hogy f differenciálható (is) kell legyen...)

3. Igaz-e, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban és a $\mathrm{d}^2f(a, b)$ kvadratikus alak pozitív definit, akkor f-nek lokális minimuma van (a, b)-ben?

   Válasz: Nem.

   (Indoklás: Az még nyilván szükséges, hogy $D_1f(a, b) = D_2f(a, b) = 0$ legyen.)

4. Legyen $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$. $q(t \cdot x) =?$

   Válasz: $q(t \cdot x) = t^2 \cdot q(x)$.

5. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. $T^f_{1,(a,b)}(x, y) =?$

   Válasz: $T^f_{1,(a,b)}(x, y) = f(a, b) + D_1f(a, b) \cdot (x - a) + D_2f(a, b) \cdot (y - b)$.

6. Alkalmazható-e az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (folytonosan differenciálható) függvényre az implicitfüggvény-tétel az $(1, 0)$ pontban? Válaszát fél mondatban indokolja!

   Válasz: Nem, mert $D_2f(1, 0) = (2y)(1, 0) = 0$.

7. Rektifikálható-e a $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t^3, \mathrm{e}^{-t^2})$ (sík)görbe?

   Válasz: Igen.

   (Indoklás: Mert folytonosan differenciálható – ld. a megfelelő tételt.)

8. Legyen h, $D_2h : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos. Mi a $(c, d) \ni y \mapsto \int_a^b h(x, y)\, dx$ függvény deriváltja?

   Válasz: $\int_a^b D_2h(x, y)\, dx$

   (Ld. a paraméteres integrál deriválásáról szóló tételt.)

9. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, legyen $g : B(f(a), \varepsilon) \to \mathbb{R}^p$ folytonos, $f(g(x)) = x$, $g(f(a)) = a$. Milyen feltétellel alkalmazható az inverzfüggvény deriváltjára vonatkozó tétel?

   Válasz: $\det f'(a) \neq 0$ vagy az $f'(a)$ mátrix invertálható/injektív/bijektív...

10. $F(x) := f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x)) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$, legyen minden g_j és f differenciálható. $D_j F(x) =$?

    Válasz: $D_j F(x) = \sum_{i=1}^{q} (D_i f)(g_1(x), \ldots, g_q(x)) \cdot D_j g_i(x)$

    (Ld. láncszabály.)

11. Legyen $y'(x) = f(x) \cdot y(x)$, $F'(x) = f(x)$ I-n. $y(x) =$?

    Válasz: $c \cdot \mathrm{e}^{F(x)}$, $c \in \mathbb{R}$

12. Melyik fontos, ebben a félévben tanult tételen múlt a Lagrange-féle multiplikátorelv bizonyítása?

    Válasz: (Egyváltozós) implicitfüggvény-tétel.