Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 6.

I. RÉSZ: BEUGRÓ FELADATOK

Név:

Az I. részre 30 perc van. Eldöntendő kérdésre csak igen/nem-el válaszoljon! A 12-ből 9 pontot kell elérni. Csak erre az oldalra, lehetőleg a pontozott részre írjon!

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (y^2 + \sin(xy), x^3y^2, \mathrm{e}^{3y})$. Mi lesz f-nek a $(2, 3)$ pontbeli Jacobi-mátrixában a 1. sor 2. eleme?

   . . . .

2. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Mikor teljesül, hogy $A = f'(a)$, ahol $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés?

   . . . .

3. Igaz-e, hogy ha $D_1f(0, 0) = D_2f(0, 0) = 0$, akkor f-nek lokális szélsőértéke van $(0, 0)$-ban?

   . . . .

4. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a, b]$ szakasz pontjaiban, $[a, b] \subset \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Mit mond ki a Lagrange-középértéktétel?

   . . . .

5. Igaz-e, hogy ha $\exists D_{12}f(a, b)$, $\exists D_{21}f(a, b)$, akkor $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$?

   . . . .

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Igaz-e, hogy ha tetszőleges $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ esetén $\exists D_vf(a, b)$, akkor f differenciálható (a, b)-ben?

   . . . .

7. Mi a $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x, y) = x^2 - y^2$ kvadratikus alak definitsége?

   . . . .

8. Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ differenciálható függvénynek van primitív függvénye, akkor tetszőleges pontbeli Jacobi-mátrixa szimmetrikus?

   . . . .

9. Tegyük fel, hogy egy $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^p)$ függvénynek minden $g : [a, b] \to \Omega$ zárt görbe mentén a vonalintegrálja 0. Milyen feltétellel következik ebből, hogy f-nek van primitív függvénye?

   . . . .

10. Mi az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának ívhossza?

    . . . .

11. Alkalmazható-e az inverzfüggvény-tétel az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$ függvényre a $(0, 0)$ pontban?

    . . . .

12. Milyen fontos, ebben a félévben tanult tételen múlt az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tétel bizonyítása?

    . . . .

Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 6.

II. RÉSZ: VIZSGAKÉRDÉSEK

Név:

Ez a vizsga tévedésből csak 50 pontot ér. Így a pontozás: 20− 2, 27,5− 3, 35− 4, 42,5− 5.

1. (a) Mondja ki a folytonos függvény primitív függvényének létezésére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel(ek)ről szóló tételt! (6 pont)

   (b) Bizonyítsa az állításnak azt a részét, ami a megfelelő feltétel(ek)ből következtet a primitív függvény létezésére! (11 pont)

2. Definiálja egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény (pontbeli) differenciálhatóságának fogalmát! (2 pont)

3. Mondja ki a tanult Newton-Leibniz formulát! Definiálja a tétel kimondásában szereplő *összes* fogalmat! (4+10 pont)

4. Mondja ki az inverzfüggvény-tételt! (7 pont)

5. Mondja ki és bizonyítsa egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ iránymenti deriváltját meghatározó formuláról szóló állítást! (4+6 pont)