Matematika tanár Bsc Analízis IV. vizsga, 2011. június 6.

I. rész: Beugró feladatok – megoldás

1. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (y^2 + \sin(xy), x^3y^2, \mathrm{e}^{3y})$. Mi lesz f-nek a $(2,3)$ pontbeli Jacobi-mátrixában a 1. sor 2. eleme?

   Válasz: $6 + 2\cos 6$.

   (Számolás: a kérdéses elem $D_2 f_1(2,3) = (2y + x\cos(xy))(2,3) = 6 + 2\cos 6$.)

2. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Mikor teljesül, hogy $A = f'(a)$, ahol $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés?

   Válasz: Ha $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_{\mathbb{R}^q}$.

3. Igaz-e, hogy ha $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$, akkor f-nek lokális szélsőértéke van $(0,0)$-ban?

   Válasz: Nem.

4. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $[a,b]$ szakasz pontjaiban, $[a,b] \subset \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Mit mond ki a Lagrange-középértéktétel?

   Válasz: Létezik $c \in [a,b] : f(b) - f(a) = \langle f'(c), b-a\rangle$.

5. Igaz-e, hogy ha $\exists D_{12} f(a,b)$, $\exists D_{21} f(a,b)$, akkor $D_{12} f(a,b) = D_{21} f(a,b)$?

   Válasz: Nem.

   (Szerepelt ellenpélda, nameg a Young-tételben sem véletlenül tettünk fel még plusz feltételt...)

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Igaz-e, hogy ha tetszőleges $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$ esetén $\exists D_v f(a,b)$, akkor f differenciálható (a,b)-ben?

   Válasz: Nem.

   (Nagyon egyszerű ellenpélda van, ahol f-nek mégcsak határértéke sincs (a,b)-ben.)

7. Mi a $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 - y^2$ kvadratikus alak definitsége?

   Válasz: Indefinit.

   (Pl. $q(1,0) = 1 > 0$, $q(0,1) = -1 < 0$.)

8. Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ differenciálható függvénynek van primitív függvénye, akkor tetszőleges pontbeli Jacobi-mátrixa szimmetrikus?

   Válasz: Igen.

   (Ez az irány mindig teljesül a Young-tétel miatt.)

9. Tegyük fel, hogy egy $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^p)$ függvénynek minden $g : [a,b] \to \Omega$ zárt görbe mentén a vonalintegrálja 0. Milyen feltétellel következik ebből, hogy f-nek van primitív függvénye?

   Válasz: f folytonos.

10. Mi az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény grafikonjának ívhossza?

    Válasz: $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$

11. Alkalmazható-e az inverzfüggvény-tétel az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$ függvényre a $(0, 0)$ pontban?

    Válasz: Igen.

    (Indoklás: a folytonos differenciálhatóság nyilván teljesül, másrészt az f $(0, 0)$ pontbeli Jacobi-mátrixára $f'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ invertálható.)

12. Milyen fontos, ebben a félévben tanult tételen múlt az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tétel bizonyítása?

    Válasz: Kompozíciófüggvény deriválásáról szóló tétel.