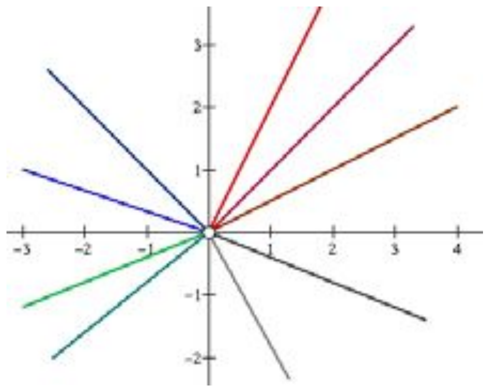
Analízis IV. gyakorlat, megoldások

BSc matematikatanár szakirány
2010/2011. tavaszi félév

1. Differenciálegyenletek

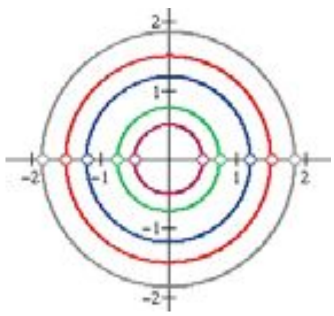
Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes, valamint a megadott feltételeket kielégítő megoldásait!

1. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$
   Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
   1. konstans megoldások: $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x \in I$.
   2. $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y(x)| = \ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = |x| \cdot \mathrm{e}^c$
   Összes megoldás: $y(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$



1. ábra. 1. feladat

2. $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$
   Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.
   1. konstans megoldás: nincs, ui. $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Leftrightarrow x = 0$
   2. $y'(x) \cdot y(x) = -x \Rightarrow \frac{1}{2}y^2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}c^2$
   Összes megoldás: $y(x) = \sqrt{-x^2 + c^2}$ és $y(x) = -\sqrt{-x^2 + c^2}$, $\mathcal{D}(y) = (-c, c)$ $(c \in \mathbb{R}^+)$



2. ábra. 2. feladat

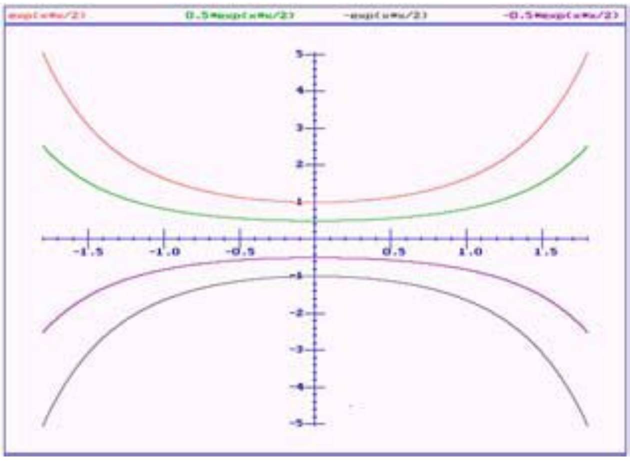
3. $y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(1) = 1$

   Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.

   1. konstans megoldások: $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$
   2. $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = x \Rightarrow \ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^c$

   Összes megoldás: $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

   3. Kezdetiérték-feladat: $y(1) = 1 \Rightarrow c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow c = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}$



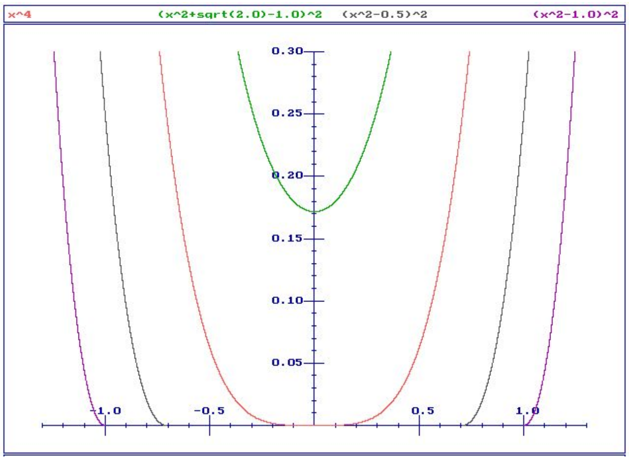
3. ábra. 3. feladat

4. $y'(x) = 4x \cdot \sqrt{y(x)}$

   Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.

   1. konstans megoldások: $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$
   2. $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = 2x \Rightarrow \sqrt{y(x)} = x^2 + c$

   Összes megoldás: $y(x) = (x^2 + c)^2$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$, ha $c \geq 0$, és $\mathcal{D}(y) = (\sqrt{|c|}, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, -\sqrt{|c|})$, ha $c < 0$



4. ábra. 4. feladat

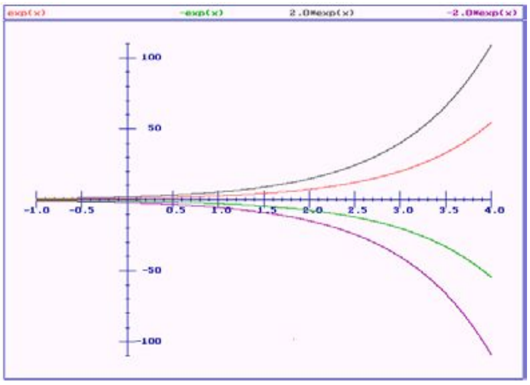
5. $y'(x) = \lambda \cdot y(x)\, (\lambda \in \mathbb{R}), \quad y(0) = -2$

   Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.

   1. konstans megoldások: $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$
   2. $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \lambda \Rightarrow \ln|y(x)| = \lambda \cdot x + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot \mathrm{e}^c$

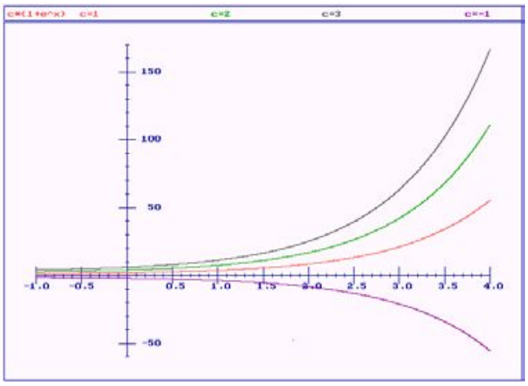
   Összes megoldás: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot c$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

   3. Kezdetiérték-feladat: $y(0) = -2 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y(x) = -2\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$



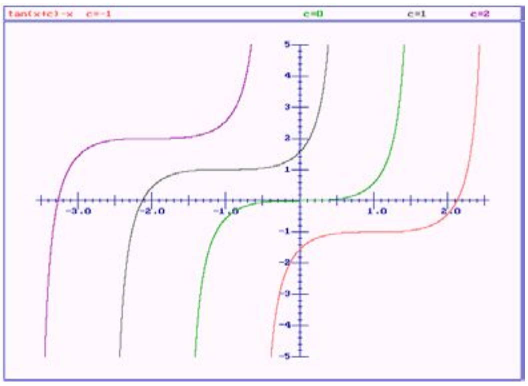
5. ábra. 5. feladat

6. $(1+\mathrm{e}^x)\cdot y'(x) = y(x)\cdot \mathrm{e}^x$
Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.
1. konstans megoldások: $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$
2. $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \Rightarrow \ln|y(x)| = \ln(1+\mathrm{e}^x) + c \Rightarrow |y(x)| = (1+\mathrm{e}^x)\cdot \mathrm{e}^c$
Összes megoldás: $y(x) = (1+\mathrm{e}^x)\cdot c$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$



6. ábra. 6. feladat

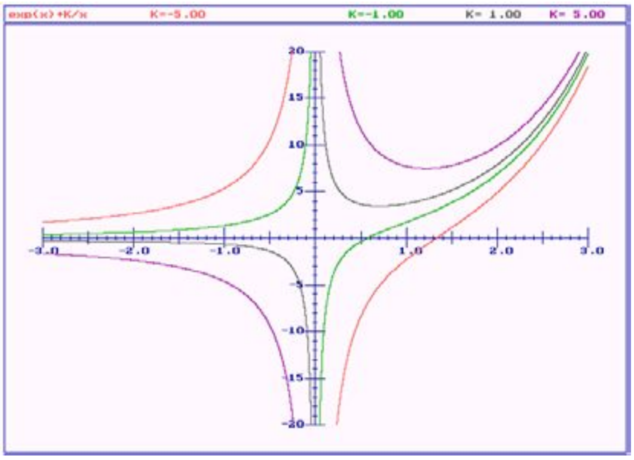
7. $y'(x) = (x + y(x))^2$
Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük. Alkalmazzuk a $z(x) = x + y(x)$ helyettesítést! Ekkor $z'(x) - 1 = z^2(x) \Rightarrow \frac{z'(x)}{1+z^2(x)} = 1 \Rightarrow \arctan z(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow z(x) = \tan(x+c)$
$\Rightarrow y(x) = \tan(x+c) - x$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c)$



7. ábra. 7. feladat

8. $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e}$

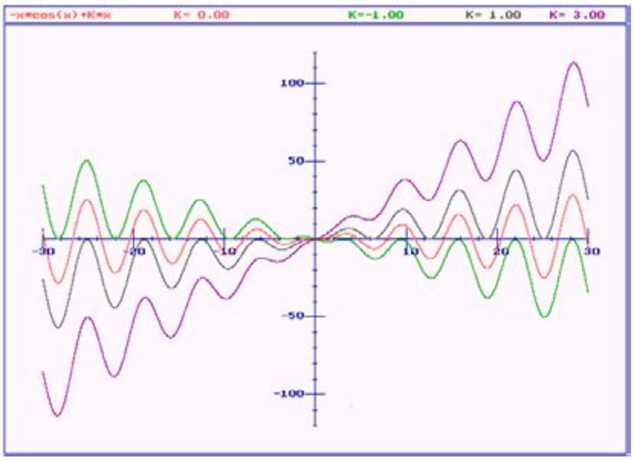
Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = -\frac{y(x)}{x} \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y(x)| = -\ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot \frac{1}{|x|} \Rightarrow y(x) = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = \frac{c(x)}{x}$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x)\cdot\frac{1}{x} - c(x)\cdot\frac{1}{x^2} + c(x)\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x}\cdot\mathrm{e}^x \Rightarrow c'(x) = (x+1)\cdot\mathrm{e}^x$, parciális integrálással $c(x) = x\cdot\mathrm{e}^x + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = \mathrm{e}^x + \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(1) = \mathrm{e} \Rightarrow \mathrm{e} + K = \mathrm{e} \Rightarrow K = 0 \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^x$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$



8. ábra. 8. feladat

9. $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

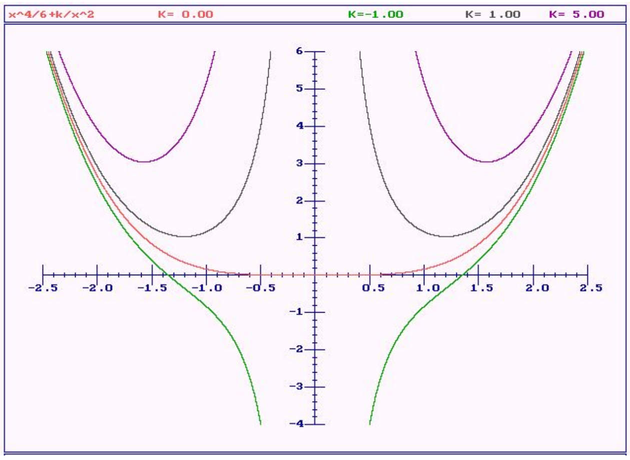
Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y(x)| = \ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot |x| \Rightarrow y(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x) \cdot x$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x)\cdot x + c(x) - c(x) = x \cdot \sin x \Rightarrow c'(x) = \sin x \Rightarrow c(x) = -\cos x + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = -x \cdot \cos x + K \cdot x$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow K \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow K = \frac{2}{\pi} \Rightarrow y(x) = -x\cdot\cos x + \frac{2x}{\pi}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$



9. ábra. 9. feladat

10. $y'(x) + \dfrac{2}{x} \cdot y(x) = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}$

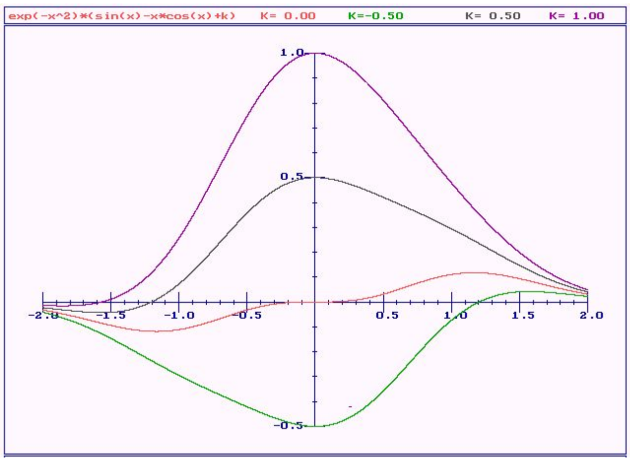
Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = -\frac{2}{x} \cdot y(x) \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x} \Rightarrow$ $\ln|y(x)| = -2\ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow y(x) = c \cdot \frac{1}{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = \frac{c(x)}{x^2}$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x) \cdot \frac{1}{x^2} - 2c(x) \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{2c(x)}{x^3} = x^3 \Rightarrow c'(x) = x^5 \Rightarrow c(x) = \frac{x^6}{6} + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = \frac{1}{6} \cdot x^4 + \frac{K}{x^2}$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(1) = -\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} + K = -\frac{5}{6} \Rightarrow K = -1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{1}{x^2}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$



10. ábra. 10. feladat

11. $y'(x) + 2x \cdot y(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x, \quad y(0) = 1$

Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = -2x \cdot y(x) \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -2x \Rightarrow$ $\ln|y(x)| = -x^2 + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 2x \cdot c(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + 2x \cdot c(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x \Rightarrow c'(x) = x \cdot \sin x$, parciális integrálással $c(x) = -x \cdot \cos x + \sin x + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = (-x \cdot \cos x + \sin x + K) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y(x) = (-x \cdot \cos x + \sin x + 1) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$



11. ábra. 11. feladat

2. Parciális deriválás

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeit!

12. $f(x,y) = x$

    $D_1 f(x,y) = 1, \quad D_2 f(x,y) = 0$

13. $f(x,y) = x^2 y$

    $D_1 f(x,y) = 2xy, \quad D_2 f(x,y) = x^2$

14. $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$

    $D_1 f(x,y) = 2x - 2y - 1, \quad D_2 f(x,y) = -2x + 2y$

15. $f(x,y) = (x^3 - 2x^2 y + y^2)^7$

    $D_1 f(x,y) = 7(x^3 - 2x^2 y + y^2)^6 \cdot (3x^2 - 4xy), \quad D_2 f(x,y) = 7(x^3 - 2x^2 y + y^2)^6 \cdot (-2x^2 + 2y)$

16. $f(x,y) = \sqrt{x^2 y^2 - 1}$

    $D_1 f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}}$

17. $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

    $D_1 f(x,y) = 2x \cdot \cos(x^2 + y^2), \quad D_2 f(x,y) = 2y \cdot \cos(x^2 + y^2)$

18. $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}}$

    $D_1 f(x,y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2x-y}}\right), \quad D_2 f(x,y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{2x-y}}$

    $D_{11} f(x,y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-y}} \cdot \left(-2 + \frac{x}{\sqrt{2x-y}} + \frac{x}{2x-y}\right)$

    $D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-y}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2x-y}} - \frac{x}{2x-y}\right)$

    $D_{22} f(x,y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}} \cdot \frac{x}{4\cdot(2x-y)} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x-y}}\right)$

19. $f(x,y) = xy\cos x^2 y^2$

    $D_1 f(x,y) = y\cos x^2 y^2 - 2x^2 y^3 \sin x^2 y^2, \quad D_2 f(x,y) = x\cos x^2 y^2 - 2x^3 y^2 \sin x^2 y^2$

    $D_{11} f(x,y) = -6xy^3 \cdot \sin x^2 y^2 - 4x^3 y^5 \cdot \cos x^2 y^2, \quad D_{22} f(x,y) = -6x^3 y \cdot \sin x^2 y^2 - 4x^5 y^3 \cdot \cos x^2 y^2$

    $D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = \cos x^2 y^2 \cdot \left(1 - 4x^4 y^4\right) - 8x^2 y^2 \cdot \sin x^2 y^2$

20. $f(x,y) = xy\ln(x+y)$

    $D_1 f(x,y) = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}, \quad D_2 f(x,y) = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$

21. $f(x,y) = \frac{1}{x\sin\frac{1}{y}}$

    $D_1 f(x,y) = -\frac{1}{x^2 \sin\frac{1}{y}}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{\frac{1}{y^2}\cos\frac{1}{y}}{x\sin^2\frac{1}{y}}$

22. $f(x,y) = 2^{-\frac{x}{y}}$

    $D_1 f(x,y) = -\frac{\ln 2}{y} \cdot 2^{-\frac{x}{y}}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{x\ln 2}{y^2} \cdot 2^{-\frac{x}{y}}$

23. $f(x,y) = \frac{x^2 + 3xy - 1}{y^2 + 3xy - 1}$

    $D_1 f(x,y) = \frac{3y^3 + 2xy^2 + 3x^2 y - 2x}{(y^2 + 3xy - 1)^2}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{-3x^3 - 2x^2 y - 3xy^2 + 2y}{(y^2 + 3xy - 1)^2}$

24. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2 y^2}$

    $D_1 f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{xy^2}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}, \quad D_2 f(x,y) = -\frac{x^2 y}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}$

25. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$

    $D_1 f(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

26. $f(x,y)=\frac{x\arcsin y}{y\arccos x}$

    $D_1f(x,y)=\frac{\arcsin y}{y\cdot\arccos^2 x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arccos x\right),\quad D_2f(x,y)=\frac{x\arccos x}{y^2\cdot\arccos^2 x}\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}+\arcsin y\right)$

27. $f(x,y)=x^y$

    $D_1f(x,y)=y\cdot x^{y-1}\ (y\neq 0),\quad D_2f(x,y)=\ln x\cdot x^y$

Számítsuk ki az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!

28. $f(x,y)=x^3-3x^2y+xy^2+y^3$

    $D_1f(x,y)=3x^2-6xy+y^2,\quad D_2f(x,y)=-3x^2+2xy+3y^2$
    $D_{11}f(x,y)=6x-6y,\quad D_{12}f(x,y)=D_{21}f(x,y)=-6x+2y,\quad D_{22}f(x,y)=2x+6y$

29. $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

    $D_1f(x,y)=\frac{2y}{(x+y)^2},\quad D_2f(x,y)=-\frac{2x}{(x+y)^2}$
    $D_{11}f(x,y)=-\frac{4y}{(x+y)^3},\quad D_{12}f(x,y)=D_{21}f(x,y)=\frac{2x-2y}{(x+y)^3},\quad D_{22}f(x,y)=\frac{4x}{(x+y)^3}$

30. $f(x,y)=\sin x\cos y$

    $D_1f(x,y)=\cos x\cos y,\quad D_2f(x,y)=-\sin x\sin y$
    $D_{11}f(x,y)=D_{22}f(x,y)=-\sin x\cos y,\quad D_{12}f(x,y)=D_{21}f(x,y)=-\cos x\sin y$

31. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$

    $D_1f(x,y)=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\quad D_2f(x,y)=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$
    $D_{11}f(x,y)=-\frac{2y^2-6x^2}{(x^2+y^2)^3},\quad D_{12}f(x,y)=D_{21}f(x,y)=\frac{8xy}{(x^2+y^2)^3},\quad D_{22}f(x,y)=-\frac{2x^2-6y^2}{(x^2+y^2)^3}$

32. $f(x,y)=\ln\frac{x+y}{x-y}$

    $D_1f(x,y)=\frac{-2y}{x^2-y^2},\quad D_2f(x,y)=\frac{2x}{x^2-y^2}$
    $D_{11}f(x,y)=D_{22}f(x,y)=\frac{4xy}{(x^2-y^2)^2},\quad D_{12}f(x,y)=D_{21}f(x,y)=-2\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$

33. $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x-y}$

    $D_1f(x,y)=D_2f(x,y)=-\mathrm{e}^{-x-y}$
    $D_{11}f(x,y)=D_{22}f(x,y)=D_{12}f(x,y)=D_{21}f(x,y)=\mathrm{e}^{-x-y}$

3. Differenciálhatóság

(*Ismétlés*) Számítsuk ki az alábbi határértékeket (ha léteznek)!

34. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

    Megoldás: Polárkoordinátás helyettesítéssel $\lim\limits_{r\to 0} r\cos\varphi\sin\varphi=0$, tehát a határérték létezik és 0.

35. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$

    Megoldás: $y=kx$ helyettesítéssel különböző k-kra más a határérték, $\frac{k}{1+k^2}$ $\Rightarrow$ nem létezik.

36. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

    Megoldás: Polárkoordinátás helyettesítéssel $\lim\limits_{r\to 0} r^2\cos^2\varphi\sin\varphi=0$, tehát a határérték létezik és 0.

37. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

    Megoldás: Polárkoordinátás helyettesítéssel $\lim\limits_{r\to 0} r^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi=0$, tehát a határérték létezik és 0.

38. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

    Megoldás: Polárkoordinátás helyettesítéssel $\lim\limits_{r\to 0} r^2\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)=0$, tehát a határérték létezik és 0.

39. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Megoldás: $y = kx$ helyettesítéssel különböző k-kra más a határérték, $\frac{\sqrt[3]{1+k^3}}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow$ nem létezik.

Differenciálhatók-e a $(0,0)$-ban a következő függvények?

40. $f(x,y) = xy$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1f(0,0) = (x\cdot 0)'(0) = 0$, $D_2f(0,0) = (0\cdot y)'(0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-D_1f(0,0)\cdot(x-0)-D_2f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

a 34. feladat alapján $\Rightarrow f$ differenciálható a $(0,0)$-ban, $f'(0,0) = (0,0)$.

41. $f(x,y) = \sqrt{xy}$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1f(0,0) = (\sqrt{x\cdot 0})'(0) = 0$, $D_2f(0,0) = (\sqrt{0\cdot y})'(0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-D_1f(0,0)\cdot(x-0)-D_2f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x\cdot y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \nexists$$

a 35. feladat alapján $\Rightarrow f$ nem differenciálható a $(0,0)$-ban.

42. $f(x,y) = x^2y$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1f(0,0) = (x^2\cdot 0)'(0) = 0$, $D_2f(0,0) = (0\cdot y)'(0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-D_1f(0,0)\cdot(x-0)-D_2f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

a 36. feladat alapján $\Rightarrow f$ differenciálható a $(0,0)$-ban, $f'(0,0) = (0,0)$.

43. $f(x,y) = x^2y^2$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1f(0,0) = (x^2\cdot 0)'(0) = 0$, $D_2f(0,0) = (0\cdot y^2)'(0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-D_1f(0,0)\cdot(x-0)-D_2f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

a 37. feladat alapján $\Rightarrow f$ differenciálható a $(0,0)$-ban, $f'(0,0) = (0,0)$.

44. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Megoldás: $D_1f(0,0) = (\sqrt{x^2+0})'(0) = (|x|)'(0) \nexists \Rightarrow f$ nem differenciálható a $(0,0)$-ban.

45. $f(x,y) = x^2+y^2$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1f(0,0) = (x^2+0)'(0) = (2x)(0) = 0$, $D_2f(0,0) = (0+y^2)'(0) = (2y)(0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-D_1f(0,0)\cdot(x-0)-D_2f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} r = 0$$

polárkoordinátás helyettesítéssel $\Rightarrow f$ differenciálható a $(0,0)$-ban, $f'(0,0) = (0,0)$.

46. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1f(0,0) = (\sqrt[3]{x^3+0})'(0) = (x)'(0) = 1$, $D_2f(0,0) = (\sqrt[3]{0+y^3})'(0) = (y)'(0) = 1$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-D_1f(0,0)\cdot(x-0)-D_2f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \nexists$$

$y = kx$ helyettesítéssel, ill. a 39. feladat alapján $\Rightarrow f$ nem differenciálható a $(0,0)$-ban.

47. $f(x,y) = \sqrt{x^6 + y^6}$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1 f(0,0) = (\sqrt{x^6 + 0})'(0) = (|x^3|)'(0) = (3x^2 \operatorname{sgn} x)(0) = 0$, $D_2 f(0,0) = (\sqrt{0 + y^6})'(0) = (|y^3|)'(0) = (3y^2 \operatorname{sgn} y)(0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - D_1 f(0,0)\cdot(x-0) - D_2 f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^6+y^6}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} r^2 \cdot \sqrt{\cos^6\varphi + \sin^6\varphi} = 0$$

polárkoordinátás helyettesítéssel $\Rightarrow$ f differenciálható a $(0,0)$-ban, $f'(0,0) = (0,0)$. Vagy:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^6+y^6}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^4 - x^2y^2 + y^4} = 0.$$

48. $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

Megoldás: $f(0,0) = 0$, $D_1 f(0,0) = (\sqrt{x^4 + 0})'(0) = (x^2)'(0) = (2x)(0) = 0$, $D_2 f(0,0) = (\sqrt{0 + y^4})'(0) = (y^2)'(0) = (2y)(0) = 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - D_1 f(0,0)\cdot(x-0) - D_2 f(0,0)\cdot(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

a 38. feladat alapján $\Rightarrow$ f differenciálható a $(0,0)$-ban, $f'(0,0) = (0,0)$.

Differenciálhatók-e a következő függvények az értelmezési tartományukon?

49. $f(x,y) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+y^3)}$

Megoldás: $D_1 f(x,y) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+y^3)} \cdot (-\sin(x^2+y^3)) \cdot 2x$, $D_2 f(x,y) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+y^3)} \cdot (-\sin(x^2+y^3)) \cdot 3y^2$ folytonosak $\mathbb{R}^2$-en $\Rightarrow$ f differenciálható $\mathbb{R}^2$-en.

50. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

Megoldás: $D_1 f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $D_2 f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ folytonosak $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n $\Rightarrow$ f differenciálható $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n.

51. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Megoldás: $D_1 f(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $D_2 f(x,y) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ folytonosak $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n $\Rightarrow$ f differenciálható $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n.

Határozzuk meg az alábbi iránymenti deriváltakat!

52. $f(x,y) = (x-y)^2$, $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $D_v f(0,0) = ?$

Megoldás: Mivel f differenciálható $(0,0)$-ban, $|v| = 1$, $D_1 f(0,0) = (x^2)'(0) = 0$, $D_2 f(0,0) = (-y^2)'(0) = 0$, ezért $D_v f(0,0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

53. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $v = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}})$, $D_v f(3,1) = ?$

Megoldás: Mivel f differenciálható $(3,1)$-ben, $|v| = 1$, $D_1 f(3,1) = (x^2+1)'(3) = 6$, $D_2 f(3,1) = (9+y^2)'(1) = 2$, ezért $D_v f(3,1) = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + 2 \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} = 0$.

54. Mely irány mentén 0 az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + \mathrm{e}^y$ függvény deriváltja a $(2,0)$ pontban? Mely irány mentén maximális?

Megoldás: Mivel f differenciálható $(2,0)$-ban, $D_1 f(2,0) = (x^3+1)'(2) = 12$, $D_2 f(2,0) = (8 + y^3 - 6y + \mathrm{e}^y)'(0) = (3y^2 - 6 + \mathrm{e}^y)(0) = -5$, ezért $D_v f(2,0) = \langle (12,-5), (v_1,v_2) \rangle$. Ez pontosan akkor 0, ha v iránya merőleges a $(12,-5)$ vektorra, tehát

$$v = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right), \text{ vagy } v = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right).$$

$D_v f(2,0)$ pontosan akkor maximális, ha v iránya megegyezik a $(12,-5)$ vektor irányával, vagyis $v = (\frac{12}{13}, -\frac{5}{13})$.

55. $f(x,y) = \frac{25x^2y}{x^2+y^3}$, v az $x + 3y = 5$ egyenes irányvektora, $D_vf(2,1) =$?

Megoldás: Mivel f differenciálható $(2,1)$-ben, $D_1f(2,1) = (\frac{25x^2}{x^2+1})'(2) = (\frac{50x}{(x^2+1)^2})(2) = 4$, $D_2f(2,1) = (\frac{100y}{4+y^3})'(1) = (\frac{400-200y^3}{(4+y^3)^2})(1) = 8$, az egyenes egyik irányvektora $v = (\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, másik $u = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}})$, ezért

$$D_vf(2,1) = 4 \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} + 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{4}{\sqrt{10}},$$

$$D_uf(2,1) = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 8 \cdot \frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

Írjuk fel az alábbi függvények érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban!

56. $f(x,y) = 4x^2 - 16x + y^2 + 6y + 18$, $P = (2,1)$

Megoldás: $f(2,1) = 9$, $D_1f(2,1) = (4x^2 - 16x + 25)'(2) = 0$, $D_2f(2,1) = (y^2 + 6y + 2)'(1) = 8$, az egyenlet: $z = 9 + 0 \cdot (x-2) + 8 \cdot (y-1) = 1 + 8y$.

57. $f(x,y) = x^2y + y^2 + 2y$, $P = (3,4)$

Megoldás: $f(3,4) = 60$, $D_1f(3,4) = (4x^2 + 24)'(3) = 24$, $D_2f(3,4) = (9y + y^2 + 2y)'(4) = 19$, az egyenlet: $z = 60 + 24 \cdot (x-3) + 19 \cdot (y-4) = 24x + 19y - 88$.

58. $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$, $P = (1,1)$

Megoldás: $f(1,1) = \frac{\pi}{4}$, $D_1f(1,1) = (\arctan\frac{1}{x})'(1) = (\frac{-1}{x^2+1})(1) = -\frac{1}{2}$, $D_2f(1,1) = (\arctan y)'(1) = \frac{1}{2}$, az egyenlet: $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (y-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

59. $f(x,y) = 2x^4y^3 + 3x^2y^2$, $P = (1,1)$

Megoldás: $f(1,1) = 5$, $D_1f(1,1) = (2x^4 + 3x^2)'(1) = 14$, $D_2f(1,1) = (2y^3 + 3y^2)'(1) = 12$, az egyenlet: $z = 5 + 14 \cdot (x-1) + 12 \cdot (y-1) = 14x + 12y - 21$.

3. Differenciálhatóság, folytatás

Számítsuk ki a következő többszörös parciális deriváltakat!

60. $f(x,y) = x^3y$, $D_{12}f(x,y)$, $D_{21}f(x,y)$;

$D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y) = 3x^2$

61. $f(x,y) = x \cdot \ln y$, $D_1^2D_2f(x,y)$;

$D_1^2D_2f(x,y) = 0$

62. $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz}$, $D_1D_2D_3f(x,y,z)$;

$D_1D_2D_3f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz} \cdot \big(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1\big)$

63. $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y$, $D_1^mD_2^nf(x,y)$.

$$D_1^mD_2^nf(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^x \cdot \sin y, & n \equiv 0\,(4); \\ \mathrm{e}^x \cdot \cos y, & n \equiv 1\,(4); \\ -\mathrm{e}^x \cdot \sin y, & n \equiv 2\,(4); \\ -\mathrm{e}^x \cdot \cos y, & n \equiv 3\,(4). \end{cases}$$

64. * Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}}$, $x \neq 0$. Számítsuk ki a $\Delta f = \sum_{i=1}^n D_i^2 f$értékét! ($f$ *Laplace*-át)

Beadható házi feladat március 31-ig!

65. Igazoljuk, hogy az alábbi függvényre nem teljesül a Young-tétel a $(0,0)$ pontban!

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Megoldás:

$$D_1f(x,y)=\begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$D_2f(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Ebből látható, hogy $D_1f(0,y)=-y$, tehát $D_{21}f(0,0)=-1$, másrészt $D_2f(x,0)=x$, tehát $D_{12}f(0,0)=1$.

Írjuk fel az alábbi függvények érintősíkjának egyenletét a megadott pontokban, továbbá végezzük el a megadott feladatokat!

66. $f(x,y)=4x^2-16x+y^2+6y+18$, $P=(2,1)$

Adjunk az érintősík segítségével közelítést $f(2,01;1,02)$-re!

Megoldás: $f(2,01;1,02)=9,1608$, az 56. feladat alapján az érintősík egyenlete: $z=9+0\cdot(x-2)+8\cdot(y-1)=1+8y$. Így a közelítés $1+8\cdot 1,02=9,16$.

Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját is!

Megoldás: $D_{11}f(2,1)=(8x-16)'(2)=8$, $D_{12}f(2,1)=(8)'(2)=0$, $D_{22}f(2,1)=(2y+6)'(1)=2$,

$$\begin{aligned}T^f_{2,(2,1)}(x,y)&=9+0\cdot(x-2)+8\cdot(y-1)+\frac{1}{2}\left(8\cdot(x-2)^2+2\cdot 0\cdot(x-2)(y-1)+2\cdot(y-1)^2\right)\\ &=1+8y+4x^2-16x+16+y^2-2y+1=4x^2-16x+y^2+6y+18\end{aligned}$$

megegyezik az eredeti függvénnyel, hiszen az egy másodfokú polinom. Így $T^f_{2,(2,1)}(2,01;1,02)=f(2,01;1,02)=9,1608$ pontos értéket ad.

67. $f(x,y)=x^2y+y^2+2y$, $P=(3,4)$

Adjunk az érintősík segítségével közelítést $f(3,09;3,92)$-re!

Megoldás: $f(3,09;3,92)=60,634952$, az 57. feladat alapján az érintősík egyenlete: $z=60+24\cdot(x-3)+19\cdot(y-4)=24x+19y-88$. Így a közelítés $60+24\cdot 0,09+19\cdot(-0,08)=60,64$.

Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját is!

Megoldás: $D_{11}f(3,4)=(8x)'(3)=8$, $D_{12}f(3,4)=(x^2+10)'(3)=6$, $D_{22}f(3,4)=(11+2y)'(4)=2$,

$$T^f_{2,(3,4)}(x,y)=60+24\cdot(x-3)+19\cdot(y-4)+\frac{1}{2}\left(8\cdot(x-3)^2+2\cdot 6\cdot(x-3)(y-4)+2\cdot(y-4)^2\right).$$

A Taylor polinom $T^f_{2,(3,4)}(3,09;3,92)=60,64+4\cdot 0,0081-6\cdot 0,0072+0,0064=60,6356$ jobb közelítést ad.

68. $f(x,y)=2x^4y^3+3x^2y^2$, $P=(1,1)$

Írjuk fel a függvény P körüli 2. Taylor-polinomját!

Megoldás: $D_{11}f(1,1)=(8x^3+6x)'(1)=30$, $D_{12}f(1,1)=(6x^4+6x^2)'(1)=36$, $D_{22}f(1,1)=(6y^2+6y)'(1)=18$, az 59. feladat alapján

$$T^f_{2,(1,1)}(x,y)=5+14\cdot(x-1)+12\cdot(y-1)+\frac{1}{2}\left(30\cdot(x-1)^2+2\cdot 36\cdot(x-1)(y-1)+18\cdot(y-1)^2\right).$$

4. Szélsőértékszámítás

Állapítsuk meg a következő függvényekről, hogy van-e lokális szélsőértékük, és ha igen, hol, és ezek mekkorák!

69. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

    Megoldás: $f'(x,y) = (3(x^2-y), 3(y^2-x))$ és $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$ és az $(1,1)$ pontok. A $(0,0)$ pontban $f''(0,0)$ indefinit ($\det f''(0,0) = -9 < 0$), így itt nyeregpontja van f-nek, az $(1,1)$ pontban pedig $f''(1,1)$ pozitív definit ($\det f''(1,1) = 27$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), így itt lokális minimuma van f-nek, $f(1,1) = -1$.

70. $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

    Megoldás: $f'(x,y) = (4x^3-4y, -4x+4y^3)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$, $\pm(1,1)$ pontok. A $(0,0)$ pontban $f''(0,0)$ indefinit ($\det f''(0,0) = -16 < 0$), így itt f-nek nyeregpontja van. A $\pm(1,1)$ pontokban $f''(\pm1,\pm1)$ pozitív definit ($\det f''(\pm1,\pm1) > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), tehát ezekben a pontokban f-nek lokális minimuma van, $f(1,1) = -2$, $f(-1,-1) = -2$.

71. $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$

    Megoldás: $f'(x,y) = (\mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y), \mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y))$. f' zérushelyei a $(0,0)$ és $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$. Mivel $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ pozitív definit ($\det f''(0,0) = 60 > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), ezért $(0,0)$ lokális minimumhely, $f(0,0) = 0$. $f''(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-2} \begin{pmatrix} 14 & -9 \\ -9 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ indefinit ($\det f''(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-2}(-60) < 0$), ezért $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ nyeregpont.

72. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

    Megoldás: $f'(x,y) = (2x + y - \frac{4}{x}, x + 2y - \frac{10}{y})$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{pmatrix}$. f' zérushelyei az $(1,2)$ és $(-1,-2)$ pontok, de f értelmezési tartománya miatt csak az $(1,2)$ jöhet szóba. Mivel $f''(1,2)$ pozitív definit ($\det f''(1,2) = 26 > 0$ és a mátrix bal felső eleme 6 pozitív), ezért $(1,2)$ lokális minimumhely, $f(1,2) = 7 - 10\ln 2$.

73. $f(x,y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$

    Megoldás: $f'(x,y) = ((2x-6)(y^2-4y), (x^2-6x)(2y-4))$, f' zérushelyei a $(0,0)$, $(0,4)$, $(6,0)$, $(6,4)$ és $(3,2)$ pontok. $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y^2-4y) & (2x-6)(2y-4) \\ (2x-6)(2y-4) & 2(x^2-6x) \end{pmatrix}$. Könnyen látható, hogy $\det f''(0,0) = \det f''(0,4) = \det f''(6,0) = \det f''(6,4) = -24^2 < 0$, ezért ezeken a helyeken nincs lokális szélsőértéke f-nek. Másrészt $f''(3,2)$ negatív definit ($\det f''(3,2) = 8 \cdot 18 > 0$ és a mátrix bal felső eleme -8 negatív), ezért $(3,2)$ lokális maximumhely, $f(3,2) = 36$.

74. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$

    Megoldás: $f'(x,y) = (2x-1, 4y-2)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. f' zérushelye az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pont. Mivel $f''(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pozitív definit ($\det f''(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 8 > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), ezért $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lokális minimumhely, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$.

75. $f(x,y) = (1-x)^2 + (2+y)^2 - 4$

    Megoldás: $f'(x,y) = (-2(1-x), 2(2+y))$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. f' zérushelye az $(1,-2)$ pont. Mivel $f''(1,-2)$ pozitív definit ($\det f''(1,-2) = 4 > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), ezért $(1,-2)$ lokális minimumhely, $f(1,-2) = -4$.

76. $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$

Megoldás: $f'(x,y) = (3x^2 - 6x + 2y, 2x + 2y)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$, $(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontok. A $(0,0)$ pontban $f''(0,0)$ indefinit $(\det f''(0,0) = -16 < 0)$, így itt f-nek nyeregpontja van. A $(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontban $f''(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pozitív definit $(\det f''(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}) > 0$ és a mátrix bal felső eleme $10 > 0)$, tehát ebben a pontban f-nek lokális minimuma van, $f(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}) = -\frac{364}{27}$.

77. $f(x,y) = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$

Megoldás: $f'(x,y) = (-2x + 2y, 3y^2 - 8y + 2x)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6y-8 \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$, $(2,2)$ pontok. A $(0,0)$ pontban $f''(0,0)$ negatív definit $(\det f''(0,0) = 12 > 0$ és a mátrix bal felső eleme negatív), így itt f-nek lokális maximumhelye van, $f(0,0) = 0$. A $(2,2)$ pontban $f''(2,2)$ indefinit $(\det f''(2,2) = -12 < 0)$, tehát ebben a pontban f-nek nyeregpontja van.

78. $f(x,y) = x^2y - 3xy + 2y^4$

Megoldás: $f'(x,y) = (2yx - 3y, x^2 - 3x + 8y^3)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-3 \\ 2x-3 & 24y^2 \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$, $(3,0)$ és $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$ pontok. A $(0,0)$ és $(3,0)$ pontokban f'' indefinit $(\det f''(0,0) = \det f''(3,0) = -9 < 0)$, így itt f-nek nyeregpontja van. A $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$ pontban $f''\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)$ pozitív definit $\left(\det f''\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right) = 27 > 0\right.$ és a mátrix bal felső eleme $\left.\sqrt[3]{\frac{9}{4}} > 0\right)$, tehát ebben a pontban f-nek lokális minimuma van, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right) = \frac{27}{8}\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$.

79. $f(x,y) = x^3 + (y+1)^3 - 3x \cdot (y+1)$

Megoldás: $f'(x,y) = (3x^2 - 3(y+1), 3(y+1)^2 - 3x)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6(y+1) \end{pmatrix}$. f' zérushelyei az $(1,0)$ és $(0,-1)$ pontok. Mivel $f''(1,0)$ pozitív definit $(\det f''(1,0) = 27 > 0$ és a mátrix bal felső eleme $6 > 0)$, ezért $(1,0)$ lokális minimumhely, $f(1,0) = -1$. Másrészt, $f''(0,-1)$ indefinit $(\det f''(0,-1) = -9 < 0)$, ezért $(0,-1)$ nem lokális szélsőértékhely.

80. $f(x,y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$;

Megoldás: $f'(x,y) = \left(y - \frac{20}{x^2}, x - \frac{50}{y^2}\right)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{40}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{100}{y^3} \end{pmatrix}$. f' zérushelye a $(2,5)$ pont, itt $f''(2,5)$ pozitív definit $(\det f''(2,5) = 3 > 0$ és a mátrix bal felső eleme $5 > 0)$, tehát ebben a pontban f-nek lokális minimuma van, $f(2,5) = 30$.

81. $f(x,y) = \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{27}$

Megoldás: $f'(x,y) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{y}{27}, -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{27}\right)$, egyetlen zérushelye a $(3,3)$ pont. Mivel $f''(3,3) = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ pozitív definit $(\det f''(3,3) = \frac{3}{27^2} > 0$ és a mátrix bal felső eleme $\frac{2}{27} > 0)$, tehát ebben a pontban f-nek lokális minimuma van, $f(3,3) = 1$.

82. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2-2xy+2y^2)}$

Megoldás: $f'(x,y) = (\mathrm{e}^{-(x^2-2xy+2y^2)}(-2x+2y), \mathrm{e}^{-(x^2-2xy+2y^2)}(4y-2x))$, aminek csak a $(0,0)$ zérushelye. Így $f''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ negatív definit $(\det f''(0,0) = 4 > 0$ és a mátrix bal felső eleme negatív), így itt f-nek lokális maximumhelye van, $f(0,0) = 1$.

83. $f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}$

Megoldás: $f'(x,y) = (\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}(-x+1), \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2x+1)}(-y))$, aminek csak az $(1,0)$ zérushelye. Így $f''(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ negatív definit $(\det f''(0,0) = 1 > 0$ és a mátrix bal felső eleme negatív), így itt f-nek lokális maximumhelye van, $f(1,0) = 1$.

84. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$

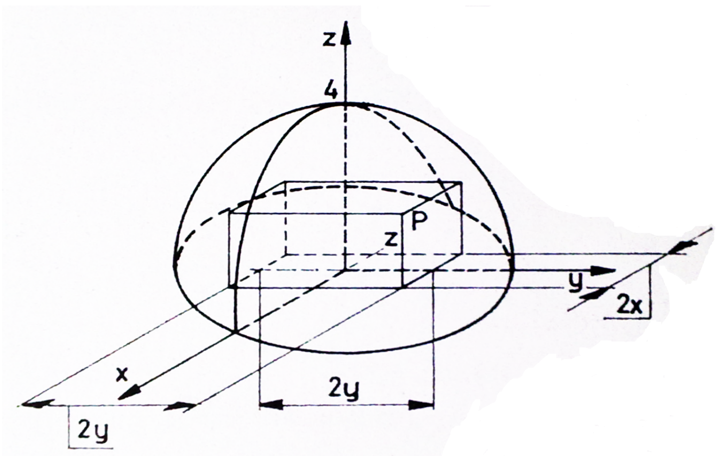
Megoldás: $f'(x,y) = (\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(2x-2x^3-2xy^2), \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(2y-2yx^2-2y^3))$, aminek zérushelyei a $(0,0)$ pont, és az összes olyan (x,y) pont, melyre $x^2+y^2=1$. Így $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pozitív definit ($\det f''(0,0) = 4 > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), ezért itt f-nek lokális minimumhelye van, $f(0,0) = 0$. Ha $x^2+y^2 = 1$, akkor $f''(x,y) = -\frac{4}{\mathrm{e}}\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$, amiből $\det f''(x,y) = 0$, így itt a módszereinkkel nem tudjuk eldönteni a lokális szélsőérték létezését.

85. $f(x,y) = (3-2x+y)\cdot \mathrm{e}^{-y^2}$

Megoldás: $f'(x,y) = (\mathrm{e}^{-y^2}(-2), \mathrm{e}^{-y^2}(-6y+4yx-2y^2+1))$. Látható, hogy az első parciális derivált sehol sem 0, tehát a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Szöveges feladatok szélsőértékszámításra (tartomány alatt itt mindig zárt halmazt értünk).

86. Határozzuk meg a $z = 4-x^2-2y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy-sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal!



12. ábra. 86. feladat

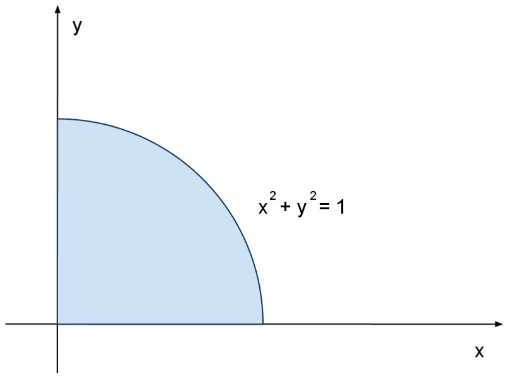
Megoldás: Ha a téglatest megadott felületen fekvő P csúcsának koordinátái $(x,y,4-x^2-2y^2)$ ($x,y > 0$), akkor a téglatest oldalai $2x, 2y, 4-x^2-2y^2$, így térfogata $f(x,y) = 4xy(4-x^2-2y^2) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3$. Ennek maximumát keressük a $T = \{(x,y) : x,y \geq 0,\ x^2+2y^2 \leq 4\}$ tartományon. Mivel az f függvény értéke a határokon mindenütt 0, belül pozitív, ezért a maximumhely csak lokális szélsőértékhely lehet. $f'(x,y) = (4y(4-3x^2-2y^2), 4x(4-x^2-6y^2))$, aminek zérushelyei ($x,y \geq 0$ figyelembevételével) $(1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ és $(0,0)$ – de ez utóbbi nyilván nem maximumhely. Mivel $f''(1,\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -12\sqrt{2} & -8 \\ -8 & -24\sqrt{2} \end{pmatrix}$ negatív definit ($\det f''(1,\frac{1}{\sqrt{2}}) = 512 > 0$ és a mátrix bal felső eleme negatív), ezért $(1,\frac{1}{\sqrt{2}})$ lokális maximumhely. Tehát a keresett téglatest oldalai $2, \sqrt{2}, 2$.

87. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2-y^2$ függvény minimumát és maximumát az x és y tengelyek, valamint az $x^2+y^2 = 1$ egyenletű görbe által határolt tartomány 1. síknegyedbe eső részén!

Megoldás: $f'(x,y) = (2x,-2y)$. Mivel $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit minden (x,y)-ra, ezért f-nek nincs lokális szélsőértékhelye. Az f értékei a megadott tartomány határain a következők: az y tengelyen $-1 \leq f(0,y) \leq 0$, az x tengelyen $0 \leq f(x,0) \leq 1$, a köríven pedig $-1 \leq f(x,y) = 2x^2-1 \leq 1$. Tehát f minimuma $f(0,1) = -1$, maximuma $f(1,0) = 1$.

88. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát, ha x,y,z egy háromszög szögei!

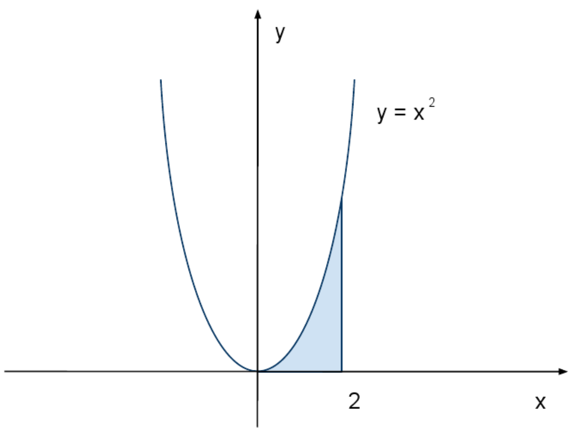
Megoldás: A feltétel szerint $z = \pi - x - y$, így $\sin z = \sin(\pi-x-y) = \sin(x+y)$. Tehát az $g(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ függvény maximumát keressük a $T := \{(x,y) : x,y \geq 0,\ x+y \leq \pi\}$



13. ábra. 87. feladat

tartományon. Mivel az g függvény értéke a határokon mindenütt 0, belül pedig felvesz pozitív értéket, ezért a maximumhely lokális szélsőértékhely lesz. $g'(x,y) = (\cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y), \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y)) = (\sin y \sin(2x+y), \sin x \sin(2y+x))$. Mivel maximumhelyet keresünk, ezért $\sin x \sin y \neq 0$, így az g' zérushelyeinek megtalálásához a $\sin(2x+y) = 0$ és $\sin(2y+x) = 0$ egyenleteket kell megoldanunk. Ezekből $2x+y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, de mivel háromszög szögeiről van szó, ezért csak $k = 1$ lehet, tehát $2x+y = \pi$. Hasonlóan, a másik egyenletből $x+2y = \pi$. Így $x = y = \frac{\pi}{3}$. Mivel $g''(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ negatív definit ($\det g''(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{9}{4} > 0$ és a mátrix bal felső eleme negatív), ezért $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ lokális maximumhely. Ebből a keresett függvénymaximum $g(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

89. Határozzuk meg az $f(x,y) = y \cdot (2x-3)$ függvény minimumát és maximumát az x-tengely, az $x = 2$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartományon!

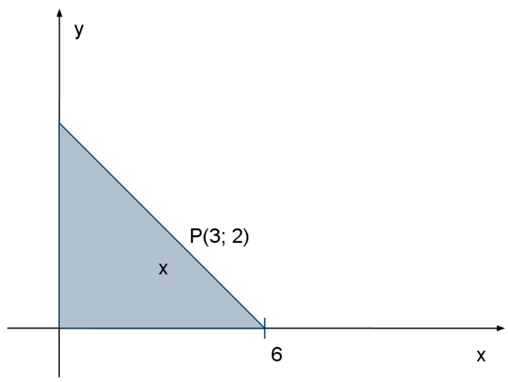


14. ábra. 89. feladat

Megoldás: $f'(x,y) = (2y, 2x-3)$, így lokális szélsőértékhely csak a $(\frac{3}{2}, 0)$ pontban lehet, ami a tartomány határán van. Az f értékei a megadott tartomány határain a következők: az x tengelyen $f(x,0) = 0$, az $x = 2$ egyenesen $0 \leq f(2,y) = y \leq 4$, a görbén pedig $f(x,x^2) = x^2(2x-3)$, $x \in [0,2]$. Ez utóbbi egyváltozós függvény lokális szélsőértékhelyei az $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ pontokban vannak, itt $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, itt $f(0,0) = 0$, $f(1,1) = -1$. Az f függvény tehát legkisebb értéke $f(1,1) = -1$, legnagyobb értéke $f(2,4) = 4$.

90. Határozzuk meg az $f(x,y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$ függvény minimumát és maximumát a tengelyek és az $x + y = 6$ egyenletű egyenes által határolt tartományon!

Megoldás: A 73. feladat alapján f-nek egy lokális szélsőértékhelye van: a $(3,2)$ pont lokális maximumhely, ami a megadott tartomány belsejébe esik, $f(3,2) = 36$. Az f értékei a tartomány határain a következők: az x tengelyen $f(x,0) = 0$, az y tengelyen $f(0,y) = 0$, az egyenesen pedig



15. ábra. 90. feladat

$f(6-y,y) = (y^2-6y)\cdot(y^2-4y)$, $y \in [0,6]$. Ez utóbbi egyváltozós függvény lokális szélsőértékhelyei $f'(y) = (2y-6)(y^2-4y) + (y^2-6y)(2y-4)$ alapján a $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{4}(5+\sqrt{3})$ és $y_3 = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$. Így $x = 6-y$ alapján $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{3}{4}(3-\sqrt{3})$ és $x_3 = \frac{3}{4}(3+\sqrt{3})$. Az f értékei pedig $f(6,0) = 0$, $f(\frac{3}{4}(3-\sqrt{3}), \frac{3}{4}(5+\sqrt{3})) \approx -25,43$ és $f(\frac{3}{4}(3+\sqrt{3}), -\frac{3}{4}\sqrt{3}) \approx 33,08$. A függvény minimuma tehát $f(\frac{3}{4}(3-\sqrt{3}), \frac{3}{4}(5+\sqrt{3})) \approx -25,43$, maximuma pedig $f(3,2) = 36$.

5. Összetett és implicit függvények differenciálása

91. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (\mathrm{e}^{xyz}, \sin x)$ függvény deriváltját a $P = (1,2,3)$ pontban!

    Megoldás: $D_1(\mathrm{e}^{xyz}) = yz\mathrm{e}^{xyz}$, $D_2(\mathrm{e}^{xyz}) = xz\mathrm{e}^{xyz}$, $D_3(\mathrm{e}^{xyz}) = xy\mathrm{e}^{xyz}$, $D_1(\sin x) = \cos x$, $D_2(\sin x) = D_3(\sin x) = 0$ alapján

$$f'(1,2,3) = \begin{pmatrix} 6\mathrm{e}^6 & 3\mathrm{e}^6 & 2\mathrm{e}^6 \\ \cos 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

92. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^2-2xy, y\mathrm{e}^{y^2}+3x, \sin x + \tan y)$ függvény deriváltját a $P = (1,0)$ pontban!

    Megoldás: $D_1(x^2-2xy) = 2x-2y$, $D_2(x^2-2xy) = -2x$, $D_1(y\mathrm{e}^{y^2}+3x) = 3$, $D_2(y\mathrm{e}^{y^2}+3x) = \mathrm{e}^{y^2}(1+2y^2)$, $D_1(\sin x + \tan y) = \cos x$, $D_2(\sin x + \tan y) = \frac{1}{\cos^2 y}$ alapján

$$f'(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ \cos 1 & 1 \end{pmatrix}$$

93. Az alábbi feladatokban legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények deriváltjait!

    (a) $u(x,y) = f(x+y)$
    Megoldás: $u'(x,y) = (f'(x+y), f'(x+y))$

    (b) $u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$
    Megoldás: $u'(x,y) = (\frac{1}{y}f'(\frac{x}{y}), -\frac{x}{y^2}f'(\frac{x}{y}))$

    (c) $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$
    Megoldás: $u'(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2}), \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2}))$

    (d) $u(x,y,z) = f\left(x^2+y^2+z^2\right)$
    Megoldás: $u'(x,y,z) = (2xf'(x^2+y^2+z^2), 2yf'(x^2+y^2+z^2), 2zf'(x^2+y^2+z^2))$

94. Az alábbi feladatokban legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Határozzuk meg az $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ illetve $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvények deriváltjait!

(a) $u(x,y) = f(ax, by)$
Megoldás: $u'(x,y) = (aD_1 f(ax,by), bD_2 f(ax,by))$

(b) $u(x,y) = f(x+y, x-y)$
Megoldás: $u'(x,y) = (D_1 f(x+y,x-y) + D_2 f(x+y,x-y), D_1 f(x+y,x-y) - D_2 f(x+y,x-y))$

(c) $u(x,y) = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$
Megoldás: $u'(x,y) = (yD_1 f(xy, \frac{x}{y}) + \frac{1}{y} D_2 f(xy, \frac{x}{y}), xD_1 f(xy, \frac{x}{y}) - \frac{x}{y^2} D_2 f(xy, \frac{x}{y}))$

(d) $u(x,y,z) = f(x+y, z)$
Megoldás: $u'(x,y,z) = (D_1 f(x+y,z), D_1 f(x+y,z), D_2 f(x+y,z))$

(e) $u(x,y,z) = f\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)$
Megoldás: $u'(x,y,z) = (D_1 f(x+y+z, x^2+y^2+z^2) + 2xD_2 f(x+y+z, x^2+y^2+z^2), D_1 f(x+y+z, x^2+y^2+z^2) + 2yD_2 f(x+y+z, x^2+y^2+z^2), D_1 f(x+y+z, x^2+y^2+z^2) + 2zD_2 f(x+y+z, x^2+y^2+z^2))$

(f) $u(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$
Megoldás: $u'(x,y,z) = (\frac{1}{y} D_1 f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}), -\frac{x}{y^2} D_1 f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}) + \frac{1}{z} D_2 f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})), -\frac{y}{z^2} D_2 f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$

95. Legyen y a $[-1,1]$-en értelmezett olyan függvény, mely kielégíti az

$$x^2 + y^2 = 1$$

egyenletet. Hány folytonos y megoldás van? Hány folytonos megoldás van, ha kikötjük, hogy $y(0) = 1$? És ha $y(1) = 0$?

Megoldás: Folytonos megoldás kettő van: $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ és $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Az $y(0) = 1$ feltétel mellett egyetlen megoldás van: $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ (az egyértelműség következik az implicitfüggvény-tételből: $D_2(x^2+y^2-1) = 2y \neq 0$ a $(0,1)$ egy környezetében), az $y(1) = 0$ feltétel mellett az előbbi mindkét függvény megoldás (az implicitfüggvény-tétel feltétele nem teljesül, mert $D_2(x^2+y^2-1) = 2y$ eltűnik az $(1,0)$ egy környezetében).

96. Fejezzük ki az alábbi egyenletekkel meghatározott y függvények y' deriváltjait x és y segítségével!

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 1$
Megoldás: $y' = -\frac{D_1 f(x,y)}{D_2 f(x,y)} = -\frac{x+y}{x-y}$

(b) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$
Megoldás: $y' = -\frac{D_1 f(x,y)}{D_2 f(x,y)} = -\frac{\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2(1+y^2/x^2)}}{\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x(1+y^2/x^2)}} = \frac{x+y}{x-y}$

(c) $y - \frac{1}{2}\sin y = x$
Megoldás: $y' = -\frac{D_1 f(x,y)}{D_2 f(x,y)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}$

(d) $x^y = y^x$, $(x \neq y)$
Megoldás: Érdemes az egyenletet $\mathrm{e}^{y \ln x} - \mathrm{e}^{x \ln y} = 0$ alakba írni. $y' = -\frac{D_1 f(x,y)}{D_2 f(x,y)} = \frac{y^x \ln y - x^y \frac{y}{x}}{x^y \ln x - y^x \frac{x}{y}}$

(e) $y = 2x \arctan\frac{y}{x}$
Megoldás: $y' = -\frac{D_1 f(x,y)}{D_2 f(x,y)} = -\frac{-2\arctan\frac{y}{x} + 2x\frac{y}{x^2(1+y^2/x^2)}}{1 - 2x\frac{1}{x(1+y^2/x^2)}} = \frac{2(x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x} - 2xy}{y^2-x^2}$

97. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$. Mely $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pontokban alkalmazható f-re az inverzfüggvénytétel?

Megoldás: $D_1(\mathrm{e}^x \cos y) = \mathrm{e}^x \cos y$, $D_2(\mathrm{e}^x \cos y) = -\mathrm{e}^x \sin y$, $D_1(\mathrm{e}^x \sin y) = \mathrm{e}^x \sin y$, $D_2(\mathrm{e}^x \sin y) = \mathrm{e}^x \cos y$ alapján

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin y & \mathrm{e}^x \cos y \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x(\cos^2 y + \sin^2 y) = \mathrm{e}^x \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

tehát f-re a sík minden pontjában alkalmazható az inverzfüggvénytétel.

6. Feltételes szélsőérték

98. Oldjuk meg a 86. és 88. feladatokat feltételes szélsőérték-feladatokként!

86. Megoldása: Keressük az $f(x,y,z) = 4xyz$ függvény maximumát a $g(x,y,z) = x^2+2y^2+z-4 = 0$ feltétel mellett. A Lagrange-multiplikátor-elv szerint a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $f'(x,y,z) - \lambda g'(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, azaz

$$\begin{aligned} 4yz - 2\lambda x &= 0 \\ 4xz - 4\lambda y &= 0 \\ 4xy - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenletet x-szel, a másodikat y-al, a harmadikat z-vel szorozva kapjuk, hogy $4xyz = 2\lambda x^2 = 4\lambda y^2 = \lambda z$. Mivel a maximumhelyen nyilván $xyz \neq 0$, ezért $z = 2x^2 = 4y^2$. A feltételből kapjuk, hogy $x^2 + 2y^2 + z - 4 = 2z - 4 = 0$, tehát $z = 2$, amiből $x = 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez megfelel a 86. feladat eredeti megoldásának.

88. Megoldása: Keressük az $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát a $g(x,y,z) = x + y + z - \pi = 0$ feltétel mellett. Lagrange-multiplikátor-elv szerint szélsőértékhelyeken van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $f'(x,y,z) - \lambda g'(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, azaz

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z - \lambda &= 0 \\ \sin x \cos y \sin z - \lambda &= 0 \\ \sin x \sin y \cos z - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Ebből $\cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z = \sin x \sin y \cos z = \lambda$. Mivel a maximumhelyen $\sin x \sin y \sin z \neq 0$, ezért átrendezéssel $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} z$. Tudjuk, hogy $g(x,y,z) = x+y+z-\pi = 0$, ezért $x = y = z = \frac{\pi}{3}$, ami szintén megegyezik az eredeti megoldással.

99. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ szélsőértékeit az $x + y - 1 = 0$ egyenletű egyenesen!

Megoldás: Könnyen látható, hogy pontosan egyetlen szélsőértékhely van, mégpedig minmiumhely, hiszen egy „felfelé álló” paraboloid szélsőértékeit keressük egy egyenes mentén, azaz az egyenesen átmenő x,y síkra merőleges egyenessel elmetsszük a paraboloidot és a metszet parabola „legalsó pontját” keressük. Legyen $g(x,y) = x + y - 1$, ekkor a feladat az f függvénynek a g-re vonatkozó feltételes szélsőértékeinek megkeresése. Tudjuk, hogy szélsőértékhelyeken van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $f'(x,y) - \lambda g'(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$, azaz

$$\begin{aligned} 2x - \lambda &= 0 \\ 6y - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

A fenti rendszerből következik, hogy $x = 3y$, melyet az $x + y - 1 = 0$ egyenletbe helyettesíve kapjuk, hogy az egyetlen lehetséges szélsőértékhely a $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ pont. Korábban láttuk, hogy ez valóban szélsőértékhely, méghozzá minimumhely, így f minimuma az egyenesen 3, maximuma pedig nincs. Megjegyezzük, hogy a feladatot Lagrange-multiplikátorok nélkül is megoldhattuk volna, lényegében ugyanennyi erőfeszítéssel. Valóban, a sík egyenletéből kifejezve x-et (vagy y-t) és behelyettesítve f-be a kapott egyváltozós függvényt könnyen minimalizálhatjuk.

100. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit a megadott K halmazokon!

Mindegyik részben folytonos függvény szélsőértékeit keressük kompakt halmazon, így azok léteznek. Még azt is érdemes megjegyeznünk, hogy az alábbi feladatok Lagrange-multiplikátorok nélkül is megoldhatók különböző közepek segítségével, illetve némi ügyeskedéssel.

(a) $f(x,y) = x + 2y, \quad K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\right\}$

Megoldás: Mivel $f'(x,y) = (1,2)$, így K-n belül nincs lokális szélsőértékhely. A határon lévő szélsőértékek megkeresése pedig ekvivalens az f függvény $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$ függvényre vonatkozó feltételes szélsőértékeinek meghatározásával. Feltételes szélsőértékhelyen létezik λ valós szám, hogy

$$\begin{aligned} 1 - \lambda 2x &= 0 \\ 2 - \lambda 2y &= 0. \end{aligned}$$

Innen $y = 2x$, ezt a $g(x,y) = 0$ egyenletbe helyettesítve $(x,y) = \pm(1,2)$ adódik. Könnyen látható, hogy $(1,2)$-ben maximum van, az értéke 5, a $(-1,-2)$ pontban pedig minimum, melynek értéke -5.

(b) $f(x,y) = 2xy, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
Megoldás: Legyen $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, és keressük az f függvény g-re vonatkozó feltételes szélsőértékeit. Szélsőértékhelyen létezik λ valós szám, melyre $f'(x,y) - \lambda g'(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$, azaz

$$\begin{aligned} 2y - \lambda 2x &= 0 \\ 2x - \lambda 2y &= 0. \end{aligned}$$

Innen $\lambda^2 = 1$, ahonnan $x^2 = y^2$, és így a $g = 0$ egyenlet felhasználásával $(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ezeket f-be helyettesítve kapjuk, hogy f maximuma 1 (melyet a $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontokban vesz fel), és minimuma -1 (melyet a $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontokban vesz fel).

(c) $f(x,y) = x + 8y, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 17\}$
Megoldás: Legyen $g(x,y) = x^4 + y^4 - 17$ és keressük az f függvény g-re vonatkozó feltételes szélsőértékeit. Tudjuk, hogy szélsőértékhelyen létezik λ valós szám, melyre $f'(x,y) - \lambda g'(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$, azaz

$$\begin{aligned} 1 - \lambda 4x^3 &= 0 \\ 8 - \lambda 4y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ebből $4x^3 = \frac{1}{\lambda} = \frac{y^3}{2}$, így $8x^3 = y^3$, azaz $2x = y$. Ezt a $g = 0$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $(x,y) = \pm(1,2)$. Az $(1,2)$ pontban f-nek maximuma van, az értéke 17, a $(-1,-2)$ pontban pedig minimuma van, melynek értéke -17.

(d) $f(x,y) = x^2 - 2y^2, \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$
Megoldás: Mivel $f'(x,y) = (2x, -4y)$, így K belsejében a $(0,0)$ pontban lehet lokális szélsőérték. Mivel azonban $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ indefinit, ezért a $(0,0)$ nem lokális szélsőértékhely. Legyen most $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 1$, és keressük az f függvény g-re vonatkozó feltételes szélsőértékeit. Tudjuk, hogy szélsőértékhelyen létezik λ valós szám úgy, hogy $f'(x,y) - \lambda g'(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$, azaz

$$\begin{aligned} 2x - \lambda 8x &= 0 \\ -4y - \lambda 2y &= 0. \end{aligned}$$

Innen $x = 0$ vagy $y = 0$ (különben $\lambda = \frac{1}{4}$ és $\lambda = -2$ teljesülne egyszerre), és így a $g = 0$ egyenlet felhasználásával $(x,y) = \pm(0,1)$ és $(x,y) = \pm\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ adódik. A kapott lehetséges 4 szélsőértékhelyet f-be helyettesítve könnyen látható, hogy f minimuma a K halmazon -2, melyet a $\pm(0,1)$ pontokban vesz fel, a maximuma pedig $\frac{1}{4}$, melyet a $\pm\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pontokban vesz fel.

(e) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
Megoldás: Legyen $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Az f függvény feltételes szélsőértékeit keressük a $\{g = 0\}$ halmazon. Az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbfelület kompakt, így létezik mindkét szélsőérték. Tudjuk, hogy a szélsőértékhelyeken van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, melyre $f'(x,y,z) - \lambda g'(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, azaz

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0 \\ 1 - 2\lambda y &= 0 \\ 1 - 2\lambda z &= 0. \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerből nyilvánvalóan következik, hogy $x = y = z$. Mivel $x^2+y^2+z^2 = 1$, így $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ vagy $x = y = z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ebből következően f feltételes maximuma $\sqrt{3}$, feltételes minimuma pedig $-\sqrt{3}$.

(f) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3, \quad K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$

Megoldás: Az f függvény feltételes szélsőértékeit keressük az $\{x^2+y^2+z^2-1 = 0\}$ halmazon. Az $x^2+y^2+z^2 = 1$ gömbfelület kompakt, így a szélsőértékek léteznek. Tudjuk, hogy szélsőértékhelyeken van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, melyre $f'(x,y,z) - \lambda(x^2+y^2+z^2)' = 0_{\mathbb{R}^3}$, azaz

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2\lambda x &= 0 \\ 3y^2 - 2\lambda y &= 0 \\ 3z^2 - 2\lambda z &= 0. \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy a fenti egyenletrendszerből következik, hogy $x = y = z = \frac{2}{3}\lambda$ vagy $\left\{x = 0,\ y = z = \frac{2}{3}\lambda\right\}$ vagy $\{x = y = 0,\ z = \frac{2}{3}\lambda\}$ valamint a szimmetria miatt az ezekből x, y, z permutálásával nyert esetek. A rendszerhez hozzávéve az $x^2+y^2+z^2 = 1$ feltételt, azonnal adódik, hogy az egyenletrendszernek (x,y,z)-re nézve a megoldásai a $\pm(1,0,0)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ számhármasok, és az ezekből a koordináták permutálásával adódó számhármasok. Az $x^3+y^3+z^3$ kifejezésbe ezeket behelyettesítve egyszerű számolással adódik, hogy a keresett maximum 1, a minimum pedig -1.

7. Ívhossz, vonalintegrál

101. Határozzuk meg a következő görbék ívhosszát!

a) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $(r > 0)$ (körvonal)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$, így

$$s(g) = \int_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = r\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi r.$$

b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$ $(r > 0)$ (ciklois)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$, így

$$\begin{aligned} s(g) &= \int_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}dt \\ &= \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 2r\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4r(\cos 2\pi - \cos 0) = 8r. \end{aligned}$$

c) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r\cos^3 t, r\sin^3 t)$ $(r > 0)$ (asztroid)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-3r\cos^2 t\sin t, 3r\sin^2 t\cos t)$, így

$$\begin{aligned} s(g) &= \int_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9r^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3r|\cos t\sin t|\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{3r}{2}|\sin 2t|\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3r}{2}\sin 2t\,dt \\ &= 6r\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\frac{3r}{2} = 6r. \end{aligned}$$

d) $g\colon [0,h] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (t, r\cos t, r\sin t)$ $(h, r > 0)$ (csavarvonal)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (1, -r\sin t, r\cos t)$, így $s(g) = \int_0^h |g'(t)|\,dt = \int_0^h \sqrt{1+r^2}dt = h\sqrt{1+r^2}$.

102. Legyen $f : [1,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$. Határozzuk meg f grafikonjának ívhosszát!

Megoldás: A grafikon legkézenfekvőbb paraméterezése $g\colon [1,4] \to \mathbb{R}^2$ $g(t) = (t, f(t))$. Emiatt $g'(t) = (1, f'(t))$, tehát

$$s(g) = \int_1^4 \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt = \int_1^4 \sqrt{1 + \sqrt{t-1}^2}dt = \int_1^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{14}{3}.$$

103. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha $f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ és

a) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$ és $f(g(t)) = \left(\frac{-\sin t}{\cos^2+\sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2+\sin^2 t}\right) = (-\sin t, \cos t)$, így

$$\int_g f = \int_0^{2\pi} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (-\cos t, \sin t)$

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$ és $f(g(t)) = \left(\frac{-\sin t}{\cos^2+\sin^2 t}, -\frac{\cos t}{\cos^2+\sin^2 t}\right) = (-\sin t, -\cos t)$, így

$$\int_g f = \int_0^{2\pi} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi.$$

104. Legyen g a felső félsíkba eső, origó középpontú egység sugarú félkörív pozitív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = (-y, x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Megoldás: A g görbe egy paraméterezése $g\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Ekkor $f(g(t)) = (-\sin t, \cos t)$ és $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$, így

$$\int_g f = \int_0^{\pi} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{\pi} 1\, dt = \pi.$$

105. Legyen g a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokat összekötő egységsugarú körív negatív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{x}\right)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Megoldás: A g görbe egy paraméterezése $g\colon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, -\sin t)$.
Ekkor $f(g(t)) = (1, -\operatorname{tg} t)$ és $g'(t) = (-\sin t, -\cos t)$, így

$$\int_g f = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin t + (-\operatorname{tg} t)(-\cos t))\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin t + \sin t)\, dt = 0.$$

106. Legyen g a $(2,0)$, $(0,2)$ pontokat összekötő szakasz a $(0,2)$ pont felé irányítva, továbbá legyen $f(x,y) = (\cos y, \cos x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Megoldás: A g görbe egy paraméterezése $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (2,0) + t(-2,2) = (2-2t, 2t)$.
Ekkor $f(g(t)) = (\cos(2-2t), \cos 2t)$ és $g'(t) = (-2, 2)$, így

$$\begin{aligned}\int_g f &= \int_0^1 \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_0^1 (-2\cos(2-2t) + 2\cos 2t)\, dt = [\sin(2-2t) + \sin 2t]_0^1 \\ &= \sin 2 + \sin 0 - \sin 2 - \sin 0 = 0.\end{aligned}$$

107. Legyen $g\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (3\cos t, \sin t)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha f a következő alakú:

a) $f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

Megoldás: Vegyük észre, hogy f egy primitív függvénye $F(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$, így

$$\int_g f = F\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F(g(0)) = F(0,1) - F(3,0) = 0 - \ln 3 = -\ln 3.$$

b) $f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Megoldás: Vegyük észre, hogy f egy primitív függvénye $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, így

$$\int_g f = F\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - F(g(0)) = F(0,1) - F(3,0) = \sqrt{1} - \sqrt{3} = 1 - \sqrt{9} = -2,$$

hiszen g kezdőpontja a $(3,0)$, végpontja pedig a $(0,1)$ pont.

c) $f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Megoldás: Vegyük észre, hogy f egy primitív függvénye $F(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, így

$$\int_g f = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} F(g(t)) - F(g(0)) = \lim_{x\to 0+, y\to 1-} F(x,y) - F(3,0) = \frac{\pi}{2}.$$

108. Legyen g az origó középpontú egység sugarú körvonalnak az $(1,0)$ pontból az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontba haladó nyolcada. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha az f függvény a következő alakú:

a) $f(x,y) = (x-2y, x+y)$

Megoldás: Könnyen látható, hogy f-nek nincs primitív függvénye (hiszen $D_1f_2 = 1 \neq -2 = D_2f_1$), így az integrált közvetlenül kell kiszámolnunk. A g görbe egy paraméterezése $g\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$, így $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$ és $f(g(t)) = (\cos t - 2\sin t, \cos t + \sin t)$, ezért

$$\int_g f = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - 2\sin t, \cos t + \sin t)(-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

b) $f(x,y) = \left(1 + \frac{1}{(x+2y)^2}, 2 + \frac{2}{(x+2y)^2}\right)$

Megoldás: Vegyük észre, hogy f egy primitív függvénye $F(x,y) = x + 2y - \frac{1}{x+2y}$. Ekkor

$$\int_g f = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F(1,0) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

109. Legyen $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = \left(\ln(1+t^2)\sin t, \sqrt{5t^2 + \cos \pi t}\right)$, továbbá legyen $f(x,y) = (x+y, x+y)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Megoldás: Vegyük észre, hogy f egy primitív függvénye $F(x,y) = \frac{(x+y)^2}{2}$, így

$$\int_g f = F(g(1)) - F(g(0)) = F(\ln 2 \cdot \sin 1, 2) - F(0,1) = \frac{(\ln 2 \cdot \sin 1 + 2)^2 - 1}{2}.$$

110. Legyen $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$, továbbá legyen $f(x,y) = (e^{-x^2} + y, e^{-y^2} + x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Megoldás: Vegyük észre, hogy f-nek van primitív függvénye, ugyanis $D_1f_2 = D_2f_1 = 1$. A primitív függvényt nem tudjuk megadni, de ez nem baj, hiszen zárt görbén kell integrálnunk, így az integrál értéke biztosan 0.