Differenciálegyenletek gyakorlat
Matematika BSc II/2, elemző szakirány

1. gyakorlat

A sebesség fogalmának szemléltetése az

$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

képlet alapján, ahol t jelöli az időt, x pedig az elmozdulást. Ennek alapján lehet felírni a legegyszerűbb differenciálegyenleteket. Például a Newton törvény: $m\ddot{x}(t) = F$, vagy a radioaktív bomlást leíró törvény: $\dot{x}(t) = ax(t)$ (ez egyébként a lehűlési törvény is, sőt ez a legegyszerűbb populációdinamikai törvény is, ekkor x a populáció méretét (egyedszám, tömeg) jelöli).

1. Keressük meg az $\dot{x}(t) = 2\sin t$ differenciálegyenletnek azt az integrálgörbéjét, amely áthalad az origón!
2. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket! Rajzoljuk fel az iránymezőt, illetve a megoldásokat, szemléltessük a kezdeti feltételt.
   (a) $\dot{x}(t) = 1$
   (b) $\dot{x}(t) = x(t)$ [A megoldás „ránézésre” látszik. Van-e az exponenciális függvényen kívül más megoldás? Szorozzuk be az egyenletet e^{-t}-vel, ekkor azt kapjuk, hogy $(\mathrm{e}^{-t}x(t))' = 0$, vagyis $\mathrm{e}^{-t}x(t) = C$.]

1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő nyílt halmaz (tartomány), $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az elsőrendű közönséges differenciálegyenlet (KDE) általános alakja:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1}$$

Az egyenlet megoldásai általánosan nem adhatók meg. (A differenciálalgebra foglalkozik azzal, hogy mely egyenletek megoldása adható meg képlettel.) A megoldható típusok több helyen össze vannak gyűjtve, pl. Kamke könyvében, Mathematica, ill. Maple programcsomagokban.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\dot{x}(t) = kx(t) \quad (k \in \mathbb{R})$ egyenlet minden megoldása $x(t) = C\mathrm{e}^{kt}$ alakú! [Az előző feladat ötlete működik, de most e^{-kt}-vel szorozzunk.]
4. $(t+1)\dot{x}(t) = tx(t)$ [Szorozzunk be ismét e^{-t}-vel.]
5. $\dot{x}(t) = tx(t)$ [A beszorzásos trükk most is megy, de $-t$ helyett valami más kell az exponenciális függvény kitevőjében.]

   A továbbiakban néhány egyszerűen megoldható típussal fogunk foglalkozni, elsőként az

   $$\dot{x}(t) = g(t)h(x(t)) \tag{Szeparábilis KDE}$$

   alakú, úgynevezett szeparábilis (szétválasztható) egyenletekkel. A bevezető példák egy része ilyen típusú volt.

   Megoldási módszer: Külön oldalra rendezve a csak t-től, illetve x-től függő tényezőket

   $$\dot{x}(t) = g(t)h(x(t)) \iff \frac{\dot{x}(t)}{h(x(t))} = g(t) \iff H(x(t)) = G(t) + C,$$

   ahol $\dot{G} = g$ és $\dot{H} = 1/h$.

6. $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{x(t)\,(9+4t^2)}$
7. Egy tartályban 100 liter 10 kg sót tartalmazó oldat van. A tartályba 5 l/min sebességgel víz ömlik be, amely elkeveredik a benne levő oldattal. A keverék a tartály alján ugyanekkora sebességgel folyik ki. Mennyi só marad a tartályban 1 óra múlva?

HF $\dot{x}(t) = \left(1 + x^2(t)\right)\left(1 + t^2\right)$

HF $\dot{x}(t) = 2x(t)\operatorname{ctg} t$

HF A 100 ℃ meleg lekvárt kirakjuk hűlni a levegőre, amely 20 ℃-os. A lekvár hőmérséklete 10 órakor 30 ℃, 11 órakor 25 ℃. Mikor raktuk ki a lekvárt hűlni? (Tudjuk, hogy a lehűlés sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével.)

2. gyakorlat

Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek, megoldhatóság, egyértelműség. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek, megoldóképlet, állandók variálásának módszere.

2. Tétel. *Ha az f függvény a második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú (azaz létezik olyan $L \in \mathbb{R}^+$ hogy $|f(t,p_1) - f(t,p_2)| \leq L\,|p_1 - p_2|$), akkor minden $(t_0, p_0) \in D$ esetén létezik olyan lokális (azaz t_0 egy környezetében értelmezett) megoldása (1)-nek, melyre $x(t_0) = p_0$.*

A fenti feltételek mellett a lokális megoldás létezésén kívül annak egyértelműsége is következik (ez a Picard-Lindelöf tétel, lásd előadáson). A megoldás létezését már akkor is garantálni tudjuk, ha a jobb oldali f függvényről csak folytonosságot teszünk fel (ez a Peano-féle egzisztencia tétel, lásd előadáson).

A szeparábilis egyenletek után egy újabb típusra térünk át, az elsőrendű lineáris KDE-re:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t), \qquad \text{(Elsőrendű lineáris KDE)}$$

ahol $a,\ b : I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon.

Kétféle megoldási módszer:

(a) A korábbi beszorzásos trükk általánosítása. Szorozzuk be az egyenletet $\mathrm{e}^{-A(t)}$-vel, ahol $A' = a$. Vezessük le így az általános megoldóképletet!

(b) Ha ismernénk egy megoldást (jelöljük ezt x_0-lal), akkor egy tetszőleges x megoldást $x = x_0 + y$ alakba írva, az y-ra az $\dot{y} = ay$ szétválasztható változójú egyenlet kapjuk. Ennek megoldása $y(t) = C\mathrm{e}^{A(t)}$. Lényeges észrevétel, hogy az x_0 megoldás megadható $x_0(t) = C(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ alakban, és a C függvényre mindig egy integrálással megoldható differenciálegyenletet kapunk. Vezessük le így is az általános megoldóképletet!

Az így kapott megoldóképlet ($A' = a$, $t_0 \in I$ tetszőleges):

$$x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(t)-A(s)} \cdot b(s)\ \mathrm{d}s, \quad c \in \mathbb{R}$$

A megoldóképletet nem érdemes „bemagolni”, inkább valamelyik megoldási módszert kell alkalmazni a konkrét példán.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

   (a) $t\dot{x}(t) = t + 2x(t)$

   (b) $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t)}{t} + t^2 + 3t - 2$

   (c) $\dot{x}(t) = 3t^2 x(t) + t^2$

2. Legyen $x : [0,\infty) \to (0,\infty)$ egy differenciálható függvény, amelyről tudjuk, hogy minden $\tau > 0$ esetén a $(\tau, x(\tau))$ pontba húzott érintő, a $t = \tau$ egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott trapéz területe állandó. $x(t) = ?$

3. Igazoljuk az alábbiakat!

   (a) A $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$ egyenlet megoldása az $x = 0$ egyenes pontjaiban lokálisan nem egyértelmű.

   (b) A $\dot{x}(t) = x(t) \cdot \ln|x(t)|$ egyenlet jobb oldalán a függvény mindenhol folytonos és a megoldás lokálisan egyértelmű annak ellenére, hogy a nullában a lokális Lipschitz-folytonosság nem teljesül.

HF $t\dot{x}(t) - 2x(t) = 2t^4$

HF $\dot{x}(t) + 2t \cdot x(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t$

HF A kis hangya egy 10 cm hosszú gumiszalag jobb végpontjából 1 cm/s sebességgel indul el a szalag rögzített bal végpontja felé. A gonosz manó ezzel egyidejűleg a szalag jobb végpontját 100 cm/s sebességgel húzza hátra. Eljut-e valamikor a hangya a szalag másik végére (és ha igen, mikor)?

3. gyakorlat

Homogén egyenletek, Bernoulli-egyenlet, helyettesítéssel szeparábilis, illetve lineáris egyenletre visszavezethető feladatok. Egzakt differenciálegyenletek.

Az f függvényt *homogén*nek (pontosabban 0-ad fokú homogénnek) nevezik, ha $f(\alpha t, \alpha p) = f(t,p)$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén (az r-ed fokú homogénre $f(\alpha t, \alpha p) = \alpha^r f(t,p)$). Az

$$\dot{x}(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right) \qquad \text{(Homogén KDE)}$$

egyenletet homogén fokszámú egyenletnek nevezzük.

Megoldási módszer: Az $y(t) = x(t)/t$ új ismeretlen függvény bevezetésével szétválaszthatóra vezethető vissza.

Az

$$\dot{x}(t) = g(at + bx(t) + c)$$

egyenlet megoldásához az $y(t) = at + bx(t) + c$ helyettesítést érdemes elvégezni.

Az alábbi típust Bernoulli-féle egyenletnek nevezzük:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)x^{\alpha}(t) \qquad \text{(Bernoulli-féle KDE)}$$

$a, b : I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon, $\alpha \in \mathbb{R}$ adott szám.

Megoldási módszer: Az $y(t) = x^{1-\alpha}(t)$ helyettesítéssel y-ra lineáris egyenletet kapunk.

Végül az úgynevezett egzakt egyenletekkel foglalkozunk:

$$M(t, x(t)) + N(t, x(t))\dot{x}(t) = 0, \quad (\text{ahol } \partial_2 M = \partial_1 N) \qquad \text{(Egzakt KDE)}$$

$M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott differenciálható függvények.

Megoldási módszer: Határozzuk meg azt az $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, melyre $\partial_1 F = M$ és $\partial_2 F = N$. Ekkor a megoldás implicit alakja $F(t, x(t)) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Konkrét feladatoknál az x megoldást nem mindig lehet explicit alakban megadni. (Megjegyezzük, hogy ha nem egzakt az egyenlet, egy ügyesen választott $\mu(t,x)$ függvénnyel beszorozva esetleg egzakttá tehető. Egy ilyen μ függvényt integráló tényezőnek nevezünk, de ezzel itt a továbbiakban nem foglalkozunk.)

1. $\left(t^3 + x^3(t)\right) + 3tx^2(t)\dot{x}(t) = 0$
2. $\dot{x}(t) = 2x(t) + t + 1$
3. $t \cdot \dot{x}(t) = t + x(t) + \frac{x^2(t)}{t}$
4. $\dot{x}(t) + 2x(t) = x^2(t)\mathrm{e}^t$
5. $t + \sin x(t) + \left(x^2(t) + t\cos x(t)\right)\dot{x}(t) = 0$
6. $\dot{x}(t) = (t + x(t))^2$
7. $t + \dfrac{2t}{x^3(t)} + \dfrac{x^2(t) - 3t^2}{x^4(t)} \cdot \dot{x}(t) = 0$

HF $t\dot{x}(t) - 2t^2\sqrt{x(t)} = 4x(t)$

HF $\mathrm{e}^t \cdot x(t) + \cos t = \left(2x(t) - \mathrm{e}^t\right) \cdot \dot{x}(t)$

4. gyakorlat

Másodrendű lineáris egyenletek

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \tag{2}$$

$p,\ q,\ f : I \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények az I intervallumon. Az egyenletet homogénnek nevezzük, ha $f \equiv 0$, különben inhomogénnek hívjuk.

3. Tétel. *A fenti differenciálegyenlet minden megoldása előáll $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ alakban, ahol x_0 az inhomogén egyenlet megoldása, x_1 és x_2 pedig a homogén egyenlet lineárisan független megoldásai, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok.*

Az egyenlet megoldásainak előállítása tehát két lépésből áll: egyrészt a homogén egyenlet két lineárisan független megoldásának (alaprendszerének) meghatározása, másrészt az inhomogén egyenlet egy ún. partikuláris megoldásának (ez az $x_0(t)$) megkeresése.

Homogén egyenlet: A megoldások előállítására nincs általános módszer, két speciális esetet tárgyalunk.

(a) Ha az egyenlet állandó együtthatós, azaz $\ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) = 0$, ahol $p,\ q \in \mathbb{R}$, akkor a megoldást kereshetjük $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban. Ekkor λ-ra a

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{3}$$

egyenletet kapjuk. Ha ennek gyökei valósak és különbözők (λ_1, λ_2), akkor a két lineárisan független megoldás : $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$. Ha az egyenletnek kétszeres valós gyöke van (λ), akkor a két lineárisan független megoldás : $x_1(t) = e^{\lambda t}$, $x_2(t) = te^{\lambda t}$. Ha a gyökök nem valósak, azaz $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ és $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, akkor a két lineárisan független megoldás : $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$, $x_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Hasonlóan lehet eljárni magasabb rendű egyenlet esetében is, akkor természetesen (3) is magasabb fokú lesz.

(b) Ha ismerünk egy $x_1(t)$ megoldást, akkor egy másikat lehet $x_2(t) = x_1(t)z(t)$ alakban keresni, és ekkor $\dot{z}(t)$-re egy elsőrendű egyenletet kapunk. Az $x_1(t)$ megtalálására nincs általános módszer, gyakran érdemes speciális alakban (pl. polinom, vagy hatványsor) keresni.

Inhomogén egyenlet:

(a) Ha a (2) egyenlet állandó együtthatós és az inhomogén tag speciális alakú, akkor viszonylag egyszerűen meg lehet határozni egy $x_0(t)$ partikuláris megoldást:

4. Tétel. *Legyen* (2)*-ben p és q konstans függvény, valamint*

$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t)$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és P_1, P_2 polinomok. Jelölje k az $\alpha + \beta i$ multiplicitását (3)*-ban (k lehet 0 is). Ekkor* (2) *egy partikuláris megoldása előáll*

$$x_0(t) = t^k\mathrm{e}^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t)$$

alakban, ahol Q_1 és Q_2 polinomok, melyeknek foka legfeljebb P_1 és P_2 fokának maximuma.

(b) A partikuláris megoldás előállítható a homogén egyenlet alaprendszeréből az állandók variálásának módszerével is. Ez a módszer - az előzőtől eltérően - minden esetben működik, de nagyon sok számolást igényel. A (2) inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük $x_0(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ alakban, ahol $x_1,\ x_2$ a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása. Legyen

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix},$$

az ún. Wronski-determináns, ami az alapmegoldások lineáris függetlensége miatt sehol sem nulla. Ekkor a keresett $c_1,\ c_2$ függvények a következő képlettel számolhatók:

$$c_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}}{W(t)}, \qquad c_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x}_1(t) & f(t) \end{vmatrix}}{W(t)}$$

1. Oldjuk meg az alábbi másodrendű, állandó együtthatós homogén egyenleteket!

   (a) $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 6x(t) = 0$

   (b) $\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 16x(t) = 0$

   HF $4\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 37x(t) = 0$

   [alaprendszerek: (a): $\mathrm{e}^{3t},\ \mathrm{e}^{-2t}$; (b): $\mathrm{e}^{4t},\ t\mathrm{e}^{4t}$; HF: $\mathrm{e}^{-(1/2)t}\cos 3t,\ \mathrm{e}^{-(1/2)t}\sin 3t$.]

2. Oldjuk meg az alábbi másodrendű, állandó együtthatós inhomogén egyenleteket, próbafüggvénnyel vagy az állandók variálásának módszerével.

   (a) $\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 4x(t) = 3 - 2t - t^2$

   (b) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - 3x(t) = t^2\mathrm{e}^t$

   HF $\ddot{x}(t) + 4x(t) = \cos 2t$

   [megoldások: (a): $C_1\mathrm{e}^{-4t} + C_2\mathrm{e}^{-t} - t^2/4 + t/8 + 23/32$; (b): $C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-3t} + (t^3/12 - t^2/16 + t/32)\mathrm{e}^t$; HF: $C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + (t/4)\sin 2t$.]

3. Az alábbi másodrendű, függvény együtthatós egyenleteknél sejtsünk meg egy $x_1(t)$ megoldást és keressük meg a másik megoldást $x_2(t) = x_1(t)z(t)$ alakban!

   (a) $\left(t^2 + 1\right)\ddot{x}(t) - 2t\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$

   (b) $(2t + 1)\ddot{x}(t) + 4t\dot{x}(t) - 4x(t) = 0$

   (c) $t\ddot{x}(t) - (2t + 1)\dot{x}(t) + (t + 1)x(t) = 0$

   [alaprendszerek: (a): $t,\ t^2 - 1$; (b): $t,\ \mathrm{e}^{-2t}$; (c): $\mathrm{e}^t,\ t^2\mathrm{e}^t$.]

5. gyakorlat

Peremérték-problémák

Legyenek $a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{R}$, $a < b$, továbbá legyenek $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ adott számok és $f \in C[a,b]$. Az

$$\text{(PP)} \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) + p\dot{x}(t) + qx(t) = f(t) \\ \\ H_1x = \eta_1,\ H_2x = \eta_2 \end{cases} \tag{4}$$

feladatot *peremérték problémának* nevezik, ahol a peremfeltételben a $H_1,\ H_2 : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések az alábbi három típusba eshetnek:

(a) $H_1x := x(a) = \eta_1,\ H_2x := x(b) = \eta_2$ (Dirichlet-peremfeltétel)

(b) $H_1x := \dot{x}(a) = \eta_1,\ H_2x := \dot{x}(b) = \eta_2$ (Neumann-peremfeltétel)

(c) $H_1x := \alpha_1x(a) + \beta_1\dot{x}(a) = \eta_1,\ H_2x := \alpha_2x(b) + \beta_2\dot{x}(b) = \eta_2$, ahol $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}$ és $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ $(i = 1,2)$ (vegyes peremfeltétel)

A másodrendű egyenletekről tanultak szerint a (4) differenciálegyenlet minden megoldása előáll $x(t) = x_0(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ alakban, ahol x_0 az inhomogén, x_1 és x_2 pedig a homogén egyenlet megoldásai, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ha már megtaláltuk az x_0, x_1, x_2 függvényeket, akkor a (PP) megoldása azt jelenti, hogy megadjuk a c_1, c_2 számokat úgy, hogy x teljesítse a peremfeltételeket is. Az x függvényt a peremfeltételekbe helyettesítve kapjuk az alábbi tételt:

5. Tétel. *A (PP)-nak pontosan akkor létezik minden $f \in C[a,b]$ és minden $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ esetén egyetlen megoldása, ha léteznek a homogén egyenletnek olyan lineárisan független x_1, x_2 megoldásai, melyekre*

$$\det A := \begin{vmatrix} H_1x_1 & H_1x_2 \\ H_2x_1 & H_2x_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha ez a determináns nulla, akkor a (PP)-nak vagy végtelen sok megoldása van, vagy nincs megoldása.

A $\det A \neq 0$ feltétel úgy is fogalmazható, hogy a homogén (PP)-nak (melynél $f \equiv 0$, és $\eta_1 = \eta_2 = 0$) csak az azonosan nulla függvény megoldása.

1. Van-e nemtriviális (vagyis az azonosan nulla függvényen kívül) megoldása az alábbi peremérték problémáknak?

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(2\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} \ddot{x} - x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(2\pi) = 0 \end{cases}$$

[(a): $x(t) = C\sin t$ is megoldás minden $C \in \mathbb{R}$-re (azaz végtelen sok megoldás van); (b): csak a triviális megoldás van.]

2. Az alábbi homogén peremérték problémák közül melyiknek létezik egyértelműen megoldása, illetve melyiknek nincs megoldása? Amelyiknek van megoldása, azt számoljuk is ki!

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1 \end{cases} \qquad \text{HF} \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0 \\ x(0) = 0,\ \dot{x}(\pi) = e^{\pi} \end{cases}$$

[(a): $x(t) = 2\sin t$; (b): nincs megoldás; HF: $x(t) = -e^t \sin t$.]

3. Az alábbi inhomogén peremérték problémák közül melyiknek létezik egyértelműen megoldása, illetve melyiknek nincs megoldása? Amelyiknek van megoldása, azt számoljuk is ki!

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = 1 \\ x(0) = x(\pi/2) = 0 \end{cases} \qquad \text{HF} \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = 1 \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)} \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = 2t - \pi \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$$

[(a): $x(t) = -\cos t - \sin t + 1$; HF: nincs megoldás; (c): $x(t) = \pi\cos t + C\sin t + 2t - \pi$ minden $C \in \mathbb{R}$-re (azaz végtelen sok megoldás van).]

4. Mikor létezik egyértelműen megoldása az alábbi peremérték problémának, ha $b = \pi/4$ vagy $b = \pi/2$? Ha létezik megoldás, akkor számoljuk is ki.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4x(t) = e^t \\ x(0) = 1, \quad x(b) = 2 \end{cases}$$

[A $b = \pi/2$ esetén biztosan nem egyértelmű a megoldás (egyébként ekkor nincs megoldás), míg $b = \pi/4$ esetén $x(t) = \frac{4}{5}\cos 2t + (2 - e^{\pi/4}/5)\sin 2t + \frac{1}{5}e^t$.]

7. gyakorlat

Lineáris differenciálegyenlet-rendszer, a megoldás kiszámítása e^{At} segítségével

A következőkben az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{5}$$

állandó együtthatós lineáris rendszerekkel foglalkozunk, ahol tehát $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátrix. Szükségünk lesz a mátrix exponenciális függvényének fogalmára:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

1. Számítsuk ki definíció szerint az alábbi A mátrixok $t \mapsto e^{At}$ mátrix exponenciális függvényét!

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A (5) egyenlet egy alaprendszere megadható a mátrix exponenciális függvényének segítségével, az egydimenziós esettel teljesen analóg módon:

$$x(t) = e^{At}C, \quad C \in \mathbb{R}^n$$

Megemlítjük, hogy az exponenciális függvény kiszámítása a legritkább esetben történik definíció szerint. Erre két módszer ismert. Az egyik a mátrix Jordan-féle normálalakját használja (lásd előadáson), a másik a Hermite-féle interpolációs polinomokat. Ez utóbbit fogjuk használni.

6. Tétel (Az e^{At} mátrix kiszámítása Hermite-féle interpolációs polinom segítségével). *Jelölje az A mátrix minimálpolinomjának fokát m, az A különböző sajátértékeit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, ezek multiplicitását a minimálpolinomban $m_1, \dots, m_k$. Ekkor minden t-hez létezik olyan legfeljebb $m-1$-ed fokú p_t polinom (Hermite-féle interpolációs polinom), melyre $e^{At} = p_t(A)$. Ezeket a polinomokat az alábbi egyenletek határozzák meg:*

$$p_t^{(i)}(\lambda_j) = t^i e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, \dots, k;\ i = 0, 1, \dots, m_j - 1)$$

Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, akkor a következő esetek lehetségesek. Ha A két sajátértékére $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor a minimálpolinom foka 2 és mindkét sajátérték multiplicitása 1. Ekkor tehát a tétel feltételei szerint léteznek $p_t(z) = a_t z + b_t$ elsőfokú polinomok, melyekre $p_t(\lambda_j) = e^{\lambda_j t}$, $j = 1, 2$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ esetben ha A diagonális, akkor a minimálpolinom 1. fokú és $p_t(z) = e^{\lambda t}$ konstans polinom. Különben a minimálpolinom 2. fokú, a λ sajátérték multiplicitása 2, így a tétel feltételei szerint léteznek $p_t(z) = a_t z + b_t$ elsőfokú polinomok, melyekre $p_t(\lambda) = e^{\lambda t}$ és $p_t'(\lambda) = te^{\lambda t}$.

Oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenlet-rendszereket!

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^t,\ x_2(t) = C_2 e^{-t}]$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t,\ x_2(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t]$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t},\ x_2(t) = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}]$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$ $[x_1(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + (C_2 - C_1)\sin t),\ x_2(t) = e^{2t}((-2C_1 + C_2)\sin t + C_2 \cos t)]$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = e^{3t}(C_1(1-t) + C_2 t),\ x_2(t) = e^{3t}(-C_1 t + C_2(1+t))]$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^t,\ x_2(t) = (C_1 t + C_2)e^t]$

HF $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2,\ x_2(t) = C_1 e^{2t} - C_2]$

HF $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $[x_1(t) = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t},\ x_2(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}]$

8. gyakorlat

Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek, fáziskép, geometriai osztályozás

Kétdimenziós rendszerek megoldásait célszerű a fázissíkon (az (x_1, x_2) síkon) ábrázolni, mert így eggyel kevesebb dimenzióra van szükség. Motivációként számítsuk ki, majd a fázissíkon rajzoljuk fel az alábbi három rendszer megoldásait, másszóval trajektóriáit!

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris rendszereket és ábrázoljuk a megoldásokat a fázissíkon!

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases} \qquad \text{(c)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

Cél: határozzuk meg a lineáris rendszerek lehetséges fázisképeit, valamilyen ekvivalencia erejéig. Itt az ekvivalenciát nem pontosítjuk, a részleteket lásd az előadáson. Azt mindenesetre elfogadjuk, hogy ha két rendszer egymásba vihető lineáris koordináta transzformációval, akkor fázisképeiket nem tekintjük különbözőnek. Azt, hogy ezen belül mikor különböztetünk meg két fázisképet, majd menet közben döntjük el, de mint látni fogjuk nyilvánvaló lesz.

Induljunk ki egy $\dot{x} = Ax$ 2-dimenziós lineáris rendszerből ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$). Legyen $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertálható mátrix, és vezessük be az $y = Px$ új változót. Erre az $\dot{y} = PAP^{-1}y$ differenciálegyenletet kapjuk. Tehát elég azon lineáris rendszerek fázisképeit meghatározni, melyeknek mátrixa Jordan normálalakú. Ezért az alábbi három féle mátrixhoz tartozó fázisképeket kell felrajzolnunk (lásd az előadáson).

$$\text{(I)} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{(II)} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(III)} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Először azokban az esetekben rajzoljuk meg a fázisképeket, melyeknél csak az origó az egyensúlyi pont (azaz a mátrix determinánsa nem 0).

I. A megoldás $x_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = C_2 e^{\mu t}$. Ebből a trajektóriák képlete:

$$x_2 = C_2 \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^{\mu/\lambda} = C x_1^{\mu/\lambda}$$

A $\lambda \neq 0 \neq \mu$ értékekhez tartozó fázisképeket 3 osztályba fogjuk sorolni:

1 $\lambda, \mu > 0$. Instabil csomó. Rajzoljuk fel a trajektóriákat az (a) $0 < \mu < \lambda$; (b) $0 < \lambda < \mu$; (c) $0 < \mu = \lambda$ esetekben!

2 $\lambda, \mu < 0$. Stabil csomó. Rajzoljuk fel a trajektóriákat az (a) $\mu < \lambda < 0$; (b) $\lambda < \mu < 0$; (c) $\mu = \lambda < 0$ esetekben!

3 $\lambda < 0 < \mu$. Nyereg. Rajzoljuk fel a trajektóriákat!

II. A megoldás $x_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}$, $x_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$. Ebből a trajektóriák képlete:

$$x_1 = x_2 \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_2}{C_2}\right)$$

A $\lambda \neq 0$ értékekhez tartozó fázisképeket 2 osztályba fogjuk sorolni:

1 $\lambda > 0$. Instabil elfajult csomó. Rajzoljuk fel a trajektóriákat!

2 $\lambda < 0$. Stabil elfajult csomó. Rajzoljuk fel a trajektóriákat!

III. Vezessünk be polárkoordinátákat: $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Az új változókra az

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\varphi} = \beta \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszert kapjuk, melynek megoldása $r(t) = e^{\alpha t} r_0$, $\varphi(t) = \beta t + \varphi_0$. Ennek alapján a $\beta \neq 0$ értékekhez tartozó fázisképeket 3 osztályba fogjuk sorolni:

1 $\alpha > 0$. Instabil fókusz. Rajzoljuk fel a trajektóriákat!

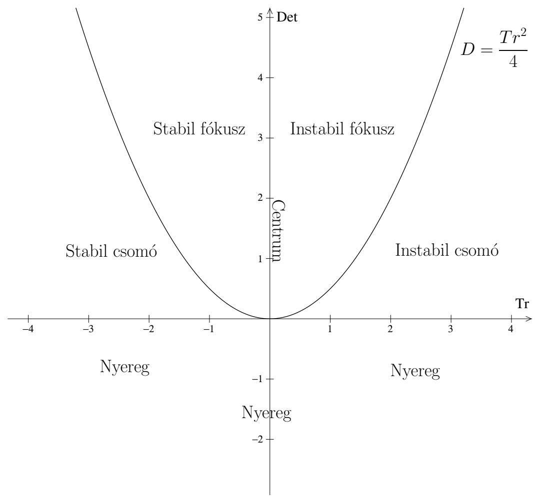
2 $\alpha < 0$. Stabil fókusz. Rajzoljuk fel a trajektóriákat!

3 $\alpha = 0$. Centrum. Rajzoljuk fel a trajektóriákat!

Négy olyan elfajult fáziskép van, melyeknél nem csak az origó az egyensúlyi pont (azaz a mátrix determinánsa 0): az I. esetben $\lambda = 0$ és $\mu > 0$; az I. esetben $\lambda = 0$ és $\mu < 0$; az I. esetben $\lambda = 0$ és $\mu = 0$; a II. esetben $\lambda = 0$. Ha van idő, rajzoljuk fel ezeket a fázisképeket is.

Térjünk vissza az általános esetre (mielőtt Jordan normálalakra transzformáltuk a rendszert). A fáziskép a megfelelő Jordan alakhoz tartozó rajz visszatranszformálásával nyerhető. Könnyen igazolható, hogy ennek során az I. és II. esetben a csomók, illetve a nyereg tengelyei elfordulnak, és éppen az A mátrix sajátirányaival fognak egybeesni.

Érdemes észrevenni, hogy a fáziskép típusa a sajátértékek kiszámítása nélkül, a mátrix determinánsa (D) és nyoma (Tr) segítségével meghatározható, az alábbi ábra szerint. (A parabola egyenlete $Tr^2 = 4D$.)



2. Oldjuk meg az alábbi lineáris rendszereket és ábrázoljuk a trajektóriákat a fázissíkon!

(a) $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{cases}$ [centrum]

Az alábbi rendszernél térjünk át polárkoordinátákra. Az $\omega = 0$ eset az előző feladatot adja, mi a helyzet, ha $\omega > 0$ vagy $\omega < 0$?

(b) $\begin{cases} \dot{x}_1 &= \omega x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \omega x_2 \end{cases}$ [$\omega > 0$: instabil fókusz; $\omega < 0$: stabil fókusz]

Állapítsuk meg a fáziskép típusát és rajzoljuk le a fázisportrékat!

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 + x_2 \end{cases}$ [nyereg]

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 4x_2 \end{cases}$ [instabil elfajult csomó]

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= 8x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 5x_2 \end{cases}$ [instabil csomó]

HF $\begin{cases} \dot{x}_1 &= 3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 \end{cases}$ [nyereg]

HF $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \end{cases}$ [stabil csomó]

9. gyakorlat

Autonóm egyenlet/rendszer, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerek, egyensúlyi pontban a fáziskép lokálisan olyan, mint a linearizált rendszernek (ha $f'(p)$ sajátértékeire $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$), teljes fáziskép közelítő rajza

Tekintsünk először egy n-dimenziós autonóm rendszert:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad (f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \tag{6}$$

Ez általában képlettel nem oldható meg, így a legtöbb információt a megoldásokról a fáziskép szolgáltatja. Az $x(t) \equiv p$ konstans megoldásokat az $f(p) = 0$ algebrai egyenletrendszer megoldásával nyerhetjük. Ezen p pontokat nevezzük egyensúlyi, vagy stacionárius pontoknak. A trajektóriák viselkedése az egyensúlyi pontok kis környezetében linearizálással határozható meg. Ez heurisztikusan a következőt jelenti. Az $y(t) = x(t) - p$ új függvényre a differenciálegyenlet

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(p + y(t)) = f(p) + f'(p)y(t) + r(y(t)) = f'(p)y(t) + r(y(t))$$

ahol r a maradéktagot jelöli. Mivel kis y esetén ez kisebb nagyságrendű, mint a lineáris tag (ha az nem túl kicsi, pl. nem zérus), azért várható, hogy a p egyensúlyi pont egy környezetében a fázisképet az

$$\dot{y}(t) = f'(p)y(t) \tag{7}$$

ún. linearizált egyenlet meghatározza. Itt két dolgot kell pontosítani, egyrészt, hogy mi a nem túl kicsi lineáris tag, másrészt, hogy milyen értelemben határozza meg a fázisképet (lásd előadáson).

Az alábbi tétel csak kétdimenziós rendszerekre vonatkozik, tehát mostantól legyen (6)-ben $n = 2$. Először definiálni kell, hogy mit értünk azon, hogy egy egyensúlyi pont fókusz, csomó, illetve nyereg.

7. Definíció. *Írjuk fel a p egyensúlyi pont egy U környezetében a megoldásokat polárkoordinátákban. A p pont*

- *Stabil fókusz, ha* $\lim_{+\infty} r = 0$, $\lim_{+\infty} |\varphi| = \infty$.
- *Instabil fókusz, ha* $\lim_{-\infty} r = 0$, $\lim_{-\infty} |\varphi| = \infty$.
- *Stabil csomó, ha* $\lim_{+\infty} r = 0$, $\lim_{+\infty} |\varphi| < \infty$.
- *Instabil csomó, ha* $\lim_{-\infty} r = 0$, $\lim_{-\infty} |\varphi| < \infty$.
- *Nyereg, ha létezik 2 olyan pálya U-ban, melyekből a trajektória $t \to +\infty$ esetén p-hez tart, létezik 2 olyan pálya U-ban, melyekből a trajektória $t \to -\infty$ esetén p-hez tart, és a többi pontból induló trajektória $t \to +\infty$ és $t \to -\infty$ esetén is elhagyja U-t.*

8. Tétel. *Legyen $n = 2$. Ha $f \in C^2$ és $Re\lambda \neq 0$ az $f'(p)$ mátrix minden sajátértékére, akkor a* (6) *rendszer p egyensúlyi pontja ugyanolyan típusú, mint a* (7) *rendszerben az origó.*

Az alábbi kétdimenziós rendszerekben keressük meg az egyensúlyi pontokat, és határozzuk meg azok típusát. Próbáljuk meg a teljes fázisképet megrajzolni. Ehhez használjuk az iránymezőt, azaz az egyes pontokban az $f(x)$ vektor irányát, ugyanis ez éppen a trajektória érintővektora. A rajzok elkészítéséhez sokszor elegendő annyit tudni a vektorról, hogy az egyes pontokban fel, vagy le, illetve balra, vagy jobbra mutat. Ennek eldöntésében segítenek a nullklínák, azaz az $\dot{x} = 0$, illetve $\dot{y} = 0$ görbék. Ugyanis ezek olyan tartományokra osztják a fázissíkot, amelyeken belül a trajektória irányvektora fel-le, illetve bal-jobb váltást nem tehet, azaz a tartomány egyetlen pontjában elég berajzolni az irányvektort, a többi pontokban az irányvektor ugyanilyen fel-le, illetve bal-jobb szempontból.

1. $\begin{cases} \dot{x} &= x - xy \\ \dot{y} &= x^2 - y \end{cases}$ [egyensúlyi pontok: $(0,0)$, nyereg; $(1,1)$, stabil fókusz; $(-1,-1)$, stabil fókusz]

2. $\begin{cases} \dot{x} &= x(y-1) \\ \dot{y} &= y(x-1) \end{cases}$ [egyensúlyi pontok: $(0,0)$, stabil csomó; $(1,1)$, nyereg]

3. $\begin{cases} \dot{x} &= y^2 - 4x^2 \\ \dot{y} &= 8 - 4y \end{cases}$ [egyensúlyi pontok: $(1,2)$, stabil csomó; $(-1,2)$, nyereg]

HF $\begin{cases} \dot{x} &= x - x^2 - xy \\ \dot{y} &= 3y - xy - 2y^2 \end{cases}$ [egyensúlyi pontok: $(0,0)$, instabil csomó; $(0,3/2)$, stabil csomó; $(1,0)$, nyereg; $(-1,2)$, nyereg]

HF $\begin{cases} \dot{x} &= x + y^2 \\ \dot{y} &= x + y \end{cases}$ [egyensúlyi pontok: $(0,0)$, instabil elfajult csomó; $(-1,1)$, nyereg]