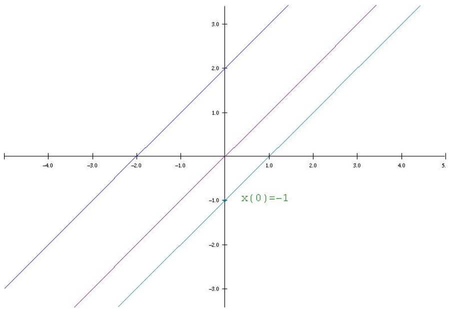
Differenciálegyenletek gyakorlat, megoldások
Matematika BSc II/2, elemző szakirány

1. gyakorlat

1. Keressük meg az $\dot{x}(t) = 2\sin t$ differenciálegyenletnek azt az integrálgörbéjét, amely áthalad az origón!
Megoldás: $\dot{x}(t) = 2\sin t \Rightarrow x(t) = -2\cos t + c$, $c \in \mathbb{R}$. Az origón áthaladó görbére $x(0) = 0 \Rightarrow$ $x(0) = -2\cos 0 + c = -2 + c = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow x(t) = -2\cos t + 2$.

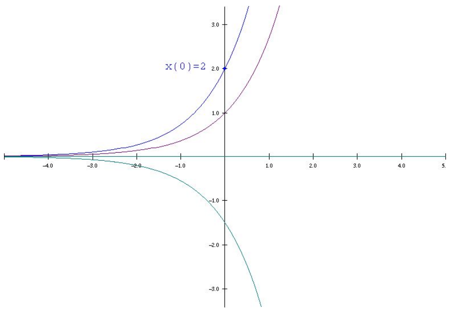
2. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket! Rajzoljuk fel az iránymezőt, illetve a megoldásokat, szemléltessük a kezdeti feltételt.

   (a) $\dot{x}(t) = 1$ *Megoldás:* $\dot{x}(t) = 1 \Rightarrow x(t) = t + c$, $c \in \mathbb{R}$.



1. ábra. $x(t) = t + c$

   (b) $\dot{x}(t) = x(t)$ *Megoldás:* Szorozzuk be az egyenletet e^{-t}-vel, ekkor
   $\dot{x}(t) \cdot \mathrm{e}^{-t} - x(t) \cdot \mathrm{e}^{-t} = 0 \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-t}x(t)\right)' = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-t}x(t) = c \Rightarrow x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{t}$, $c \in \mathbb{R}$



2. ábra. $x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{t}$

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\dot{x}(t) = kx(t) \quad (k \in \mathbb{R})$ egyenlet minden megoldása $x(t) = Ce^{kt}$ alakú!
Megoldás: Szorozzuk be az egyenletet e^{-kt}-vel, ekkor
$\dot{x}(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} - kx(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} = 0 \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-kt}x(t)\right)' = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-kt}x(t) = c \Rightarrow x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{kt}$, $c \in \mathbb{R}$

4. $(t+1)\dot{x}(t) = tx(t)$
Megoldás: Szorozzuk be az egyenletet e^{-t}-vel, ekkor
$(t+1)\dot{x}(t) \cdot \mathrm{e}^{-t} - tx(t) \cdot \mathrm{e}^{-t} = 0 \Rightarrow \left((t+1)x(t)\mathrm{e}^{-t}\right)' = 0 \Rightarrow (t+1)x(t)\mathrm{e}^{-t} = c \Rightarrow x(t) = c \cdot \frac{\mathrm{e}^{t}}{t+1}$, $c \in \mathbb{R}$

5. $\dot{x}(t) = tx(t)$
Megoldás: Szorozzuk be az egyenletet $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$-vel, ekkor
$$\dot{x}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - tx(t) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0 \Rightarrow \left(\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}x(t)\right)' = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}x(t) = c \Rightarrow x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}, \ c \in \mathbb{R}$$

6. $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{x(t)\,(9+4t^2)}$
Megoldás: $\dot{x}(t) \cdot x(t) = \frac{1}{9+4t^2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2(t) = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}(\frac{2}{3}t) + c$, $c \in \mathbb{R}$

7. Egy tartályban 100 liter 10 kg sót tartalmazó oldat van. A tartályba 5 l/min sebességgel víz ömlik be, amely elkeveredik a benne levő oldattal. A keverék a tartály alján ugyanekkora sebességgel folyik ki. Mennyi só marad a tartályban 1 óra múlva?

   Beadható feladat április 5-ig!

HF $\dot{x}(t) = \left(1 + x^2(t)\right)\left(1 + t^2\right)$

Megoldás: $\frac{\dot{x}(t)}{1+x^2(t)} = 1 + t^2 \Rightarrow \operatorname{arc\,tg} x(t) = t + \frac{t^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}$

HF $\dot{x}(t) = 2x(t) \operatorname{ctg} t$

Megoldás: Legyen pl. $t \in (0, \pi) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 2\frac{\cos t}{\sin t} \Rightarrow \ln|x(t)| = 2 \ln \sin t + c \Rightarrow x(t) = c \cdot \sin^2 t,\ c \in \mathbb{R}$

HF A 100 ℃ meleg lekvárt kirakjuk hűlni a levegőre, amely 20 ℃-os. A lekvár hőmérséklete 10 órakor 30 ℃, 11 órakor 25 ℃. Mikor raktuk ki a lekvárt hűlni? (Tudjuk, hogy a lehűlés sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével.)

Beadható feladat április 5-ig!

2. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

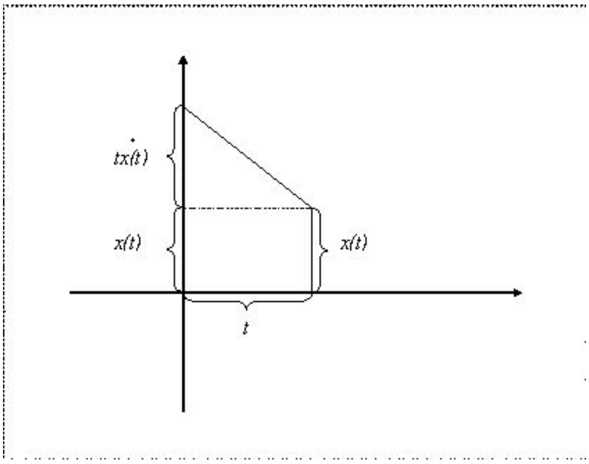
   (a) $t\dot{x}(t) = t + 2x(t)$
   Megoldás: $\dot{x}(t) = \frac{2}{t}x(t) + 1$.
   A homogén egyenlet megoldása: $\dot{x}(t) = \frac{2}{t}x(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{2}{t} \Rightarrow \ln|x(t)| = \ln t^2 + c \Rightarrow x(t) = c \cdot t^2$.
   Az inhomogén egyenlet megoldását keressük $x(t) = c(t) \cdot t^2$ alakban. Erre felírva az egyenletet: $\dot{x}(t) = \dot{c}(t) \cdot t^2 + c(t) \cdot 2t = \frac{2}{t} \cdot t^2 \cdot c(t) + 1 \Rightarrow \dot{c}(t) \cdot t^2 = 1 \Rightarrow \dot{c}(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow c(t) = -\frac{1}{t} + c \Rightarrow x(t) = c(t) \cdot t^2 = -t + c \cdot t,\ c \in \mathbb{R}$.

   (b) $\dot{x}(t) = \dfrac{x(t)}{t} + t^2 + 3t - 2$
   Megoldás:
   A homogén egyenlet megoldása: $\dot{x}(t) = \frac{1}{t}x(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \ln|x(t)| = \ln|t| + c \Rightarrow x(t) = c \cdot t$.
   Az inhomogén egyenlet megoldását keressük $x(t) = c(t) \cdot t$ alakban. Erre felírva az egyenletet: $\dot{x}(t) = \dot{c}(t) \cdot t + c(t) = \frac{c(t) \cdot t}{t} + t^2 + 3t - 2 \Rightarrow \dot{c}(t) \cdot t = t^2 + 3t - 2 \Rightarrow \dot{c}(t) = t + 3 - \frac{2}{t} \Rightarrow c(t) = \frac{t^2}{2} + 3t - 2\ln|t| + c \Rightarrow x(t) = c(t) \cdot t = \frac{t^3}{2} + 3t^2 - t \ln t^2 + c \cdot t,\ c \in \mathbb{R}$.

   (c) $\dot{x}(t) = 3t^2 x(t) + t^2$
   Megoldás:
   A homogén egyenlet megoldása: $\dot{x}(t) = 3t^2 x(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 3t^2 \Rightarrow \ln|x(t)| = t^3 + c \Rightarrow x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{t^3}$.
   Az inhomogén egyenlet megoldását keressük $x(t) = c(t) \cdot \mathrm{e}^{t^3}$ alakban. Erre felírva az egyenletet: $\dot{x}(t) = \dot{c}(t) \cdot \mathrm{e}^{t^3} + c(t) 3t^2 \mathrm{e}^{t^3} = 3t^2 \cdot c(t) \mathrm{e}^{t^3} + t^2 \Rightarrow \dot{c}(t) \cdot \mathrm{e}^{t^3} = t^2 \Rightarrow \dot{c}(t) = t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t^3} \Rightarrow c(t) = -\frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{-t^3} + c$ $\Rightarrow x(t) = c(t) \cdot \mathrm{e}^{t^3} = -\frac{1}{3} + c \cdot \mathrm{e}^{t^3},\ c \in \mathbb{R}$.

2. Legyen $x : [0, \infty) \to (0, \infty)$ egy differenciálható függvény, amelyről tudjuk, hogy minden $\tau > 0$ esetén a $(\tau, x(\tau))$ pontba húzott érintő, a $t = \tau$ egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott trapéz területe állandó. $x(t) =?$

   Megoldás: A 3. ábra alapján a következő differenciálegyenletet írhatjuk fel: $(t\dot{x}(t) + 2x(t)) \cdot t = k$. Átrendezve egy lineáris egyenletet kapunk: $\dot{x}(t) = -\frac{2}{t} \cdot x(t) + \frac{k}{t^2}$.
   A homogén egyenlet megoldása: $\dot{x}(t) = -\frac{2}{t}x(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -\frac{2}{t} \Rightarrow \ln|x(t)| = \ln\frac{1}{t^2} + c \Rightarrow x(t) = c \cdot \frac{1}{t^2}$.
   Az inhomogén egyenlet megoldását keressük $x(t) = c(t) \cdot \frac{1}{t^2}$ alakban. Erre felírva az egyenletet: $\dot{x}(t) = \dot{c}(t) \cdot \frac{1}{t^2} + c(t) \cdot \frac{-2}{t^3} = -\frac{2}{t} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot c(t) + \frac{k}{t^2} \Rightarrow \dot{c}(t) = k \Rightarrow c(t) = kt + c \Rightarrow x(t) = c(t) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{k}{t} + \frac{c}{t^2}$, $c \in \mathbb{R}$.



3. ábra. A 2. feladat megoldása

3. Igazoljuk az alábbiakat!

   (a) A $\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}$ egyenlet megoldása az $x = 0$ egyenes pontjaiban lokálisan nem egyértelmű.

   Megoldás: Az egyenletnek az $x \equiv 0$ konstans megoldása is van, valamint az $x(t) = \frac{(t+c)^2}{4}$, $t \geq -c$, $x(t) = -\frac{(t+c)^2}{4}$, $t \leq -c$ is megoldásai.

   (b) A $\dot{x}(t) = x(t) \cdot \ln|x(t)|$ egyenlet jobb oldalán a függvény mindenhol folytonos és a megoldás lokálisan egyértelmű annak ellenére, hogy a nullában a lokális Lipschitz-folytonosság nem teljesül.

   Megoldás: Az $f(t,p) = p\ln|p|$ jobb oldalra $f_p'(t,p) = \ln|p| + 1$ nem korlátos a 0 semmilyen környezetében, így f nem lokálisan Lipschitz. A megoldások azonban $|x(t)| = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{t}\cdot c}$, $c \in \mathbb{R}$

HF $t\dot{x}(t) - 2x(t) = 2t^4$

Megoldás: $\dot{x}(t) = \frac{2}{t}x(t) + 2t^3$

A homogén egyenlet megoldása: $\dot{x}(t) = \frac{2}{t}x(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{2}{t} \Rightarrow \ln|x(t)| = \ln t^2 + c \Rightarrow x(t) = c \cdot t^2$.

Az inhomogén egyenlet megoldását keressük $x(t) = c(t) \cdot t^2$ alakban. Erre felírva az egyenletet: $\dot{x}(t) = \dot{c}(t) \cdot t^2 + c(t) \cdot 2t = \frac{2}{t} \cdot t^2 \cdot c(t) + 2t^3 \Rightarrow \dot{c}(t) \cdot t^2 = 2t^3 \Rightarrow \dot{c}(t) = 2t \Rightarrow c(t) = t^2 + c \Rightarrow x(t) = c(t) \cdot t^2 = t^4 + c \cdot t^2$, $c \in \mathbb{R}$.

HF $\dot{x}(t) + 2t \cdot x(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t$

Megoldás: $\dot{x}(t) = -2t \cdot x(t) + t \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t$

A homogén egyenlet megoldása: $\dot{x}(t) = -2t \cdot x(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = -2t \Rightarrow \ln|x(t)| = -t^2 + c \Rightarrow x(t) = c \cdot \mathrm{e}^{-t^2}$.

Az inhomogén egyenlet megoldása $x(t) = c(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2}$ alakban. Erre felírva az egyenletet: $\dot{x}(t) = \dot{c}(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} - 2t \cdot c(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} = -2t \cdot c(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} + t \cdot \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \sin t \Rightarrow \dot{c}(t) = t \cdot \sin t$, parciális integrálással $c(t) = -t \cdot \cos t + \sin t + c \Rightarrow x(t) = (-t \cdot \cos t + \sin t + c) \cdot \mathrm{e}^{-t^2}$, $c \in \mathbb{R}$.

HF A kis hangya egy 10 cm hosszú gumiszalag jobb végpontjából 1 cm/s sebességgel indul el a szalag rögzített bal végpontja felé. A gonosz manó ezzel egyidejűleg a szalag jobb végpontját 100 cm/s sebességgel húzza hátra. Eljut-e valamikor a hangya a szalag másik végére (és ha igen, mikor)?

Beadható feladat április 5-ig!

3. gyakorlat

1. $\left(t^3 + x^3(t)\right) + 3tx^2(t)\dot{x}(t) = 0$

   Megoldás: Egzakt KDE, $M(t,x) = t^3 + x^3$, $N(t,x) = 3tx^2$, $\partial_2 M(t,x) = 3x^2 = \partial_1 N(t,x)$.

   Az $F(t,x)$ megoldófüggvényre: $\partial_1 F = M \Rightarrow F(t,x) = t^4/4 + tx^3 + c(x)$. $\partial_2 F = N \Rightarrow 3tx^2 + c'(x) = 3tx^2 \Rightarrow c(x) = c \Rightarrow$ a megoldás: $F(t,x(t)) = t^4/4 + tx(t)^3 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. $\dot{x}(t) = 2x(t) + t + 1$

Megoldás: Helyettesítsünk $y(t) = 2x(t) + t + 1$-et! Ekkor: $\dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + 1 \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{1}{2}(\dot{y}(t) - 1) \Rightarrow$ az egyenlet: $\frac{1}{2}(\dot{y}(t) - 1) = y(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = 2y(t) + 1$, lineáris típusú $\Rightarrow$ a homogén egyenlet megoldása: $y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{2t}$, az inhomogén egyenlet $y(t) = c(t) \cdot \mathrm{e}^{2t}$ megoldására: $\dot{c}(t)\mathrm{e}^{2t} + c(t)2\mathrm{e}^{2t} = 2c(t)\mathrm{e}^{2t} + 1 \Rightarrow$ $c(t) = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2t} + c \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} + c \cdot \mathrm{e}^{2t} \Rightarrow x(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + c \cdot \mathrm{e}^{2t}$, $c \in \mathbb{R}$.

3. $t \cdot \dot{x}(t) = t + x(t) + \frac{x^2(t)}{t}$

Megoldás: t-vel osztva: $\dot{x}(t) = 1 + \frac{x(t)}{t} + \frac{x^2(t)}{t^2}$ homogén KDE. Helyettesítsünk $y(t) = \frac{x(t)}{t}$-t! Ekkor: $x(t) = t \cdot y(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = y(t) + t \cdot \dot{y}(t) \Rightarrow$ az egyenlet: $y(t) + t \cdot \dot{y}(t) = 1 + y(t) + y^2(t) \Rightarrow \frac{\dot{y}(t)}{1+y^2(t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow$ $\operatorname{arc\,tg}(y(t)) = \ln t + c \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}(\frac{x(t)}{t}) = \ln t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

4. $\dot{x}(t) + 2x(t) = x^2(t)\mathrm{e}^t$

Megoldás: Bernoulli-féle KDE, $\alpha = 2$. Helyettesítsünk $y(t) = x^{1-\alpha}(t) = \frac{1}{x(t)}$-t! Ekkor: $x(t) = \frac{1}{y(t)}$ $\Rightarrow \dot{x}(t) = -\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)} \Rightarrow$ az egyenlet: $-\frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)} + 2\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y^2(t)}\mathrm{e}^t \Rightarrow$ átszorozva $y^2(t)$-vel $-\dot{y}(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^t$ lineáris típusú $\Rightarrow$ a homogén egyenlet megoldása: $y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{2t}$, az inhomogén egyenlet $y(t) = c(t) \cdot \mathrm{e}^{2t}$ megoldására: $-\dot{c}(t)\mathrm{e}^{2t} - c(t)2\mathrm{e}^{2t} + 2c(t)\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^t \Rightarrow c(t) = \mathrm{e}^{-t} + c \Rightarrow y(t) = \mathrm{e}^t + c \cdot \mathrm{e}^{2t} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^t + c \cdot \mathrm{e}^{2t}}$, $c \in \mathbb{R}$.

5. $t + \sin x(t) + \left(x^2(t) + t\cos x(t)\right)\dot{x}(t) = 0$

Megoldás: Egzakt KDE, $M(t,x) = t + \sin x$, $N(t,x) = x^2 + t\cos x$, $\partial_2 M(t,x) = \cos x = \partial_1 N(t,x)$.

Az $F(t,x)$ megoldófüggvényre: $\partial_1 F = M \Rightarrow F(t,x) = t^2/2 + t\sin x + c(x)$. $\partial_2 F = N \Rightarrow t\cos x + c'(x) = x^2 + t\cos x \Rightarrow c(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow$ a megoldás: $F(t,x(t)) = t^2/2 + t\sin x(t) + \frac{x(t)^3}{3} = c$, $c \in \mathbb{R}$.

6. $\dot{x}(t) = (t + x(t))^2$

Megoldás: Helyettesítsünk $y(t) = t + x(t)$-t! Ekkor: $x(t) = y(t) - t \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{y}(t) - 1 \Rightarrow$ az egyenlet: $\dot{y}(t) - 1 = y^2(t) \Rightarrow \frac{\dot{y}(t)}{y^2(t)+1} = 1 \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}(y(t)) = t + c \Rightarrow \operatorname{arc\,tg}(t + x(t)) = t + c$, $c \in \mathbb{R}$.

7. $t + \dfrac{2t}{x^3(t)} + \dfrac{x^2(t) - 3t^2}{x^4(t)} \cdot \dot{x}(t) = 0$

Megoldás: Egzakt KDE, $M(t,x) = t + \frac{2t}{x^3}$, $N(t,x) = \frac{x^2 - 3t^2}{x^4}$, $\partial_2 M(t,x) = -\frac{6t}{x^4} = \partial_1 N(t,x)$.

Az $F(t,x)$ megoldófüggvényre: $\partial_1 F = M \Rightarrow F(t,x) = t^2/2 + \frac{t^2}{x^3} + c(x)$. $\partial_2 F = N \Rightarrow -\frac{3t^2}{x^4} + c'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3t^2}{x^4} \Rightarrow c(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow$ a megoldás: $F(t,x(t)) = t^2/2 + \frac{t^2}{x^3(t)} - \frac{1}{x(t)} = c$, $c \in \mathbb{R}$.

HF $t\dot{x}(t) - 2t^2\sqrt{x(t)} = 4x(t)$

Megoldás: Bernoulli-féle KDE, $\alpha = \frac{1}{2}$. Helyettesítsünk $y(t) = x^{1-\alpha}(t) = \sqrt{x(t)}$-t! Ekkor: $x(t) = y^2(t)$ $\Rightarrow \dot{x}(t) = 2\dot{y}(t)y(t) \Rightarrow$ az egyenlet: $t2\dot{y}(t)y(t) - 2t^2 y(t) = 4y^2(t) \Rightarrow$ osztva $y(t)$-vel: $2t\dot{y}(t) - 2t^2 = 4y(t)$ $\Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{2}{t}y(t) + t$ lineáris típusú $\Rightarrow$ a homogén egyenlet megoldása: $y(t) = c \cdot t^2$, az inhomogén egyenlet $y(t) = c(t) \cdot t^2$ megoldására: $\dot{c}(t)t^2 + c(t)2t = \frac{2}{t}c(t) \cdot t^2 + t \Rightarrow c(t) = \ln t + c \Rightarrow y(t) = t^2 \ln t + ct^2 \Rightarrow$ $x(t) = \left(t^2 \ln t + ct^2\right)^2$, $c \in \mathbb{R}$.

HF $\mathrm{e}^t \cdot x(t) + \cos t = \left(2x(t) - \mathrm{e}^t\right) \cdot \dot{x}(t)$

Megoldás: Egzakt KDE, $M(t,x) = \mathrm{e}^t \cdot x + \cos t$, $N(t,x) = \mathrm{e}^t - 2x$, $\partial_2 M(t,x) = \mathrm{e}^t = \partial_1 N(t,x)$.

Az $F(t,x)$ megoldófüggvényre: $\partial_1 F = M \Rightarrow F(t,x) = \mathrm{e}^t \cdot x + \sin t + c(x)$. $\partial_2 F = N \Rightarrow \mathrm{e}^t + c'(x) = \mathrm{e}^t - 2x$ $\Rightarrow c(x) = -x^2 \Rightarrow$ a megoldás: $F(t,x(t)) = \mathrm{e}^t \cdot x(t) + \sin t - x^2(t) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

4. gyakorlat

Másodrendű lineáris egyenletek

1. Oldjuk meg az alábbi másodrendű, állandó együtthatós homogén egyenleteket!

   (a) $\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - 6x(t) = 0$
   Megoldás: A $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ egyenlet megoldásai $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, így az alaprendszer e^{3t}, e^{-2t}, tehát az összes megoldás $x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{3t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) $\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 16x(t) = 0$
   Megoldás: A $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ egyenlet megoldása $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, így az alaprendszer e^{4t}, $t\mathrm{e}^{4t}$, tehát az összes megoldás $x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{4t} + c_2 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{4t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   HF $4\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 37x(t) = 0$
   Megoldás: A $4\lambda^2 + 4\lambda + 37 = 0$ egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -(1/2) + 3\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -(1/2) - 3\mathrm{i}$, így az alaprendszer $\mathrm{e}^{-(1/2)t} \cos 3t$, $\mathrm{e}^{-(1/2)t} \sin 3t$, tehát az összes megoldás $x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-(1/2)t} \cos 3t + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-(1/2)t} \sin 3t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Oldjuk meg az alábbi másodrendű, állandó együtthatós inhomogén egyenleteket, próbafüggvénnyel vagy az állandók variálásának módszerével.

   (a) $\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 4x(t) = 3 - 2t - t^2$
   Megoldás:
   1. homogén egyenlet megoldása: A $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$, így az alaprendszer e^{-t}, e^{-4t}, tehát az összes megoldás $x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{-t} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-4t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   2. inhomogén egyenlet megoldása: A jobb oldal $f(t) = 3 - 2t - t^2 = \mathrm{e}^{\alpha t}(P_1(t) \cos \beta t + P_2(t) \sin \beta t)$ alakú, ahol $\alpha = \beta = 0$, $P_1(t) = 3 - 2t - t^2$, $\alpha + \beta\mathrm{i} = 0$ multiplicitása $k = 0$. Ezért a Tétel alapján létezik $x_0(t) = Q_1(t) = at^2 + bt + c$ alakú (partikuláris) megoldás. Mivel $\dot{x}_0(t) = 2at + b$, $\ddot{x}_0(t) = 2a$, ezért az egyenletből a következő feltételeket kapjuk az együtthatókra: $4a = -1 \Rightarrow a = -(1/4)$; $10a + 4b = -2 \Rightarrow 4b = 1/2 \Rightarrow b = 1/8$; $2a + 5b + 4c = 3 \Rightarrow 4c = 23/8 \Rightarrow c = 23/32$.
   Tehát $x_0(t) = -t^2/4 + t/8 + 23/32$.
   Az összes megoldás: $c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{-4t} - t^2/4 + t/8 + 23/32$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   2*. inhomogén egyenlet megoldása másik módszerrel: $W(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \cdot (-4)\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{-t} \cdot \mathrm{e}^{-4t} = -3\mathrm{e}^{-5t}$.

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t) \cdot f(t)}{W(t)} = \int \frac{-\mathrm{e}^{-4t} \cdot (3 - 2t - t^2)}{-3\mathrm{e}^{-5t}} = \frac{1}{3} \int \mathrm{e}^{t} \cdot (3 - 2t - t^2)$$

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t) \cdot f(t)}{W(t)} = \int \frac{\mathrm{e}^{-t} \cdot (3 - 2t - t^2)}{-3\mathrm{e}^{-5t}} = -\frac{1}{3} \int \mathrm{e}^{4t} \cdot (3 - 2t - t^2).$$

   Parciális integrálással: $c_1(t) = \mathrm{e}^t(1 - \frac{1}{3}t^2)$, $c_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{4t}}{12}(t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{27}{8})$. Így $x_0(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = 1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{12}(t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{27}{8}) = -t^2/4 + t/8 + 23/32$ ugyanazt kapjuk, mint az előbb.

   (b) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - 3x(t) = t^2\mathrm{e}^t$
   1. homogén egyenlet megoldása: A $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ egyenlet megoldásai $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, így az alaprendszer e^t, e^{-3t}, tehát az összes megoldás $x(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^t + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   2. inhomogén egyenlet megoldása: A jobb oldal $f(t) = t^2\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{\alpha t}(P_1(t) \cos \beta t + P_2(t) \sin \beta t)$ alakú, ahol $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(t) = t^2$, $\alpha + \beta\mathrm{i} = 1$ multiplicitása $k = 1$. Ezért a Tétel alapján létezik $x_0(t) = t\mathrm{e}^t Q_1(t) = \mathrm{e}^t(at^3 + bt^2 + ct)$ alakú (partikuláris) megoldás. Mivel $\dot{x}_0(t) = \mathrm{e}^t(at^3 + (3a + b)t^2 + (2b + c)t + c)$, $\ddot{x}_0(t) = \mathrm{e}^t(at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b + c)t + 2b + 2c)$, ezért az egyenletből a

következő feltételeket kapjuk az együtthatókra:

$$\begin{aligned}
t^3 \text{ együtthatójára: } & a + 2a - 3a = 0 \text{ mindig teljesül} \\
t^2 \text{ együtthatójára: } & 6a + b + 6a + 2b - 3b = 1 \Rightarrow 12a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{12} \\
t \text{ együtthatójára: } & 6a + 4b + c + 4b + 2c - 3c = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + 8b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{16} \\
1 \text{ együtthatójára: } & 2b + 4c = 0 \Rightarrow -\frac{1}{8} + 4c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$

Tehát $x_0(t) = \mathrm{e}^t \cdot (t^3/12 - t^2/16 + t/32)$.
Az összes megoldás: $c_1\mathrm{e}^t + c_2e^{-3t} + \mathrm{e}^t(t^3/12 - t^2/16 + t/32)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2*. inhomogén egyenlet megoldása másik módszerrel: $W(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = \mathrm{e}^t \cdot (-3)\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{-3t} = -4\mathrm{e}^{-2t}$.

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t) \cdot f(t)}{W(t)} = \int \frac{-\mathrm{e}^{-3t} \cdot t^2\mathrm{e}^t}{-4\mathrm{e}^{-2t}} = \frac{1}{4}\int t^2 = \frac{t^3}{12}$$

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t) \cdot f(t)}{W(t)} = \int \frac{\mathrm{e}^t \cdot t^2\mathrm{e}^t}{-4\mathrm{e}^{-2t}} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{4t} \cdot t^2.$$

Parciális integrálással: $c_2(t) = \frac{\mathrm{e}^{4t}}{4}(-\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t - \frac{1}{32})$. Így $x_0(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = \mathrm{e}^t \cdot \frac{t^3}{12} + \mathrm{e}^t \cdot (-\frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{32}t - \frac{1}{128})$ egy másik partikuláris megoldást kapunk. Az összes megoldás természetesen ugyanaz lesz.

HF $\ddot{x}(t) + 4x(t) = \cos 2t$
Megoldás:
1. homogén egyenlet megoldása: A $\lambda^2 + 4 = 0$ egyenlet megoldásai $\lambda_1 = 2\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -2\mathrm{i}$, így az alaprendszer $\cos 2t$, $\sin 2t$, tehát az összes megoldás $x(t) = c_1 \cdot \cos 2t + c_2 \cdot \sin 2t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. inhomogén egyenlet megoldása: A jobb oldal $f(t) = \cos 2t = \mathrm{e}^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t)$ alakú, ahol $\alpha = 0$ $\beta = 2$, $P_1(t) \equiv 1$, $P_2(t) \equiv 0$, $\alpha + \beta\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$ multiplicitása $k = 1$. Ezért a Tétel alapján létezik $x_0(t) = t(Q_1\cos 2t + Q_2\sin 2t)$ alakú (partikuláris) megoldás, ahol Q_1 és Q_2 konstans. Mivel $\dot{x}_0(t) = \cos 2t(Q_1 + 2Q_2t) + \sin 2t(Q_2 - 2Q_1t)$, $\ddot{x}_0(t) = 4\cos 2t(Q_2 - Q_1t) - 4\sin 2t(Q_1 + Q_2t)$, ezért az egyenletből a következő feltételeket kapjuk az együtthatókra: $4Q_2 - 4Q_1t + 4Q_1t = 1 \Rightarrow Q_2 = \frac{1}{4}$; $-4Q_1 - 4Q_2t + 4Q_2t = 0 \Rightarrow Q_1 = 0$. Tehát $x_0(t) = (t/4)\sin 2t$.
Az összes megoldás: $c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + (t/4)\sin 2t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2*. inhomogén egyenlet megoldása másik módszerrel: $W(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t) = \cos 2t \cdot 2\cos 2t - \sin 2t \cdot (-2)\sin 2t = 2$.

$$c_1(t) = \int \frac{-x_2(t) \cdot f(t)}{W(t)} = \int \frac{-\sin 2t \cdot \cos 2t}{2} = \int \frac{-\sin 4t}{4} = \frac{1}{16}\cos 4t$$

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t) \cdot f(t)}{W(t)} = \int \frac{\cos^2 2t}{2} = \int \frac{\cos 4t + 1}{4} = \frac{1}{16}\sin 4t + \frac{t}{4}.$$

Így $x_0(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = \frac{1}{16}(\cos 4t\cos 2t + \sin 4t\sin 2t) + (t/4)\sin 2t = \frac{1}{16}\cos 2t + (t/4)\sin 2t$ egy másik partikuláris megoldást kapunk. Az összes megoldás természetesen ugyanaz lesz.

3. Az alábbi másodrendű, függvény együtthatós egyenleteknél sejtsünk meg egy $x_1(t)$ megoldást és keressük meg a másik megoldást $x_2(t) = x_1(t)z(t)$ alakban!

(a) $\left(t^2 + 1\right)\ddot{x}(t) - 2t\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$
Megoldás: Az $x_1(t) = t$ megoldás megsejthető. $x_2(t) = x_1(t)z(t) = tz(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = z(t) + t\dot{z}(t)$ $\Rightarrow \ddot{x}_2(t) = 2\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t)$. Behelyettesítve az egyenletbe:

$$\left(t^2 + 1\right)(2\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t)) - 2t(z(t) + t\dot{z}(t)) + 2tz(t) = 0,$$

így $\left(t^2+1\right)t\ddot{z}(t) = -2\dot{z}(t) \Rightarrow \frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)} = -\frac{2}{(t^2+1)t} = -2\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) \Rightarrow \ln\dot{z}(t) = -2(\ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1))$
$\Rightarrow \dot{z}(t) = 1 + \frac{1}{t^2} \Rightarrow z(t) = t - \frac{1}{t}$. Tehát $x_2(t) = tz(t) = t^2 - 1$.

(b) $(2t+1)\ddot{x}(t) + 4t\dot{x}(t) - 4x(t) = 0$

Megoldás: Az $x_1(t) = t$ megoldás megsejthető. $x_2(t) = x_1(t)z(t) = tz(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = z(t) + t\dot{z}(t)$ $\Rightarrow \ddot{x}_2(t) = 2\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t)$. Behelyettesítve az egyenletbe:

$$(2t+1)\left(2\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t)\right) + 4t\left(z(t) + t\dot{z}(t)\right) - 4tz(t) = 0,$$

így $(2t+1)\,t\ddot{z}(t) = -(4t^2+4t+2)\dot{z}(t) = -\left((2t+1)^2+1\right)\dot{z}(t) \Rightarrow \frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)} = -2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{(2t+1)t} = -2 - \frac{2}{t} + \frac{2}{2t+1} \Rightarrow \ln\dot{z}(t) = -2t + \ln\frac{2t+1}{t^2} \Rightarrow \dot{z}(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cdot\frac{2t+1}{t^2} \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-2t}$. Tehát $x_2(t) = tz(t) = -\mathrm{e}^{-2t}$.

(c) $t\ddot{x}(t) - (2t+1)\dot{x}(t) + (t+1)x(t) = 0$

Megoldás: Az $x_1(t) = \mathrm{e}^t$ megoldás megsejthető. $x_2(t) = x_1(t)z(t) = \mathrm{e}^t z(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \mathrm{e}^t\left(z(t) + \dot{z}(t)\right)$ $\Rightarrow \ddot{x}_2(t) = \mathrm{e}^t\left(z(t) + 2\dot{z}(t) + \ddot{z}(t)\right)$. Behelyettesítve az egyenletbe:

$$t\mathrm{e}^t\left(z(t) + 2\dot{z}(t) + \ddot{z}(t)\right) - (2t+1)\mathrm{e}^t\left(z(t) + \dot{z}(t)\right) + (t+1)\mathrm{e}^t z(t) = 0,$$

így $-\dot{z}(t) + t\ddot{z}(t) = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \ln\dot{z}(t) = \ln t \Rightarrow \dot{z}(t) = t \Rightarrow z(t) = \frac{t^2}{2}$. Tehát $x_2(t) = tz(t) = \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t$.

5. gyakorlat

Peremérték-problémák

1. Van-e nemtriviális (vagyis az azonosan nulla függvényen kívül) megoldása az alábbi peremérték problémáknak?

(a) $\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(2\pi) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \ddot{x} - x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(2\pi) = 0 \end{cases}$

(a) Megoldás: A $\lambda^2+1 = 0$ egyenlet $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ megoldásából kapjuk, hogy az egyenlet összes megoldása $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$. A peremfeltételek kielégítéséhez a $c_1 = 0$ és $c_1 = 0$ egyenleteket kell megoldani. Tehát $x(t) = c\sin t$, $c \in \mathbb{R}$ mind megoldás (azaz végtelen sok megoldás van).

(b) Megoldás: A $\lambda^2-1 = 0$ egyenlet $\lambda_{1,2} = \pm 1$ megoldásából kapjuk, hogy az egyenlet összes megoldása $x(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t}$. A peremfeltételek kielégítéséhez a $c_1 + c_2 = 0$ és $c_1\mathrm{e}^{2\pi} + c_2\mathrm{e}^{-2\pi} = 0$ egyenleteket kell megoldani. Ebből $c_1 = c_2 = 0$, tehát csak az azonosan 0 megoldása van.

2. Az alábbi homogén peremérték problémák közül melyiknek létezik egyértelműen megoldása, illetve melyiknek nincs megoldása? Amelyiknek van megoldása, azt számoljuk is ki!

(a) $\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(\pi/2) = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1 \end{cases}$ HF $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0 \\ x(0) = 0,\ \dot{x}(\pi) = e^\pi \end{cases}$

(a) Megoldás: Az 1.(*a*) feladathoz hasonlóan az egyenlet összes megoldása $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$. A peremfeltételek kielégítéséhez a $c_1 = 0$ és $c_2 = 2$ egyenleteket kell megoldani. Tehát $x(t) = 2\sin t$ az egyetlen megoldás.

(b) Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan az egyenlet összes megoldása $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$. A perem feltételek kielégítéséhez a $c_1 = 0$ és $-c_1 = 1$ egyenleteket kell megoldani. Tehát nincs megoldás.

HF Megoldás: A $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ egyenlet $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$ megoldásából kapjuk, hogy az egyenlet összes megoldása $x(t) = c_1\mathrm{e}^t\cos t + c_2\mathrm{e}^t\sin t$. A peremfeltételek kielégítéséhez a $c_1 = 0$, valamint az $\dot{x}(t) = \mathrm{e}^t((c_1+c_2)\cos t + (c_2-c_1)\sin t)$ alapján az $\mathrm{e}^\pi(-c_1-c_2) = \mathrm{e}^\pi$ egyenleteket kell megoldani. Ebből $c_2 = -1$, tehát $x(t) = -\mathrm{e}^t\sin t$ az egyetlen megoldás.

3. Az alábbi inhomogén peremérték problémák közül melyiknek létezik egyértelműen megoldása, illetve melyiknek nincs megoldása? Amelyiknek van megoldása, azt számoljuk is ki!

(a) $\begin{cases} \ddot{x} + x = 1 \\ x(0) = x(\pi/2) = 0 \end{cases}$ HF $\begin{cases} \ddot{x} + x = 1 \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = 2t - \pi \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$

(a) Megoldás: Az 1.(a) feladathoz hasonlóan a homogén egyenlet alaprendszere $\cos t$, $\sin t$. Könnyen látható, hogy az $x_0(t) \equiv 1$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását adja. Így az összes megoldás $x(t) = 1 + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. A peremfeltételek kielégítéséhez a $1 + c_1 = 0$ és $1 + c_2 = 0$ egyenleteket kell megoldani. Tehát $x(t) = 1 - \cos t - \sin t$ az egyetlen megoldás.

HF Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan az egyenlet összes megoldása $x(t) = 1 + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. A peremfeltételek kielégítéséhez a $1 + c_1 = 0$ és $1 - c_1 = 0$ egyenleteket kell megoldani. Tehát nincs megoldás.

(c) Megoldás: Az 1.(a) feladathoz hasonlóan a homogén egyenlet alaprendszere $\cos t, \sin t$. Könnyen látható, hogy az $x_0(t) = 2t - \pi$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását adja. Így az összes megoldás $x(t) = 2t - \pi + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. A peremfeltételek kielégítéséhez a $-\pi + c_1 = 0$ és $\pi - c_1 = 0$ egyenleteket kell megoldani. Tehát $x(t) = 2t - \pi + \pi \cos t + c \sin t$ minden $c \in \mathbb{R}$-re megoldás (azaz végtelen sok megoldás van).

4. Mikor létezik egyértelműen megoldása az alábbi peremérték problémának, ha $b = \pi/4$ vagy $b = \pi/2$? Ha létezik megoldás, akkor számoljuk is ki.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4x(t) = e^t \\ x(0) = 1, \quad x(b) = 2 \end{cases}$$

Megoldás: A homogén egyenlet alaprendszere a $\lambda^2 + 4 = 0$ egyenlet $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$ megoldásából $\cos 2t$, $\sin 2t$. Könnyen látható, hogy az $x_0(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^t$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását adja. Tehát az összes megoldás $x(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.

Nézzük először a $b = \frac{\pi}{4}$ esetet! A peremfeltételek kielégítéséhez ekkor az $\frac{1}{5} + c_1 = 1$ és az $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} + c_2 = 2$ egyenleteket kell megoldani. Ebből $x(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^t + \frac{4}{5}\cos 2t + (2 - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}) \sin 2t$ az egyetlen megoldás.

A $b = \frac{\pi}{2}$ esetben a peremfeltételek kielégítéséhez az $\frac{1}{5} + c_1 = 1$ és az $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - c_1 = 2$ egyenleteket kell megoldani. Ebből látszik, hogy nincs megoldás. Azt, hogy nem egyértelmű a megoldás, abból is eldönthettük volna, hogy ebben az esetben $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$.