

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

1. FELADATSOR

2011. szeptember 12.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

1. Differenciálható-e a következő függvény?

$$f(x) := \begin{cases} \arctan x & \text{ha } |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

2. Számítsuk ki az alábbi összeget!

$$\sum_{k=0}^n k e^{kx}$$

3. Tegyük fel, hogy f differenciálható a -ban! Mivel egyenlő a következő határérték?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f\left(a + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(a + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(a + \frac{n}{n^2}\right) - n f(a) \right)$$

4. Legyen $a > 0$. Számítsuk ki!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{a}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2a}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{na}{n^2}\right) \right)$$

5. Legyenek f és g az $[a, b]$ intervallumon folytonos, (a, b) -ben differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor létezik $x \in (a, b)$, melyre

$$g'(x) \cdot f(x) + f'(x) = 0.$$

6. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n nem-0 valós számok, és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ páronként különböző valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az

$$a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots + a_n x^{\alpha_n} = 0$$

egyenletnek legfeljebb $n - 1$ gyöke van $(0, +\infty)$ -en!

7. Legyen f folytonos $[0, 2]$ -n, 2-szer differenciálható $(0, 2)$ -n. Mutassuk meg, hogy ha

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ és } f(2) = 2,$$

akkor létezik $x_0 \in (0, 2)$, hogy

$$f''(x_0) = 0.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

2. FELADATSOR

2011. szeptember 19.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

8. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ -szer differenciálható. Legyenek $x, x_0 \in [a, b]$. Bizonyítsuk be a következő integrál-maradéktagos Taylor-formulát!

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

9. Tegyük fel, hogy $f, g \in C^2([0, 1])$, $g'(x) \neq 0, x \in (0, 1)$ és $f'(0)g''(0) \neq f''(0)g'(0)$. Jelölje $\theta(x), x \in (0, 1)$ a Cauchy-közéérték-tétel

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}$$

alapján létező számot. Határozzuk meg

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\theta(x)}{x}$$

értékét!

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $f''(x)$ létezik, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

11. Tegyük fel, hogy f'' létezik és korlátos $(0, +\infty)$ -n. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

12. Tegyük fel, hogy $f_n \hookrightarrow f$ és $g_n \hookrightarrow g$ H -n. Igazoljuk, hogy $f_n + g_n \hookrightarrow f + g$ H -n! Igaz-e, hogy $f_n \cdot g_n \hookrightarrow f \cdot g$ is teljesül H -n?

13. Egyenletesen konvergens-e az alábbi függvénysorozat a megadott A ill. B halmazon?

$$f_n(x) := \cos^n x (1 - \cos^n x), \quad A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad B = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

3. FELADATSOR

2011. szeptember 26.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

14. Tegyük fel, hogy

$$|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

15. Legyenek $m, k \in \mathbb{N}$ rögzítve. Mennyi az alábbi határérték?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \cdots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn \right)$$

16. Legyen f differenciálható a -ban, továbbá (x_n) és (z_n) olyan a -hoz tartó sorozatok, melyekre $x_n \neq a$, $z_n \neq a$ és $x_n \neq z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Adjunk példát olyan f függvényre, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$$

a) egyenlő $f'(a)$ -val;

b) nem létezik, vagy létezik, de nem egyenlő $f'(a)$ -val.

17. Legyen f differenciálható a -ban, továbbá (x_n) és (z_n) olyan a -hoz tartó sorozatok, melyekre $x_n < a < z_n$, $n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

18. Tegyük fel, hogy a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(b - a \geq 4)$ függvény differenciálható (a, b) -n. Igazoljuk, hogy van olyan $x_0 \in (a, b)$, melyre

$$f'(x_0) < 1 + f^2(x_0).$$

19. Legyen f egy tetszőleges, $[a, b]$ -n értelmezett függvény,

$$f_n(x) := \frac{\lfloor n \cdot f(x) \rfloor}{n}, \quad x \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Igazoljuk, hogy $f_n \rightrightarrows f$ $[a, b]$ -n!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

4. FELADATSOR

2011. október 10.

20. Legyen f differenciálható \mathbb{R} -en. Mely pontokban differenciálható $|f|$?

21. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}; \\ \sin x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mely pontokban differenciálható f és $|f|$?

22. Igazoljuk az alábbiakat!

a)

$$(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R}, n \geq 1,$$

b)

$$(x^n \ln x)^{(n)} = n! \left(\ln x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right), \quad x > 0, n \geq 1.$$

23. Tegyük fel, hogy a_0, a_1, \dots, a_n olyan valós számok, melyekre

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0.$$

Igazoljuk, hogy a

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinomnak van legalább egy gyöke $(0,1)$ -ben!

24. Igazoljuk, hogy a

$$3^x + 4^x = 5^x$$

egyenletnek pontosan egy gyöke van!

25. Tegyük fel az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről az alábbiakat!

(i) f végtelen sokszor differenciálható \mathbb{R} -en;

(ii) létezik $L > 0$, melyre $|f^{(n)}(x)| \leq L$ minden $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ esetén;

(iii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Igazoljuk, hogy ekkor $f \equiv 0$ \mathbb{R} -en!

26. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható és f' egyenletesen folytonos \mathbb{R} -en. Igazoljuk, hogy az

$$f_n(x) := n \cdot \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

függvénysorozat egyenletesen tart f' -höz \mathbb{R} -en!

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

5. FELADATSOR

2011. október 17.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

27. Legyen $f \in C[0,1]$. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

28. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét!

$$\int_0^\pi \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

29. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, $T > 0$ szerint periodikus függvény. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a < b$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(nx) dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

30. Legyen $f \in C[a, b]$. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$$

31. Legyen $f \in C[0, \infty)$ és

$$a_n := \int_0^1 f(n+x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Mennyi $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$?

32. Legyen $f \in C[0,1]$ pozitív függvény. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét!

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx$$

33. Legyen f folytonos és páros függvény $[-a, a]$ -n ($a > 0$). Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx.$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

6. FELADATSOR

2011. október 24.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

34. Mennyi az alábbi határérték?

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx$$

35. Legyen $f \in C[0,1]$. Mennyi a következő határérték?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx$$

36. Legyen f folytonosan differenciálható $[0,1]$ -en, $f'(0) \neq 0$. Adott $x \in (0,1]$ számhoz válasszunk (az integrálszámítás középérték-tétele alapján létező) $\theta(x)$ -et, melyre

$$\int_0^x f(t) dt = f(\theta(x)) \cdot x.$$

Mennyi az alábbi határérték?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\theta(x)}{x}$$

37. Mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

38. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét!

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

39. Számítsuk ki a következő improprius integrál értékét!

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

ANALÍZIS FELADATMEGOLDÓ SZEMINÁRIUM

7. FELADATSOR

2011. november 14.

A megoldásokat nem kell beadni, hanem az órán kell levezetni, és ez alapján születik a jegy.

40. Igazoljuk, hogy ha f folytonosan differenciálható $[0,1]$ -en, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

41. Mutassuk meg, hogy ha f Riemann-integrálható $[a,b]$ -n, akkor véges sok pontban megváltoztatva az értékét Riemann-integrálható marad, és az integrál értéke sem változik!

42. Legyen $f \in C[a,b]$, és tegyük fel, hogy minden $a \leq \alpha < \beta \leq b$ esetén

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0.$$

Igazoljuk, hogy $f \equiv 0$ $[a,b]$ -n!

43. Legyen $f \in C[a,b]$, és tegyük fel, hogy minden $g \in C[a,b]$ függvény esetén

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Igazoljuk, hogy $f \equiv 0$ $[a,b]$ -n!

44. Legyen f folytonos \mathbb{R} -en. Mutassuk meg, hogy

a) ha $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f páratlan függvény;

b) ha $\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f páros függvény;

c) adott $T > 0$ -ra, ha $\int_x^{x+T} f(t) dt = 2 \int_0^T f(t) dt$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f periodikus függvény $T > 0$ periódussal!

45. Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5 + 1} dx \right)$$

46. Számítsuk ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5 + 1} dx \right)$$