

**Analízis gyakorló feladatok**  
**Meteorológus MSc, 2011/2012. I. félév**

1. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, mi a határértékük?

$(a) a_n = \frac{1}{n};$	$(i) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$	$(r) a_n = \sqrt[n]{5n+3}$
$(b) a_n = \sqrt[n]{n};$	$(j) a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k;$	$(s) a_n = \sqrt[2n]{n}$
$(c) a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0;$	$(k) a_n = \frac{2^{2n+n^2}}{5^{n-n^2}};$	$(t) a_n = \sqrt[n]{2 + \sqrt{n}}$
$(d) a_n = q^n,  q  \leq 1;$	$(l) a_n = \frac{3 \cdot 8^{2n} - n^{10} \cdot 3^{3n}}{n^2 \cdot 5^{n-2} \cdot 4^{3n+1}}.$	$(u) a_n = \sqrt[n]{10n^3 + 2}$
$(e) a_n = n^k \cdot q^n, k \in \mathbb{N},  q  \leq 1;$	$(m) a_n = \sqrt[n]{b_n}, b_n \rightarrow a > 0;$	$(v) a_n = \sqrt[n]{2^n + n^3}$
$(f) a_n = \frac{n^k}{c^n}, c > 1;$	$(n) a_n = \sqrt[n+2]{2n+3};$	$(w) a_n = \sqrt[n]{\frac{5^n+3^n}{4^n-3^n}}$
$(g) a_n = \frac{c^n}{n!}, c > 0;$	$(o) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3};$	$(z) a_n = \sqrt[2n]{\frac{n^2 \cdot 2^n + 3^n}{\sqrt{4^n - 3^n}}}$
$(h) a_n = \frac{n!}{n^n};$	$(p) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2}.$	$(x) a_n = \sqrt[4n]{4^n + n^4 + n^3}$

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét (ha az létezik)!

$(a) a_n = \frac{3n+5}{7n-8};$	$(e) a_n = \frac{\frac{5}{n^4} + \frac{2}{n^2}}{\frac{8}{n^5} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}};$	$(i) a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n;$
$(b) a_n = \frac{50n^2+25n}{n^3+1};$	$(f) a_n = \frac{\sqrt[3]{125-1}}{\sqrt[3]{5-1}};$	$(j) a_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n;$
$(c) a_n = \frac{4n^5+n-2}{8n^3+7n^2+1};$	$(g) a_n = \sqrt[3]{5^n + 2^n};$	$(k) a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n;$
$(d) a_n = \frac{3^n+2^n}{4 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n};$	$(h) a_n = \sqrt[3]{5^n - 2^n};$	$(l) a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$

3. Döntsük el, hogy léteznek-e az alábbi függvényhatárértékek, és ha igen, akkor számítsuk ki ezeket!

$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - x}$	$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$	$(c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 5x - 3}$
$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}$	$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$	$(f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$
$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$	$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^2}$	$(i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + \sqrt{x}}{x^3 - 8}$
$(j) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$	$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{x^3}$	$(l) \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \cdot \operatorname{sgn} x$
$(m) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 2x - 10$	$(n) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 3x^3 - 6$	$(o) \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3\sqrt[3]{x^2}$
$(p) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x + 5}$	$(q) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 9}{x + 6}$	$(r) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

4. A  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  azonosság felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek!

$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{x}$	$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$	$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}$
$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$	$(e) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 2x$	$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln  x $
$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$	$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$	

5. A kompozíciófüggvények deriválására vonatkozó azonosságot is felhasználva számítsuk ki az alábbi hozzárendeléssel adott függvények deriváltjait!

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a1)} \ f(x) = \sin^5 x & \text{(a2)} \ f(x) = \sin 5x & \text{(a3)} \ f(x) = \sin x^5 \\
 \text{(b1)} \ f(x) = \sin^5 5x^5 & \text{(b2)} \ f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & \text{(b3)} \ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\
 \text{(c1)} \ f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} & \text{(c2)} \ f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} & \text{(c3)} \ f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} \\
 \text{(d1)} \ f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & \text{(d2)} \ f(x) = \ln \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{x} & \text{(d3)} \ f(x) = e^{10} \sin 5x \\
 \text{(e1)} \ f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} & \text{(e2)} \ f(x) = \ln \sin x & \text{(e3)} \ f(x) = \ln \ln x \\
 \text{(f1)} \ f(x) = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) & \text{(f2)} \ f(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) & 
 \end{array}$$

Egy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény tulajdonságainak vizsgálata:

- Értelmezési tartomány és torlódási pontjainak meghatározása.
- A függvény zérushelyei és tengelymetszetei.
- Folytonosság (féloldali is), szakadási helyek.
- Határérték az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban ( $\pm\infty$ -ben is).
- Szélsőérték-vizsgálat (lokális és abszolút):
  - szükséges:  $f'(x_0) = 0$ ,
  - elégséges:  $f'$  az  $x_0$ -ban előjelet vált vagy  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$  szigorú lokális minimum,  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$  szigorú lokális maximum.
- Monotonitási viszonyok
  - $f' \geq 0 \Leftrightarrow$  monoton nő,  $f' \leq 0 \Leftrightarrow$  monoton fogy,
  - $f' > 0 \Rightarrow$  szigorúan monoton nő,  $f' < 0 \Rightarrow$  szigorúan monoton fogy.
- Inflexiós pontok:
  - szükséges:  $f''(x_0) = 0$ ,
  - elégséges:  $f''$  az  $x_0$ -ban előjelet vált vagy  $f'''(x_0) \neq 0$ .
- Konvexitás-konkávítás:
  - konvex  $\Leftrightarrow f'$  monoton nő vagy  $f'' \geq 0$ ,
  - konkáv  $\Leftrightarrow f'$  monoton fogy vagy  $f'' \leq 0$ .
- A függvény grafikus ábrázolása.
- Értékkészlet meghatározása.

6. Végezzük el az alábbi függvények teljes körű vizsgálatát!

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \ f(x) = x^4 - 2x^3; & \text{(g)} \ f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \\
 \text{(b)} \ f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}; & \text{(h)} \ f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}; \\
 \text{(c)} \ f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}; & \text{(i)} \ f(x) = 2x - \operatorname{tg} x; \\
 \text{(d)} \ f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}; & \text{(j)} \ f(x) = \frac{e^x}{1+x}; \\
 \text{(e)} \ f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}; & \text{(k)} \ f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; \\
 \text{(f)} \ f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}; & \text{(l)} \ f(x) = e^{-x^2};
 \end{array}$$